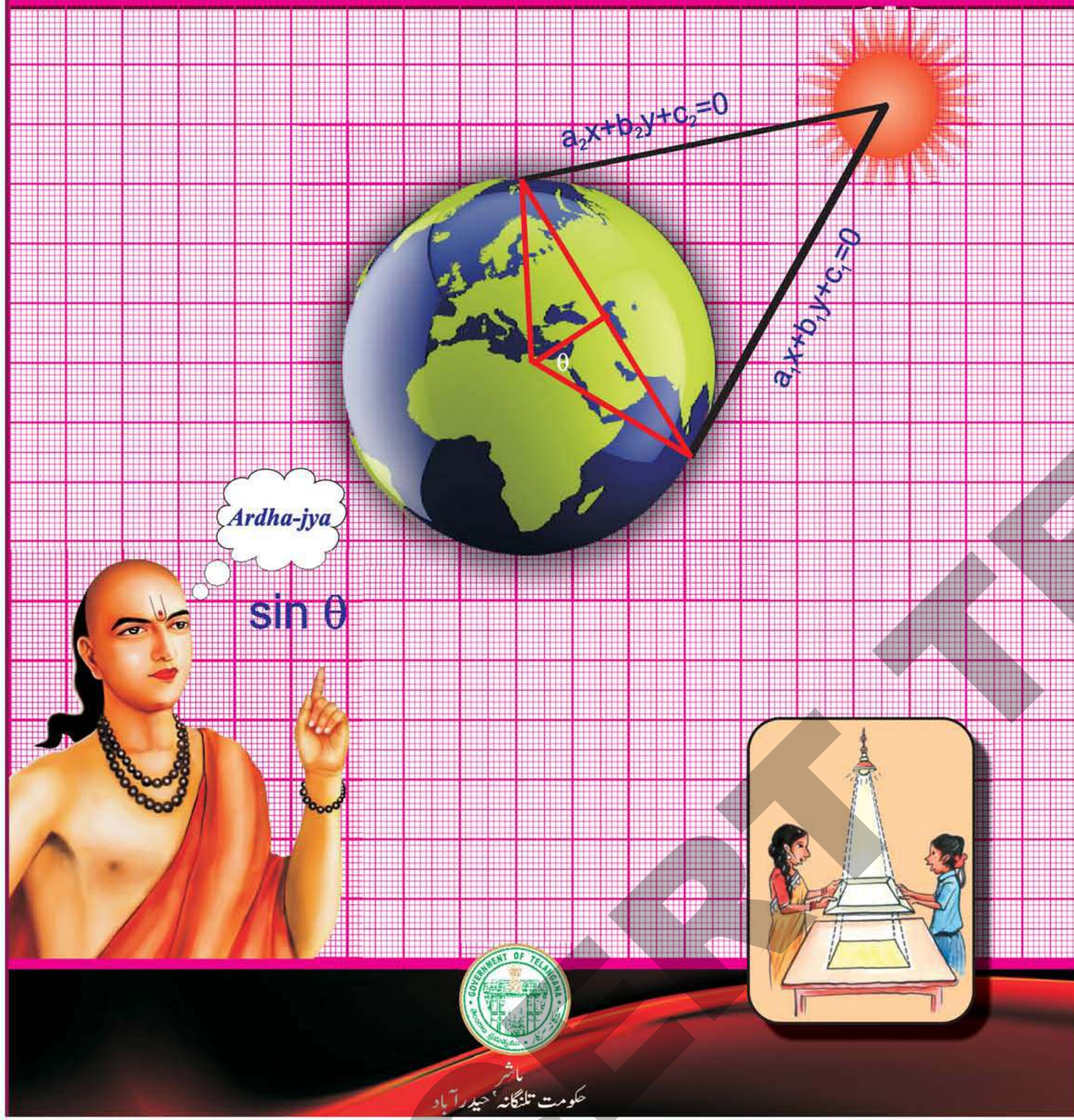
FREE

MATHEMATICS ریاضی

Class X

جماعت دہم



ناشر
حکومت تلنگانہ' حیدرآباد

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔

ریاضی MATHEMATICS جماعت دہم CLASS X

ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت'
تلنگانہ' حیدرآباد

حکومت تلنگانہ

محکمہ ترقی نسواں وبہبود اطفال - چائلڈلائین فاؤنڈیشن

خطروں اور مشکلوں سے بچوں کے تحفظ کے لیے

جب اسکول یا اسکول سے باہر بدسلوکی ہو

جب افراد خاندان یا رشتہ دار بدتمیزی سے پیش آئیں

جب بچوں کو اسکول سے روک کر کام پر لگایا جائے

مفت خدمات کے لیے (دس......نو........آٹھ) 1098 پر ڈائیل کریں

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔

SCERT TELANGANA

SIGNS AND SYMBOLS OF SCHOOL MATHEMATICS

Sign/symbol	Read as	Mathematical meaning
$\pm$	plus or minus	Add or Substract
$\neq$	not equal to	unequal
$\therefore$	therefore	logical flow of a statement
∞	infinite	not finite
$\sim$	is similar to	same in geometrical shape
$\cong$	is congruent to	same shape and same size
$\equiv$	is identically equal to	equivalent statements
$\forall$	for all	universal quantifier
$\sqrt{\ }$	square root of	square root of a number
$\sqrt[3]{\ }$	cube root of	cube root of a number
$\cup$	cup of	union of sets
$\cap$	cap of	intersection of sets
ϕ	phi	symbol for golden ratio
$\%$	percent of	per hundred
^{o}	degree	angle measure
Δ	delta / triangle	symmetric difference in sets/symbol of triangle
$\in$	belongs to	an element belong to a particular set
$\leftrightarrow$	equivilent to	one to one correspondence
α, β, γ	alpha,beta,gamma	greek lettetrs to represent zeroes of polynomial
μ	mu	universal set symbol
π	pi	circumference of a circle / diameter
σ	sigma	sum of scores
$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$	sin theta,cos theta,tan theta	trigonometric ratios
$\overline{x}$	x bar	arithmetic mean
$\log_a x$	log x to the base a	logarthemic function
(a, b)	point (a, b)	ordered pair (a, b)
$\lvert x\rvert$	mod x	absolute value of a real number
$P(x)$	P of x	a polynomial function in x
$P(E)$	P of E	probability of an event
$\because$	Since	reasoning at a stage
₹	rupee	symbol of Indian rupee
$\vert\vert$	is parallel to	parallel lines
$\perp$	is perpendicular to	making 90 degree with a line
$\{\ \}$	flower bracket	used to set notation
$\overset{\frown}{PQ}$	arc PQ	arc of a circle
a^2	a square	square of a number
$\angle$	angle	symbol of angle
θ	theta	measurement of an angle

بچو! یہ ہداتیں آپ کے لیے ہیں۔

☆ درسی کتاب میں دیئے گئے ہرایک تصور سے آگہی کے لیے Situations یا مثالیں یا سوالات یا کھیل وغیرہ دیے گئے ہیں۔ان سے متعلق تصویریں/ خاکے بھی دیے گئے ہیں۔Situation کوخاکہ/تصویر سے جوڑتے ہوئے تصور کو جاننے کی کوشش کریں۔

☆ تصورات کی تفہیم کے لیے مشغلوں میں حصہ لینے کے دوران پیدا ہونے والے شکوک وشبہات کا ازالہ آپ اپنے معلم سے فوراً کرلیں۔

☆ تصورات کا فہم حاصل ہوا ہے یانہیں جاننے کے لیے آپ ''یہ کیجیے'' کے تحت دیئے گئے سوالات خود حل کریں۔اگر آپ حل نہ کر پائیں تو نمونہ کے طور پر دیا گیا مسئلہ حل کرتے ہوئے آگہی حاصل کریں۔یا اپنے معلم سے معلوم کریں۔

☆ ''یہ کیجیے''اور''کوشش کیجیے'' کے تحت دیئے گئے سوالات معلم کی نگرانی میں اسکول ہی میں حل کریں۔

☆ سوچیے۔بحث کیجیے'' کے تحت دیئے گئے مشغلے تصورات کو مزید گہرائی اور وسیع طور پر سمجھنے میں آپ کے لیے معاون ہوں گے۔لہذا ان سے متعلق اپنے دوستوں سے مباحثہ کرتے ہوئے سوالات کرتے ہوئے آگہی حاصل کریں۔

☆ ''کوشش کیجیے''' عنوان کے تحت دیے گئے سوالات آپ کی سوچ کو ابھارنے میں مدومعاون ثابت ہوں گے۔یعنی یہ آپ میں غوروفکر کی صلاحیت کو فروغ دیں گے۔یہ مسائل آپ خود سے حل نہ کر پائیں تو اپنے ساتھیوں کے ساتھ گروہی طور پر حل کرنے کی کوشش کریں'یا معلم سے گفتگو کرتے ہوئے کس طرح حل کیا جائے معلوم کریں۔

☆ ہر باب کے آخر میں ایک اختیاری مشق دی گئی ہے۔اس مشق میں دیئے گئے سوالات آپ میں غوروفکر کو فروغ دیتے ہیں۔ان سوالات کو آپ ہر صورت میں حل کریں۔امتحانات میں یہ سوالات نہیں پوچھے جائیں گے اس کے باوجود قومی سطح پر منعقد ہونے والے امتحانات میں آپ کے مسابقتی جذبہ کو فروغ دیں گے۔

☆ ''درسی کتاب میں جہاں کہیں بھی منصوبہ کام دیا گیا ہے۔اسکو گروہی طور پر حل کریں۔لیکن اس سے متعلق رپورٹ آپ کو انفرادی طور پر لکھنا ہوگا۔

☆ تصورات کی تفہیم کے لیے منعقد کیے جانے والے مشغلوں اور مشقوں کے تحت جو سوالات ہیں۔ان سے متعلق ردعمل اگر درسی کتاب میں لکھنا ہو تو وہیں پر لکھیں۔

☆ جس دن جو سوالات حل کرنا ہے ان کی تکمیل اسی روز کرلیں اور اپنے معلم سے تصحیح کروالیں۔

☆ آپ سیکھے ہوئے تصورات سے متعلق مسائل مزید چند حاصل کر کے یا خود سے تیار کر کے اپنے معلم یا ساتھیوں کو دکھائیں سب مل کر ان کو حل کریں۔

☆ ریاضی کے تصورات سے تعلق رکھنے والے کھیل' معمے اور دلچسپی معلومات آپ کی درسی کتاب میں دیے گئے ہیں۔ان کے بارے میں آگہی حاصل کر کے ان جیسے مزید چند مسائل حاصل کر کے ان کو حل کریں۔

☆ درسی کتاب کے ذریعہ سیکھے ہوئے تصورات کو کمرہ جماعت محدود نہ رکھیں بلکہ ان کا استعمال اپنی روزمرہ زندگی میں موقع ومحل کے اعتبار سے کریں۔

☆ ریاضی میں خاص طور پر مسئلہ کا حل' وجوہات بیان کرنا' نتیجہ اخذ کرنا' ریاضی کی زبان میں اظہار' ریاضی کے تصورات کا فہم حاصل کرتے ہوئے مختلف حالات اور روزمرہ زندگی سے جوڑتے ہوئے' حل کرنا وغیرہ جیسی صلاحیتوں کے حاصل ہونا چاہیئے۔

☆ ریاضی تصورات کو مزید بہتر انداز میں سمجھنے کے لیے' مسئلہ کا حل اور حل کرنے کے مختلف طریقوں کو جاننے کے لیے آپ حوالا جاتی کتب کا مطالعہ کریں اور انٹرنٹ کا استعمال' ماہرین مضمون/ اساتذہ/ اپنے ساتھیوں سے مباحثہ کریں۔

☆ مذکورہ بالا ریاضی کے تصورات کے حصول کے لیے' تصورات کی تفہیم کے تحت اگر آپ کو دشواریاں پیش آتی ہوں تو بروقت معلم کی مدد حاصل کریں۔

☆ ضمیمہ میں دیئے گئے ''ریاضی ماڈلنگ'' باب میں ریاضی کے تصورات کو استعمال کرتے ہوئے تجارت' زراعت' اسٹاک مارکٹ وغیرہ سے متعلق مسائل کی ترتیب اور حصول میں معاون ہونگے۔اسی طرح ریاضی کے موضوعات دیگر موضوعات سے کس طرح رشتہ قائم کرتے ہیں۔آپ جانیں گے لہذا اس باب کا مطالعہ ضرور کریں۔

☆ درسی کتاب کے آخر میں نصاب' تعلیمی قدریں دی گئی ہیں۔یہ اس بات کو ظاہر کریں گی کہ آپ نے کیا سیکھا ہے اور آپ کو کیا سیکھنا ہے؟ آپ کون سی تعلیمی قدروں کے حصول میں جاننے کے لیے بھی یہ آپ کی مدد کریں گی۔

SCERT TELANGANA

ریاضی جماعت دہم

Mathematics - Class X

کمیٹی برائے فروغ واشاعت درسی کتاب

چیف پروڈکشن آفیسر	:	**سری جی۔گوپال ریڈی،** ڈائریکٹر ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، حیدرآباد
ایکزیکیوٹیو چیف آرگنائزر	:	**سری بی۔سُدھاکر،** ڈائریکٹر گورنمنٹ ٹکسٹ بک پریس، حیدرآباد۔
آرگنائزنگ انچارج	:	**ڈاکٹرین۔اوپیندر ریڈی،** پروفیسر صدر شعبہ نصاب ودرسی کُتب، ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، حیدرآباد

چیرپرسن برائے ریاضی پوزیشن پیپر نصاب وفروغ درسی کتب

پروفیسروی۔کنّن

شعبہ ریاضی وشماریات، حیدرآباد سنٹرل یونیورسٹی، حیدرآباد۔

چیف اڈوائزر

سری چُکّا رامیا،
ممتاز اسکالر برائے ریاضی،
تلنگانہ، حیدرآباد۔

ڈاکٹر ایچ۔کے۔دیوان،
تعلیمی مشیر، ودیا بھون سوسائٹی،
اُودے پور، راجھستان۔

قانون کا احترام کریں
اپنے حقوق حاصل کریں

تعلیم سے آگے بڑھیں
عاجزی وانکساری کا اظہار کریں

ناشر

حکومت تلنگانہ، حیدرآباد۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے 2020-21

SCERT TELANGANA

© Government of Telangana, Hyderabad.

First Published 2014

New Impressions 2015, 2016, 2017,2018,2019,2020

All rights reserved.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means without the prior permission in writing of the publisher, nor be otherwise circulated in any form of binding or cover other than that in which it is published and without a similar condition including this condition being imposed on the subsequent purchaser.

The copy right holder of this book is the Director of School Education, Hyderabad, Telangana.

SCERT TELANGANA

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21

Printed in India
for the Director Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana

کمیٹی برائے تشکیل درسی کتاب

مصنفین

سری ٹی وینکٹارمنا کمار، صدر مدرس، ضلع پریشد ہائی اسکول، ملوموڈی، ضلع نیلور۔

سری سوما پرساد بابو، پی جی ٹی، APTWR، چندر شیکھر راپورم، ضلع نیلور۔

سری جی۔ انیتا ریڈی، موظف صدر مدرس، ضلع رنگا ریڈی

ڈاکٹر پونڈلا رمیش، لکچرر، گورنمنٹ IASE، ضلع نیلور۔

سری کے۔ سری دھراچاریلو، ایس۔ اے، ZPHS، رنگائی پلی، ضلع میدک۔

سری کانڈلا راما، ایس اے، کاسم دیو پیٹ، ضلع ورنگل۔

سری جی۔ وی۔ بی۔ ایس۔ این راجو، ایس۔ اے، یم پی ایل ہائی اسکول، کاسپا، ضلع وجیانگرم

سری پاڈالا سُریش کمار، ایس اے، گورنمنٹ ہائی اسکول، وجیانگر کالونی، حیدرآباد۔

سری پی۔ ڈی۔ ایل۔ گنپتی شرما، ایس اے، گورنمنٹ ہائی اسکول، زمستان پور، حیدرآباد۔

سری سردار دھرمیندر اسنگھ، ایس اے، ZPHS، دانور (بی)، ضلع عادل آباد۔

سری ناگولا روی، ایس۔ اے، ZPHS، لوکیشورم، ضلع عادل آباد۔

سری کاکولاورم راجیندر ریڈی، کوآرڈینیٹر، ایس سی ای آر ٹی، اے۔ پی، حیدرآباد۔

چیف ایڈیٹر

ڈاکٹر ایچ۔ کے۔ دیوان

تعلیمی مشیر، ودیا بھون سوسائٹی، اُودے پور، راجھستان۔

ایڈیٹرس

پروفیسر وی۔ شیوا رام پرساد

موظف شعبہ ریاضی، عثمانیہ یونیورسٹی، حیدرآباد۔

سری اے۔ پدمنابھم (موظف)

صدر شعبہ ریاضی، مہارنس کالج، پداپورم، ضلع ایسٹ گوداوری۔

پروفیسر ین۔ پٹابھی راماچاریلو

موظف نیشنل انسٹیٹیوٹ آف ٹکنالوجی، ورنگل۔

ڈاکٹر جی ایس ین مورتی

موظف ریڈر ان میتھا میٹکس، راجا آر ایس آر کے رنگاراؤ کالج، بوبلی، وجیانگرم

ایڈیٹرس (اُردو)

سید حسن الدین

موظف ڈپٹی انسپکٹر آف اسکول، حیدرآباد۔

میر سجاد علی

موظف پرنسپل، اسلامیہ بوائز ہائی اسکول، سکندرآباد

سید واجد ہاشمی

صدر مدرس، گورنمنٹ ہائی اسکول، سیتارام پیٹ، حیدرآباد۔

کوآرڈینیٹر (اُردو)

محمد افتخار الدین

کوآرڈینیٹر (اُردو) ریاستی ادارہ برائے تعلیمی تحقیق وتربیت، تلنگانہ، حیدرآباد۔

مترجمین

ابو طاہر محمد عبدالشکور

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، اولڈ ملک پیٹ، حیدرآباد۔

خواجہ افتخار حسن

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، ٹی۔ ڈی سنگھ، حیدرآباد۔

محمد تقی الدین

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، معظم شاہی، حیدرآباد۔

احمد علی طیب

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، معظم شاہی، حیدرآباد۔

محمد عبدالروف

اسکول اسسٹنٹ، ضلع پریشد ہائی اسکول، گاندھی پارک، گوداوری کھنی، کریم نگر۔

محمد عبدالعلیم

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول، معظم شاہی، حیدرآباد۔

محمد خواجہ مجتہد الدین

اسکول اسسٹنٹ، ضلع پریشد ہائی اسکول، جنگاؤں، ورنگل۔

شیخ حبیب الرحمٰن

اسکول اسسٹنٹ، ڈائیٹ ایل یم ڈی کالونی، کریم نگر۔

محمد ایوب احمد

اسکول اسسٹنٹ، ضلع پریشد ہائی اسکول، آتماکور، محبوب نگر۔

محمد محمود علی

اسکول اسسٹنٹ، ضلع پریشد ہائی اسکول، 2'B گڑھی، ظہیرآباد، سنگاریڈی

سید عمران

اسکول اسسٹنٹ، گورنمنٹ ہائی اسکول ٹی ڈی گٹہ، محبوب نگر۔

کمپوزنگ اینڈ ڈیزائن لے آوٹ

ٹی محمد مصطفےٰ، حبیب کمپیوٹرس، بھولکپور، مشیرآباد، حیدرآباد۔

شیخ حاجی حسین، امپرنٹ کمپیوٹیک، بالانگر، میڈچل، حیدرآباد

SCERT TELANGANA

پیش لفظ

تعلیم' انسان کی بصیرت وآگہی اوراسے بااختیار بنانے کا ایک طویل سلسلہ ہے۔تعلیم کے لامحدود فوائد کے پیش نظر تمام ہی ترقی پزیر سماجوں نے ابتدائی تعلیم کو اقطاع عالم کے ہرگوشہ تک عام کردینے کی ٹھان رکھی ہے اوراس عزم صمیم کا اظہار کیا ہے کہ سبھی کے لیے معیاری تعلیم یقینی بنائی جائے۔عالمی سطح پر ثانوی تعلیم کا فروغ بھی اسی پالیسی پر عمل آواری کا ہی ایک حصہ ہے۔

پرائمری سطح تک روز مرہ زندگی کے لیے کارآمد حساب کی تدریس' ثانوی مرحلہ میں عبوری حیثیت سے ایک ضروری مضمون کی حیثیت اختیار کرلیتی ہے۔ثانوی تعلیم کا مرحلہ ہی وہ مرحلہ ہے جہاں مفروضاتی اوابر کو ثبوت کے ذریعہ منطقی انجام تک پہونچایا جاتا ہے اور ریاضیاتی مسکلے متعارف کئے جاتے ہیں۔فی نفسہٖ اک خصوصی مضمون ہونے کے علاوہ' ریاضی' تجزیاتی وتقابلی خصوصیت اور باہمی ہم رشتگی کے سبب دیگر مضامین سے بھی مربوط ہوتا ہے۔ یہہ امر اہمیت کا حامل ہے کہ ثانوی سطح پر طلباء میں ریاضی کے استعمالات واطلاقات سے متعلق شعور اوراعتماد پیدا ہو' تاکہ اس مضمون سے متعلق اپنے تجربات کو مجتمع کرتے ہوئے اعلیٰ سطح پر اس کے مطالعہ کے لیے ذوق پیدا کرسکیں۔اعلیٰ تعلیم کا یہ ذوق یقیناً انہیں ایک بہتر شہری بننے میں مددگار ثابت ہوگا۔

میں امید کرتا ہوں کہ ہماری ریاست میں بچے اس مضمون کو سیکھنے کا اشتیاق پیدا کرتے ہوئے ریاضی کو اپنی زندگی کا اک تجربہ بنائیں گے۔اس کتاب کو وسیلہ بناتے ہوئے وہ' بامعنی مسائل کی تدبیر کریں اوراس کے بنیادی اصولوں کا فہم حاصل کریں گے۔

اساتذہ سے امید کیجاتی ہے کہ وہ نشانات کو مرکزیت دینے کے بجائے مضمون کے فہم پر ضروری توجہ دیں گے تاکہ نصابی اور نفسیاتی پہلوؤں جائزلیا جاسکے۔درس وتدریس میں نصابی امور کی موثر منتقلی کے لیے ضروری ہے کہ کمرہ جماعت کے تقاضوں کو پورا کریں۔اساتذہ کو یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ طلباء کی معلومات کو اک منطق انجام تک پہونچانے کے مقصد سے طرز زندگی کے اختلافات اوراختلاف رائے کے کلاس روم کلچر میں طلباء کے اندر مثبت رجحانات پیدا کرنا ہی اصل تدریسی تقاضہ ہے۔APSCF - 2011 میں پیش کردہ ریاضی کی تدریس کا ویژن' ریاضی کی تدریس سے متعلق اس کی دستاویزات میں واضح کردیا گیا ہے۔ان دستاویزات میں یہ امر بھی واضح کیا گیا ہے کہ ہماری ریاست میں ریاضی کی تدریس کے معیارات کیا ہونے چاہیں۔اس کتاب میں انہی سب احساسات کو اک ٹھوس جہت دینے کی کوشش کی گئی ہے۔

اسٹیٹ کونسل فار ایجوکیشن ریسرچ اینڈ ٹریننگ' آندھراپردیش' ٹکسٹ بک ڈیولپمنٹ کمیٹی اور ریاست کے مختلف مقامات سے تعلق رکھنے والے اساتذہ کی کوششوں کی ستائش کرتا ہے جنہوں نے اس کتاب کی تیاری میں اپنا حصہ ادا کیا ہے۔ میں اس سلسلہ میں ڈسٹرکٹ ایجوکیشنل آفیسرس' منڈل ایجوکیشن آفیسرس اور ہیڈ ماسٹرس کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ میں ان اداروں اور آرگنائزیشنز کا مشکور ہوں جنہوں نے اس مقصد کے لیے اپنا قیمتی وقت دیا۔ دسویں جماعت کی ریاضی کی اس کتاب کی تکمیل میں تعاون واشتراک پر میں عہدیداران دفتر کمشنر وڈائرکٹر ثانوی تعلیم کا بھی سپاس گذار ہوں۔

کام کے معیار کو بہتر بنانے کی مسلسل سعی میں' میں آپ تمام کی تجاویز کا خیر مقدم کرونگا۔

ڈائریکٹر
ایس سی ای آر ٹی' اے۔پی۔
حیدرآباد۔

حیدرآباد
مورخہ 17/اکٹوبر2013ء

SCERT TELANGANA

دیباچہ

ہم امید کرتے ہیں کہ حساب کے سیکھنے کا عمل دسویں جماعت کے تمام طلباء کے لیے بھی جاری رہے گا۔ تاہم بعض بچے ایسے ضرور ہوں گے جن کے لئے مدرسہ کا یہ آخری سال ہوگا۔ لہذا یہ امر اہمیت رکھتا ہے کہ بچے اس اعتماد کے ساتھ ثانوی سطح کی تعلیم ختم کریں کہ اپنے تجربات کو مجتمع کرتے ہوئے تعلیم کے حصول میں اپنے ذوق کو قائم رکھنے کی غرض سے حساب کے مضمون کو بروئے کار لائیں۔

ثانوی سطح تک یہ مضمون سب کے لیے لازمی ہے۔ اور اسی لیے اسکولی تعلیم کے لیے بھی اسے ضروری حصہ کے طور پر شامل کیا گیا ہے لیکن دور حاضر میں حساب سیکھنے سے بچوں اور بڑوں میں نہ ہی وہ اطمینان پیدا ہوتا ہے اور نہ ہی اعتماد؛ جو کہ مطلوب ہے۔ یہ خیال کیا جاتا ہے کہ حساب بہت ہی مشکل مضمون ہے اور محض بہت کم لوگ ہی اسے سیکھ سکتے ہیں۔ صرف بچے اور اساتذہ ہی نہیں بلکہ سارا سماج ہی اس سے خائف نظر آتا ہے۔ ایسے حالات میں جبکہ حساب ہماری زندگی میں زیادہ اہم ہوتا جا رہا ہے اور اعلیٰ تعلیم کے لیے اک جزولانیفک ہے؛ اس سے یہ خوف سی کیفیت ختم کرنا ضروری ہے۔ اسکول انتظامیہ کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ بچوں میں اسے سیکھنے اور اسے روبہ عمل لانے کی صلاحیت اور اہلیت پیدا کرے کمرہ جماعت میں ہی وہ ریاضی سے خائف نہ ہوں بلکہ دنیا کا اپنے طور پر فہم کرنے کی خاطر اس کے نظریات اور اسکے منشاء کو وسیع تر انداز میں بروئے کار لائیں۔

دور حاضر میں حساب کی تدریس کو جن چیالنجوں کا سامنا ہے ان میں سے ایک یہ ہے کہ اس مضمون کی توجیح کس ڈھنگ سے کی گئی ہے۔ اس کا تصور اعداد، پیچیدہ عمل، ایکدوسرے سے مربوط محسوبات، توضیحات، ان کے پیچیدہ حل کو مختصر طریقوں تک ہی محدود کر دیا گیا ہے۔ حساب کی تدریس میں شعوری یا لاشعوری طور پر یہ غلط فہمی پیدا کر دی گئی ہے کہ کسی مسئلہ کو حل کرنے کا ایک ہی طریقہ ہوسکتا ہے اور یہ کہ اس مضمون میں کسی مسئلہ کے حل کے متعدد طریقے ممکن نہیں۔

اس کتاب کے ذریعہ ہم سوالات کو مختلف انداز میں حل کرنے کی ضرورت پر زور دینا چاہتے ہیں یہ واضح کرنا چاہتے ہیں کہ حساب وہ مضمون ہے جس میں امکانات تلاش کئے جاتے ہیں، نظریات کی ہم آہنگی کھوجی جاتی ہے اور منطقی انجام کی کڑیاں جوڑی جاتی ہیں۔ ہم اساتذہ سے یہ توقع رکھتے ہیں کہ وہ بچوں میں کتاب کے مطالعہ کا ماحول پیدا کرتے ہوئے مختلف تصورات کا اپنے طور پر فہم پیدا کرنے اور ان کی توجیحات مدون کرنے میں وہ طلباء مددگار ثابت ہونگے۔ اساتذہ سے یہ امید بھی وابستہ کی جاتی ہے کہ وہ بچوں میں، کسی مسئلہ کے مختلف النوع حل کھوجنے، آگہی پیدا کریں۔ یہ کتاب اس انداز میں پر تیار کی گئی ہے کہ بچوں میں گروپس کی شکل میں حساب سیکھنے کا رجحان پیدا ہو اور وہ حسابی مسئلوں کو اجتماعی طور پر حل کرنے کی کوشش کریں۔ ہم چاہتے ہیں کہ مضمون سے متعلق اپنے خیالات کا تبادلہ کریں اور یہ کہ جو کچھ بھی انہوں نے سیکھا ہے اس کی بنیاد پر مسئلے مدون کریں۔ درس و تدریس سے وابستہ ہر فرد پر یہ فرض عائد ہوتا ہے کہ وہ اس امر کو پہچانے کہ حساب، دیگر کی جانب سے تدوین کردہ مسائل کو حل کرنے یا ان کی جانب سے طریقوں اور ثبوتوں کو سیکھنے سے ہی عبارت نہیں ہے بلکہ مزید تحقیق اور ٹھوس شواہد کی فراہمی پر زور دیتا ہے۔ حساب کرنا اور سیکھنا وہ کام ہے جس میں ہر ایک فرد اپنی توصیحات واضح کرے اور خود اپنے قواعد ترتیب دے۔

یاد رہے کہ دسویں جماعت ثانوی تعلیم کا آخری سال ہوتا ہے اور مرحلہ تک پہونچتے پہونچتے طلباء سے امید کیجاتی ہے تعلیم کے تئیں اپنے نظریات کا ایک خاکہ بنالیا ہوگا۔ یقیناً انہوں نے یہ بھی سیکھ لیا ہوگا کہ حساب ان حقائق پر مشتمل ہوتا ہے کہ جنہیں زندگی کے کسی بھی شعبہ میں روبہ عمل لایا جاسکتا ہے تاہم یہ ضروری نہیں کہ روزمرہ زندگی سے حسابی نظریات اجاگر ہوں۔ بچوں سے یہ توقع کیجاتی ہے کہ ثبوت کی فراہمی کے نظریہ کی اہمیت کو جانیں اور محسوس کریں کہ مثال قائم کردینا ہی ثبوت کی فراہمی کا متبادل نہیں ہوسکتا۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے 2020-21

SCERT TELANGANA

حساب کے مقصد جیسا کہ ہم نے دیباچہ کے علاوہ کتاب کے مختلف مقامات پر اجاگر کرنے کی کوشش کی ہے' انسانی تجربات کو ریاضیاتی کھوج تک وسعت دینا ہے۔اس کا یہی مطلب ہوگا کہ طلباء کمرہ جماعت میں سیکھے ہوئے نظریات کو اپنے ذاتی تجربات کے آئینے میں دیکھنے کی کوشش کریں گے بہ الفاظ دیگر وہ ان نظریات کو بروئے کار لاتے ہوئے اپنے تجربات کو مربوط کریں گے۔اس کے لیے ضرورت ہے کہ وہ اپنے اطراف واکناف کے مشاہدات وحالات پر ریاضیاتی نقطہ نگاہ سے غور کریں اور انہیں اپنے نظریات کے اظہار اور نئی تاویلات کا موقع فراہم ہوسکے۔واضح رہے کہ ہم نے ہمیشہ ہی سے زبان دانی اور ریاضی کے راست تعلق کی اہمیت اجاگر کی ہے۔یہی وجہ ہے کہ بچوں کو زبان کے موزوں استعمال کے ذریعہ اپنے خیالات کے اظہار کا بھرپور موقع فراہم کرنے کی وکالت کی جائے۔خصوصاً کمرہ جماعت میں اس امر کا خاص خیال رکھا جائے۔ہم نے اس کتاب میں زبان کو آسان بنانے کی کوشش کی ہے تاکہ اک طالب علم مطلوبہ درسی تصورات کا کامل فہم کرسکے۔ہم اساتذہ اوران تمام سے جو جانچ کے امور کے ذمہ دار ہوں امید کرتے ہیں کہ وہ اس جذبہ کا احترام کریں گے۔یہ کتاب وسیع تر مشاہدات سے ہی اپنی تکمیل کو پہونچی ہے اور اس سلسلہ میں ہم ان تمام کے مشکور ہیں جنہوں نے کتاب کی تیاری میں تعاون واشتراک کیا ہے مصنفین نے کتاب کو موجودہ شکل دینے کے لیے مشقت اٹھائی ہے ہم ان سب کے سپاسگزار ہیں اور توقع کرتے ہیں تمام ہی استفادہ کنندگان اس سلسلہ میں اپنی تجاویز اور آراء سے نوازیں گے۔

فقط

ٹکسٹ بک ڈیولپمنٹ کمیٹی

SCERT TELANGANA

باب نمبر	باب	پیریڈ کی تعداد	نصاب کی تکمیل	صفحہ نمبر
01	حقیقی اعداد	15	جون	1-27
02	سٹس	08	جون	28-50
03	کثیر رکنیاں	08	جولائی	51-76
04	دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ	15	ستمبر	77-104
05	دو درجی مساواتیں	12	اکٹوبر	105-128
06	تصاعد	11	جنوری	129-162
07	تحلیلی جیومٹری	12	نومبر	163-194
08	مشابہہ مثلثات	18	جولائی/اگست	195-228
09	دائرے کے مماس اور خطوط قاطع	15	نومبر	229-248
10	مساحت	10	ڈسمبر	249-272
11	علم مثلث (Trigonometry)	15	اگست	273-297
12	علم مثلث کا اطلاق	08	ستمبر	298-308
13	قیاسیات	10	جنوری	309-326
14	شماریات	15	جولائی	327-356
ضمیمہ	ریاضیاتی ماڈلنگ	08	جنوری	357-369
	جوابات			370-388
	اعادہ		فروری	

SCERT TELANGANA

قومی ترانہ

– رابندرناتھ ٹیگور

جن گن من ادھی نایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا، ڈراوڑ، اتکل، ونگا
وندھیا، ہماچل، یمنا، گنگا، اُچ چھل جل دھی ترنگا
تواشبھ نامے جاگے، تواشبھ آشش ماگے
گاہے توجیا گاتھا
جن گن منگل دایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
جیا ہے، جیا ہے، جیا ہے
جیا جیا جیا جیا ہے

– پئی ڈیمرّی وینکٹاسبّاراوَ

عہد

ہندوستان میرا وطن ہے۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے اور میں اس کے عظیم اور گونا گوں ورثے پر فخر کرتا ہوں/کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا/کرتی رہوں گی۔ اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا/کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا/کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ رکھوں گا/رکھوں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں/کرتی ہوں۔

SCERT TELANGANA

باب
1

حقیقی اعداد
Real Numbers

1.1 تمہید/تعارف

”خدا نے صحیح اعداد بنائے ہیں۔ مابا قی تمام انسان کا کام ہے“

لیو پولڈ کرانیکر

زندگی اعداد سے بھری پڑی ہے۔اس لمحہ کا تصور کیجیے جب آپ تولد ہوئے تھے ممکن ہے آپ کے والدین آپ کی ولادت کا وقت' آپ کا وزن' آپ کا قد' درج کیا ہوگا۔اور خاص کر آپ کے ہاتھ کی انگلیوں اور پیر کی انگلیوں کی گنتی کی ہوگی۔اعداد ہماری زندگی کے ساتھ جڑے ہیں۔

دوسرے پس منظر کیا ہو سکتے ہیں جہاں آپ کو اعداد سے سابقہ پڑتا ہے۔

ہم اعداد کا استعمال عمر کے اظہار کے لیئے' کمائی کے شمار کے لیئے' آمدنی میں خرچ کے بعد بچت کے لیے کرتے ہیں۔ہم اپنی دولت کی بھی پیمائش کرتے ہیں۔

اس باب میں ہم اعداد کے مزید چند تصورات کی وضاحت کرتے ہیں۔ریاضی میں اعداد بنیادی رول ادا کرتے ہیں۔ہم اعداد کی وسعت اور گہرائی کی حیرت انگیز صفات کو دیکھتے ہیں۔چند اعداد آپس میں اس طرح جڑتے ہیں کہ اس میں اعداد کی خوبصورتی نظر آتی ہے۔

آیئے ایک معمہ (Puzzle) پر غور کریں:

باغ میں سیر کرنے کے دوران آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ شہد کی مکھیوں کا جھنڈ پھولوں پر بیٹھتا ہے۔اگر شہد کی مکھیوں کا جھنڈ 2 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتا ہے تب ایک شہد کی مکھی باقی رہ جاتی ہے۔اگر وہ مساوی تعداد میں تین پھولوں پر بیٹھتے ہیں تو دو مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں۔اور اگر شہد کی مکھیاں 4 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتی ہیں تو باقی 3 رہ جاتی ہیں۔اور اسی طرح وہ 5 پھولوں پر مساوی تعداد میں بیٹھتی ہیں تب کوئی مکھی باقی نہیں رہتی ہے۔

جھنڈ میں مکھیوں کی تعداد کتنی ہے؟

آیئے اس مسئلہ کا تجزیہ کریں اور حل کریں۔

فرض کیجیے کہ مکھیوں کی تعداد 'x' ہے۔تب ہم دیکھتے ہیں کہ $x \leq 50$

اگر مکھیوں کے جھنڈ کو 5 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو' کوئی مکھی باقی نہیں رہ جاتی۔جو ظاہر کرتا ہے کہ $x=5a+0$ کسی طبعی اعداد 'a' کے لیے۔

SCERT TELANGANA

اگر شہد کی مکھیوں کے جھنڈ کو 4 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو 3 مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں۔ تب اس کو کسی طبعی اعداد b ‘ کے لیے x=4b+3 کی ترجمانی کرتا ہے۔

اگر شہد کی مکھیوں کے جھنڈ کو 3 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو 2 مکھیاں باقی رہ جاتی ہیں تب اس کو کسی طبعی عدد C کے لیے x=3c+2 کی ترجمانی کرتا ہے۔

اگر جھنڈ کو 2 مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو تب 1 مکھی باقی رہ جاتی ہے۔ یہ تب اس کو کسی طبعی اعداد d کے لیے x=2d+1 کی ترجمانی کرتا ہے۔

یعنی ہر صورت میں ہمیں ایک مثبت صحیح عدد y حاصل ہوتا ہے۔ (اس مثال میں y کی قدر ترتیب وار 5 ‘4 ‘3 اور 2 ہے۔) جو x کو تقسیم کرتا ہے اور r باقی رہ جاتا ہے (اس صورت میں r کی قدر ترتیب وار 0 ‘3 ‘2 اور 1 ہیں) یعنی y سے چھوٹے ہیں۔

مندرجہ بالا مساوات لکھنے کے دوران ہم غیر ارادی طور پر الگورتھم نظریہ تقسیم کا استعمال کئے ہیں۔

آیئے ہمارے مسئلہ کی جانب اس مسئلے کو حل کرنے کے لیے ہمیں 5 کے ضعف پر غور کرنا ہوگا جو تمام شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ کیونکہ x=5a+0 ہے۔

اگر کسی عدد کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 رہ جاتا ہے تب ہمیں صرف طاق ضعف پر غور کرنا ہوگا۔

اس صورت میں 5 ‘15 ‘25 ‘35 اور 45 وغیرہ ہیں۔ اسی طرح اگر ہم مابقی دو صورتوں پر غور کریں تب صرف عدد 35 حاصل ہوگا۔

اس طرح شہد کی مکھیوں کے جھنڈ میں 35 مکھیاں ہیں۔

آیئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

35 کو 2 سے تقسیم کرنے پر باقی 1 رہیگا۔ اس کو اسطرح لکھتے ہیں

$$35=(2\times17)+1$$

35 کو 3 سے تقسیم کرنے پر باقی 2 رہیگا۔ اس کو اسطرح لکھتے ہیں

$$35=(3\times11)+2$$

35 کو 4 سے تقسیم کرنے پر باقی 3 رہیگا۔ اس کو اسطرح لکھتے ہیں

$$35=(4\times8)+3$$

اور جب 35 کو 5 سے تقسیم کرتے ہیں تب باقی صفر '0' رہ جاتا ہے۔ اس کو اسطرح لکھتے ہیں

$$35=(5\times7)+0$$

آیئے نتیجہ اخذ کریں ‘ کوئی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے (جو بالترتیب مقسوم اور مقسوم علیہ ہیں) ہم کو q اور r مکمل اعداد حاصل ہوتے ہیں (بالترتیب خارج قسمت اور باقی) جو اس رشتہ کو مطمئن کرتا ہے $a = bq + r, o \le r \le b$

یہ کیجیے

دیے گئے مثبت صحیح اعداد 'a' اور 'b' کے جوڑ کے لیے 'q' اور 'r' معلوم کیجیے جو مساوات $a = bq + r$ کو مطمئن کرتے ہیں

(i) $a=13$,$b=3$ (ii) $a=80$,$b=8$

(iii) $a=125$,$b=5$ (iv) $a=132$, $b=11$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مندرجہ بالا یہ کیجیے کے تحت دیے گئے سوالات میں q اور r کی فطرت کیا ہے؟

مسئلہ 1.1: (تقسیمی الگورتھم Division Algorithm)

دیے گئے مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے q اور r ایک منفرد جوڑ پایا جاتا ہے جو $a = bq + r$، $0 < r < b$ کو مطمئن کرتا ہے اس کے نتیجہ کو پہلی مرتبہ اقلیدس کی کتاب (Euclids Element) کے ساتویں باب میں درج کیا گیا تھا۔ اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم اس نظریہ پر منحصر ہے۔

اقلیدس کے تقسیم کا الگورتھم ایک حکمت عملی ہے جس سے دو صحیح اعداد کا عاد اعظم مشترک (HCF) معلوم کیا جاتا ہے دو مثبت صحیح اعداد a اور b کا عاد اعظم مشترک بڑے سے بڑا مثبت عدد d ہوتا ہے جو a اور b دونوں کو تقسیم کرتا ہے۔

آیئے دو اعداد 60 اور 100 کا عاد اعظم مشترک ذیل کے مشغلے سے معلوم کریں گے۔

مشغلہ

60 سمر عرض اور 100 سمر طول والے دو کاغذ کی پٹیاں لیجیے ہمارا مقصد ایسی پٹی کا طول معلوم کرنا ہے جو ان دونوں پٹیوں کی مکمل طور پر پیمائش کر سکے۔

60 سمر کی پٹی لیجیے اور اس سے 100 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے باقی بچی ہوئی 40 سمر کی پٹی کاٹ لیجیے اور اس 40 سمر کی پٹی سے 60 سمر کی پٹی کی پیمائش باقی بچی ہوئی 20 سمر کی پٹی کاٹ لیجیے اب یہ 20 سمر کی پٹی لیجیے اور 40 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے۔ باقی بچی ہوئی پٹی کاٹ لیجیے اور پہلے سے موجود 20 سمر کی پٹی کی پیمائش کیجیے جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے یعنی کوئی حصہ باقی نہیں بچا۔

لہٰذا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔ 20 سمر کی پٹی وہ بڑی وہ بڑی سے بڑی پٹی ہے جو دی گئی دونوں پٹیوں 60 سمر اور 100 سمر کی پیمائش کرتی ہے اور کوئی بھی حصہ باقی نہیں رہتا ہے۔

SCERT TELANGANA

آیئے عدد 60اور 100 کا عاد اعظم مشترک معلوم کرنے کے لیے مشغلہ میں موجود طریقہ کو اقلیدس کے نظریہ سے مربوط کریں۔

عدد 100 کو 60 سے تقسیم کرنے پر باقی 40 رہے گا۔

$$100=(60\times1)+40$$

اب 60 کو باقی عدد 40 سے تقسیم پر غور کریں اور اس پر اقلیدس کا نظریہ تقسیم کا اطلاق کریں۔

$$60=(40\times1)+20$$

اب عدد 40 کو باقی عدد 20 سے تقسیم پر غور کریں اور اس پر اقلیدس کا نظریہ تقسیم کا اطلاق کریں

$$40=(20\times2)+0$$

غور کیجیے کہ باقی '0' ہے۔اب ہم عمل کو آگے نہیں بڑھا سکتے ہیں۔

اس مرحلے میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ 60اور 100 کا عاد اعظم مقسوم علیہ یعنی 20 ہے۔

(آپ 60اور 100 کے تمام اجزائے ضربی لکھ کر اس کی تصدیق کر سکتے ہیں)

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ عاد اعظم مشترک معلوم کرنے کے لیے متعینہ مراحل کا سلسلہ ہے۔لہٰذا آیئے اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کی واضح تعریف کریں۔

دو مثبت صحیح اعداد مثلاً c اور d جہاں $c>d$ کا ع۔ا۔م (HCF) معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل مراحل کو اپنایئے۔

مرحلہ 1: c اور d کو اقلیدس کا نظریہ تقسیم استعمال کیجیے ہمیں صحیح اعداد کا ایک واحد جوڑ q اور r حاصل ہوتا ہے اس طرح کو $C=dq+r$، $0\leq r<d$

مرحلہ 2: اگر r=0 ہو تو d اور C کا ع۔ا۔م d ہے۔اگر $r\neq0$ تو d اور r کے لیے اقلیدس کا نظریہ تقسیم استعمال کیجیے۔

مرحلہ 3: اس مرحلے کو اس وقت تک جاری رکھیے جب تک کہ باقی صفر (0) حاصل نہ ہو اس مرحلے پر مقسوم علیہ مطلوبہ ع۔ا۔م ہوگا۔

یہ الگورتھم استعمال ہوتا ہے کیونکہ HCF(c,d)=HCF(d,r) جہاں علامت HCF(c,d) کا مطلب دو مثبت صحیح اعداد c اور d کا HCF ہے۔

یہ کیجیے

اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کا عاد اعظم مشترک معلوم کیجیے

(i) 50 اور 70 (ii) 72 اور 96 (iii) 550 اور 300 (iv) 2015 اور 1860

SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

کیا آپ 1.2 اور 0.12 کا عاد اعظم مشترک معلوم کر سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

اقلیدس کے تقسیم کا الگورتھم بڑے اعداد HCF معلوم کرنے کیلئے کار آمد ہے بلکہ کمپیوٹر کے استعمال میں بھی کار آمد ہے۔

تبصرہ

1. اقلیدس کا نظریہ تقسیم اور الگورتھم ایک دوسرے سے بہت ہی زیادہ تعلق رکھتے ہیں۔ لوگ اکثر اقلیدس کے نظریہ تقسیم کو اقلیدس کا الگورتھم بھی کہتے ہیں۔

2. اقلیدس کا نظریہ تقسیم صرف مثبت صحیح اعداد کے لیے ہے اس کو تمام صحیح اعداد a اور b جہاں $b \neq 0$ کے لیے وسعت دی جاسکتی ہے۔ اس تعلق سے ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔

اعداد کی خصوصیات کے متعلق اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے کئی استعمالات ہیں۔ مندرجہ ذیل میں الگورتھم کے اطلاق کی چند مثالیں دیتے ہیں۔

مثال 1. ثابت کیجیے کہ ہر مثبت جفت صحیح عدد 2q کی شکل میں ہوتا ہے' اور ہر مثبت طاق صحیح عدد 2q+1 کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں 'q' ایک صحیح عدد ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ a ایک مثبت صحیح عدد ہے اور b=2 تب اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کے رو سے $a = 2q + r$ چند صحیح اعداد $q \geq 0$ اور r=0 یا r=1 ' چونکہ $0 \leq r < 2$ اس لیے a=2q یا a=2q+1

اگر a، 2q کی شکل میں ہو تب a ایک جفت صحیح عدد ہے۔ اور ایک مثبت صحیح عدد یا تو جفت یا طاق ہو سکتا ہے۔ اس طرح ایک مثبت طاق عدد 2q+1 کی شکل میں ہوتا ہے۔

مثال 2. ثابت کیجیے کہ ہر ایک مثبت طاق صحیح عدد 4q+1 یا 4q+3 کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں q چند صحیح اعداد ہیں۔

حل: فرض کیجیے کہ 'a' مثبت طاق صحیح عدد ہے۔ اور b=4 ہم تقسیم کے الگورتھم کا اطلاق a اور b=4 پر کرتے ہیں۔ a=4q+r تمام $q \geq 0$ اور $0 \leq r < 4$ ممکنہ باقی 0' 1' 2 یا 3 ہو سکتے ہیں۔

اس طرح a' 4q یا 4q+1 یا 4q+2 یا 4q+3 ہو سکتا ہے۔ جہاں q خارج قسمت ہے۔ چونکہ 'a' طاق ہے۔ 'a' 4q=2(2q) اور 4q=2(2q+1) نہیں ہو سکتا (چونکہ دونوں بھی عدد 2 سے قابل تقسیم ہیں)

اس لیے کوئی بھی طاق صحیح عدد 4q+1 یا 4q+3 کی شکل میں ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

مشق 1.1

1. اقلیدس کے تقسیمی الگورتھم کے استعمال سے عاد اعظم مشترک معلوم کیجیے۔

(i) 270 اور 900 (ii) 38220 اور 196 (iii) 2032 اور 1651

2. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کوئی بھی طاق صحیح عدد 6q+1 یا 6q+3 یا 6q+5 کی شکل میں ہوتا ہے۔ جہاں q ایک صحیح عدد ہے۔
3. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا مربع 3p ، 3p+1 کی شکل میں ہوتا ہے
4. اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ کسی بھی مثبت صحیح عدد کا مکعب 9m ، 9m+1 یا 9m+8 کی شکل میں ہوتا ہے۔
5. ثابت کیجیے کہ n ، n+2 یا n+4 میں صرف اور صرف ایک ہی عدد 3 سے قابل تقسیم ہے جہاں n کوئی بھی مثبت صحیح عدد ہے۔

1.2 حساب کا بنیادی مسئلہ (The fundamental Theorem of Arithemetic)

اقلیدس کے نظریہ تقسیم سے مثبت صحیح عدد a اور b کے لیے ایک منفرد صحیح عدد کا جوڑ q اور r وجود رکھتا ہے۔ جو ذیل کو مطمئن کرتا ہے

$$a = bq + r \qquad 0 \le r < b$$

سوچیے - تبادلہ خیال کیجیے

اگر r=0 ہو تب اقلیدس کے نظریہ تقسیم کے تحت a=bq+r میں a ، b اور q کے درمیان کیا رشتہ ہے۔

مندرجہ بالا تبادلہ خیال سے آپ اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ اگر a=bq ، a سے b تقسیم پذیر ہے تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ b ، a کا جز ضربی ہے۔

مثلاً: ہم جانتے ہیں کہ

$$24 = 2\times 12$$

$$24 = 2\times 2\times 6$$

$$= 2\times 2\times 2\times 3$$

ہم جانتے ہیں کہ اگر 24=2×12 تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ 2 اور 12 ، 24 کے اجزائے ضربی ہیں۔

ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں 24=2×2×2×3 اور آپ جانتے ہیں کہ یہ 24 کے مفرد اجزائے ضربی ہیں۔

SCERT TELANGANA

آیئے کوئی بھی مفرد اعداد لیں جیسے 2,3,7,11اور 23۔ اگر ہم ان میں چند یا تمام کو جتنی مرتبہ چاہیں دہراتے ہوئے ضرب دیں تو ہمیں لامتناہی بڑے مثبت صحیح اعداد حاصل ہوتے ہیں۔ آیئے غور کریں۔

$7\times11\times23=1771$ $\qquad$ $2\times3\times11=66$

$3\times7\times11\times23=5313$ $\qquad$ $2\times3\times7\times11\times23=10626$

$2^3\times3\times7^3=8232$ $\qquad$ $2^2\times3\times7\times11\times23=21252$

اب فرض کیجیے کہ آپ کے مفرد اعداد کے مجموعہ میں تمام ممکنہ مفرد اعداد شامل ہیں۔ ہم دو یا دو سے زائد مفرد اعداد اس مجموعے سے لے کر ضرب دیتے ہیں۔ کیا ہمیں مفرد عدد حاصل ہوگا؟ یا ہمیں غیر مفرد عدد حاصل ہوگا۔ اس طرح، اگر ہم تمام مفرد اعداد کو ممکنہ طریقوں سے ضرب دیتے ہیں تب ہم کو غیر مفرد اعداد کا لامتناہی مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔ آیئے اس بیان کے برعکس بیان پر غور کرتے ہیں اگر ہم ایک مرکب عدد لیتے ہیں تب اس کو کیا مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھ سکتے ہیں؟ ذیل کا نظریہ اس سوال کا جواب دیتا ہے۔

مسئلہ 1.2: (حساب کا بنیادی مسئلہ):

(غیر مفرد اعداد) کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے اجزائے ضربی کا یہ عمل یکتا یا منفرد (Unique) ہوتا ہے۔ جفت اجزائے ضربی کی ترتیب چاہے کچھ بھی ہو۔

اس طرح دیے گئے کسی بھی غیر مفرد عدد کے لیے، مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرنے کا صرف اور صرف ایک ہی طریقہ ہے جب تک کہ ہم یقینی طور پر مفرد اعداد کے تسلسل کی وضاحت نہیں کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر ہم 210 کے اجزاء بناتے ہیں اس طرح $2\times3\times5\times7$ جیسا کہ $3\times5\times7\times2$ یا کوئی بھی ممکنہ تسلسل جس میں یہ مفرد اعداد موجود ہوں۔

اس طرح دیے گئے غیر مفرد عدد x کو ہم اس طرح سے اجزاء بناتے ہیں $x = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times\ldots\ldots\ p_n$

جہاں $p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots\ p_n$ مفرد عدد ہیں جنہیں اس کو نزولی ترتیب جیسا کہ $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots\ldots\ p_n$ میں لکھا جاتا ہے

جب ہم مساوی مفرد اعداد کو جوڑتے ہیں ہم کو مفرد اعداد کے قوت نما حاصل ہوتے ہیں۔ جب ہم یقین کرلیتے ہیں کہ اعداد کا نزولی تسلسل ہے اس طرح اجزاء میں تبدیلی ہونے والا عدد ایک منفرد عدد ہے۔ مثلاً

$$27300 = 2\times2\times3\times5\times5\times7\times13 = 2^2\times3\times5^2\times7\times13$$

یہ کیجیے

2310 کو مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیجیے۔ اور غور کیجیے کہ آپ کے ساتھی اس عدد کے اجزاء کس طرح کرتے ہے۔ کیا انہوں نے آپ ہی کی طرح کیے ہیں۔ آپ کے نتیجہ کو دوست کے حاصل ضرب کے طریقے سے جانچ کیجیے۔ اس کو مزید 3 یا 4 اعداد لے کر کوشش کیجیے۔ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

آیئے حساب کے بنیادی مسئلہ کا اطلاق کریں۔

SCERT TELANGANA

مثال 3۔ عدد 4^n پر غور کیجیے۔ جہاں پر 'n' ایک طبعی عدد ہے۔ جانچ کیجیے کہ آیا 'n' کی کوئی ایسی قدر ہے جس کے لیے 4^n صفر ہندسہ پر ختم ہوتا ہے؟

حل: کسی بھی طبعی عدد 'n' کے لیے 4^n صفر پر ختم ہونے کے لیے ضروری ہے کہ وہ 2 اور 5 سے قابل تقسیم ہو۔ یعنی 4^n کے مفرد اجزائے ضربی میں مفرد عدد 2 اور 5 موجود ہونا چاہیے لیکن یہ ممکن نہیں ہے کیونکہ $4^n = (2)^{2n}$ لہٰذا عدد 4^n کے اجزائے ضربی میں صرف مفرد عدد 2 واقع ہے عدد 5 نہیں ہے۔ اس طرح کسی طبعی عدد n کے لیے '4^n' ہندسہ صفر پر ختم نہیں ہوتا ہے۔

آپ نے حساب کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے دو مثبت صحیح اعداد کا H.C.F اور L.C.M معلوم کرنے کا طریقہ پچھلی جماعتوں میں سیکھ چکے ہیں۔ لیکن آپ اس مسئلہ سے واقف نہیں تھے اسی طریقہ کار کو مفرد اجزائے ضربی کا طریقہ بھی کہا جاسکتا ہے آیئے مندرجہ ذیل مثال کے ذریعہ اس کا اعادہ کریں۔

مثال 4:۔ اعداد 12 اور 18 کا HCF اور LMC مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے پر معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $12=2\times2\times3=2^2\times3^1$

$18=2\times3\times3=2^1\times3^2$

غور کریں کہ (12,18) کا H.C.F $= 6 = 2^1 \times 3^1 =$ (دیے گئے اعداد کے مفرد اجزائے ضربی میں مشترک سب سے چھوٹے قوت نما والے اعداد کا حاصل ضرب)

L.C.M 12'18 $= 2^2\times3^2=36 =$ (دیے گئے اعداد کے مفرد اجزائے ضربی میں بڑی قوت نما والے اعداد کا حاصل ضرب)

مندرجہ بالا مثال میں آپ مشاہدہ کرچکے ہیں کہ $12 \times 18 =$ H.C.F (12,18)× L.C.M(12,18)

حقیقتاً کوئی بھی دو مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے a×b=ذ۔ا۔م (a,b) H.C.F×(a,b)

اس ضابطہ کی مدد سے اگر دو اعداد کا H.C.F دیا گیا ہے تب L.C.M معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں دی گئی اعداد کی جوڑیوں کے HCF اور L.C.M مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(i) 120, 90 (ii) 50, 60 (iii) 37, 49

کوشش کیجیے

بتلایئے کہ کسی بھی دو طبعی عدد n اور m کے لیے '$3^n\times4^m$' صفر اور 5 پر ختم نہیں ہوتے ہیں

SCERT TELANGANA

مشق 1.2

1۔ مندرجہ ذیل میں دیے گئے اعداد کو مفرد اجزائے ضربی کے ضرب کی شکل میں ظاہر کیجیے

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2۔ مندرجہ ذیل اعداد کے L.C.M اور H.C.F مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(i) 12,15 اور 21 (ii) 17,23 اور 29 (iii) 8,9 اور 25 (iv) 72 اور 108 (v) 306 اور 657

3۔ کسی طبعی عدد 'n' کے لیے جانچ کیجیے کہ آیا 6^n کیا صفر پر ختم ہوسکتا ہے؟

4۔ وضاحت کیجیے کہ کیوں $7\times11\times13+13$ اور $7\times6\times5\times4\times3\times2\times1+5$ مرکب اعداد (غیر مفرد اعداد) ہیں؟

5۔ آپ کس طرح ثابت کریں گے کہ $(17\times11\times2)+(17\times11\times5)$ ایک مرکب عدد (غیر مفرد عدد) ہے؟ سمجھایئے

6۔ 6^{100} کا اکائی ہندسہ کیا ہوگا۔

آیئے حقیقی اعداد کی مزید وضاحت کے لیے حساب کے بنیادی مسئلہ کا اطلاق کریں۔ پہلے ہم اس مسئلہ کو اس وقت تک اطلاق کریں گے جب ناطق اعداد کی اعشاری شکل مختتم ہے۔اور غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہے۔

دوسرا، اس مسئلہ کو غیر ناطق اعداد جیسے $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ اور $\sqrt{5}$ کو ثابت کرنے کے لیے بھی استعمال کرتے ہیں۔

1.2.1 ناطق اعداد اور ان کا اعشاری پھیلاؤ

پچھلی جماعتوں میں ہم صحیح اعداد کے چند خصوصیات پر گفتگو کیے ہیں۔ دیے گئے صحیح اعداد میں پس رو اور پیش رو اعداد آپ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں؟ آپ اعادہ کر چکے ہیں ایک صحیح عدد اور اس کے پس رو یا پیش رو کا فرق '1' ہوتا ہے۔اسی خصوصیت کی بناء پر آپ مطلوبہ صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

جماعت نہم میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ ناطق اعداد میں یا تو مختتم اعشاریہ شکل میں ہوتے ہیں یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ شکل میں ہوتے ہیں۔اس باب میں ہم ناطق اعداد پر غور کریں گے جیسے $\frac{p}{q}(q\neq0)$ اور یہ معلوم کریں گے کہ کب $\frac{p}{q}$ عدد مختتم اعشاری اور کب غیر مختتم تکراری اعشاری ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل کی مثالوں پر غور کریں۔

آیئے مندرجہ ذیل مختتم اعشاریہ پر غور کریں

(i) 0.375 (ii) 1.04 (iii) 0.0875 (iv) 12.5

SCERT TELANGANA

اب ان اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کریں گے۔

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $1.04 = \frac{104}{100} = \frac{104}{10^2}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^3}$ (iv) $12.5 = \frac{125}{10} = \frac{125}{10^1}$

ہم دیکھتے ہیں کہ لیے گئے تمام مختتم اعشاری اعداد کو $\frac{p}{q}$ شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔جن کے نسب نما 10 کی قوت نما والے اعداد ہیں۔

آیئے اب ہم ان کے شمارکنندوں اورنسب نماؤں کے مفرد اجزائے ضربی معلوم کرینگے اوران ناطق اعداد کی اقل ترین شکل حاصل کریں گے۔

$$0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} \quad \text{(i)}$$

$$1.04 = \frac{104}{10^2} = \frac{2^3 \times 13}{2^2 \times 5^2} = \frac{26}{5^2} = \frac{26}{25} \quad \text{(ii)}$$

$$0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{5^3 \times 7}{2^4 \times 5^4} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7}{80} \quad \text{(iii)}$$

$$12.5 = \frac{125}{10} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{25}{2} \quad \text{(iv)}$$

کیا آپ مندرجہ بالا نسب نماؤں میں پائے جانے والے اعداد میں کسی ترتیب کا مشاہدہ کیے ہیں؟ جب اعشاری اعداد کو اس کی سادہ ترین ناطق اعداد کی شکل میں ظاہر کریں تو q اور p ہم مفرد اعداد ہیں اور نسب نما میں صرف 2 کے قوت نما یا 5 کے قوت نما یا دونوں قوت نما ہیں۔ یہ اس لیے ہے کہ 10 کے صرف دو ہی مفرد اجزائے ضربی 2 اور 5 ہیں۔

مندرجہ بالا مثالوں میں آپ نے یہ مشاہدہ کیا کہ مختتم اعشاری ناطق عدد کو $\frac{p}{q}$ شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کا نسب نما 2 کا قوت نما یا 5 کا قوت نما ہوتا ہے۔لہذا q کے اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں ہوں گے جہاں پر m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں۔

مندرجہ بالا نتیجہ کو ہم اس طرح مسئلہ کی شکل میں ظاہر کرسکتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

مسئلہ - 1.3: فرض کیجیے کہ x ایک ناطق عدد ہے جس کا اعشاریہ مختتم ہے تب 'x' کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q ہم مفرد اعداد ہیں اور q کے مفرد اجزائے ضربی کی شکل 2^n5^m ہوتی ہے جہاں پر m، اور n، مثبت صحیح اعداد ہیں۔ (غیر منفی صحیح اعداد ہیں)

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل مختتم اعشاریہ کو p/q کی شکل میں لکھیے جہاں $q \neq 0$ اور p، q، ہم مفرد ہیں

(i) 15.265 (ii) 0.1255 (iii) 0.4 (iv) 23.34 (v) 1215.8

نسب نماؤں کو 2^n5^m کی شکل میں لکھیے۔

SCERT TELANGANA

آپ کو تعجب ہوگا کہ اگر ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ہے جس میں q، کے مفرد اجزائے ضرب کی شکل 2^n5^m ہو جہاں پر m، اور n، مثبت صحیح اعداد ہیں تب کیا $\frac{p}{q}$ مختتم اعشاری عدد کی شکل میں ہوگا۔؟

ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ کو جہاں پر q، کی شکل 2^n5^m ہے کو یہ معادل ناطق عدد $\frac{a}{b}$ کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں پر b، 10 کی قوت نما ہے۔ آیئے ہماری اوپر کی مثالوں پر غور کریں اور الٹا عمل کریں۔

پچھلی مثالوں پر غور کرتے ہوئے مندرجہ ذیل نتائج حاصل ہوں گے۔

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{26}{25} = \frac{26}{5^2} = \frac{13 \times 2^3}{2^2 \times 5^2} = \frac{104}{10^2} = 1.04$

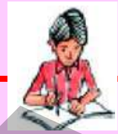
(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{25}{2} = \frac{5^3}{2 \times 5} = \frac{125}{10} = 12.5$

مندرجہ بالا مثالیں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ ہم کس طرح ناطق عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ہو جہاں q، 2^n5^m کو معادل ناطق عدد $\frac{a}{b}$ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں 'b' 10 کی قوت نما ہے۔ ایک مختتم اعشاریہ ہے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک ناطق عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل ہے، جہاں 'q' 10 کی قوت نما ہے ایک مختتم اعشاریہ ہے۔ اس طرح مسئلہ 1.3 کا برعکس مسئلہ بھی درج ہے جس کو مندرجہ ذیل طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 1.4: فرض کروکہ $x = \frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے۔اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں ہے۔ جہاں پر 'n' اور 'm' مثبت صحیح اعداد ہوں تب 'x' مختتم اعشاری عدد ہوگا۔



یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں دیے گئے ناطق اعداد کے نسب نما کو 2^n5^m کی شکل میں لکھیے جہاں پر 'n'، 'm' مثبت صحیح اعداد ہیں۔مزید ان اعداد اعشاری شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{51}{64}$ (iv) $\frac{14}{25}$ (v) $\frac{80}{100}$

1.2.2: ناطق اعداد میں 'غیر مختتم' تکراری اعشاریہ

آیئے ناطق اعداد پر غور کریں جن کے اعشاریہ پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہیں۔

آیئے $\frac{1}{7}$ کے اعشاری شکل پر غور کریں۔

$\frac{1}{7}$ =0.1428571428571............... جو کہ ایک غیر مختتم اور تکراری اعشاریہ ہے۔

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\overline{)1.0000000} \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30
\end{array}
$$

غور کیجیے خارج قسمت میں ہندسے ''142857'' دہرائے جارہے ہیں۔

نوٹ: غور کیجیے کہ نسب نما یعنی 7 'کو 2^n5^m کی شکل میں نہیں کیا جاسکتا ہے

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے اور خارج قسمت میں دہرائے جارہے ہندسے معلوم کیجیے

(i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (iii) $\frac{5}{11}$ (iv) $\frac{10}{13}$

مشق ''یہ کیجیے'' اور مندرجہ بالا مثالوں سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے

مسئلہ - 1.5: اگر $x = \frac{p}{q}$ ناطق عدد ہے اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں نہیں ہیں جہاں پر n اور m مثبت صحیح اعداد ہیں۔تب 'x' کا اعشاری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا مباحثہ سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ہر ایک ناطق اعداد کی اعشاری یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہوتی ہے۔

SCERT TELANGANA

مثال5: مندرجہ بالامسئلہ کے استعمال سے بغیر تقسیم کئے بتائیے کہ آیا دیئے گئے ناطق اعداد مختتم یا غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں۔

(i) $\frac{16}{125}$ (ii) $\frac{25}{32}$ (iii) $\frac{100}{81}$ (iv) $\frac{41}{75}$

حل:

(i) $\frac{16}{125}=\frac{16}{5\times5\times5}=\frac{16}{5^3}$ یہ ایک مختتم اعشاریہ کی شکل ہے

(ii) $\frac{25}{32}=\frac{25}{2\times2\times2\times2\times2}=\frac{25}{2^5}$ یہ ایک مختتم اعشاریہ کی شکل ہے

(iii) $\frac{100}{81}=\frac{100}{3\times3\times3\times3}=\frac{10}{3^4}$ یہ ایک غیر مختتم تکراری اعشاریہ کی شکل ہے

(iv) $\frac{41}{75}=\frac{41}{3\times5\times5}=\frac{41}{3\times5^2}$ یہ ایک غیر مختتم تکراری اعشاریہ کی شکل ہے

مثال - 6: مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{35}{50}$ (ii) $\frac{21}{25}$ (iii) $\frac{7}{8}$

حل:

(i) $\frac{35}{50}=\frac{7\times5}{2\times5\times5}=\frac{7}{2\times5}=\frac{7}{10^1}=0.7$

(ii) $\frac{21}{25}=\frac{21}{5\times5}=\frac{21\times2^2}{5\times5\times2^2}=\frac{21\times4}{5^2\times2^2}=\frac{84}{10^2}=0.84$

(iii) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2\times2\times2}=\frac{7}{2^3}=\frac{7\times5^3}{(2^3\times5^3)}=\frac{7\times25}{(2\times5)^3}=\frac{875}{(10)^3}=0.875$

مشق - 1.3:

1۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں لکھیے اور ان میں کونسے مختتم اور غیر مختتم تکراری اعشاری ہیں؟ معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{229}{400}$ (iii) $4\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{2}{11}$ (v) $\frac{8}{125}$

2۔ مندرجہ ذیل میں دیے گئے ناطق اعداد بغیر تقسیم کیے کہ بتائیے کہ کونسے مختتم اعشاری ہیں اور کونسے غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں۔

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{9}{15}$ (ix) $\frac{36}{100}$ (x) $\frac{77}{210}$

SCERT TELANGANA

3۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو مسئلہ 1.4 کے استعمال کرتے ہوئے اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{13}{25}$ (ii) $\frac{15}{16}$ (iii) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (iv) $\frac{7218}{3^2.5^2}$ (v) $\frac{143}{110}$

4۔ مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجیے۔ q کے مفرد اجزائے ضربی لکھیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

(i) 43.123 (ii) 0.120112001120001... (iii) $43.\overline{12}$ (iv) $0.\overline{63}$

1.3 غیر ناطق اعداد Irrational Numbers

جماعت نہم میں آپ غیر ناطق اعداد اور ان کے چند خصوصیات کے بارے میں پڑھ چکے ہیں آپ ان اعداد کی وجودیت کے بارے میں اور کس طرح ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد بناتے ہیں۔ پڑھ چکے ہیں کہ حتیٰ کہ آپ غیر ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ حالانکہ ہم ثابت نہیں کیے کہ یہ غیر ناطق ہیں۔ اس باب میں ہم ثابت کریں گے کہ عموماً $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ اور $\sqrt{p}$ غیر ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ جہاں پر p مفرد عدد ہے۔ ثابت کرنے کے لیے ہم بطور مسئلہ ''حساب کا بنیادی مسئلہ'' استعمال کرتے ہیں۔

اعادہ کیجیے کہ ایک حقیقی عدد غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔ اگر اسکو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھا جا سکتا۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ کہ۔ چند غیر ناطق عدد جن سے آپ واقف ہیں جیسے $0.10110111011110.........,-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\pi,\sqrt{15},\sqrt{3},\sqrt{2}$ وغیرہ۔

$\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے ثابت کرنے سے پہلے ایک نظر اس بیان پر ڈالیں گے جس کو حساب کا بنیادی مسئلہ کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 1.6: فرض کیجیے کہ 'p' ایک مفرد عدد ہے اگر 'p' a^2 کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے (جہاں 'a' ایک مثبت صحیح عدد ہے) تب 'p'، 'a' کو بھی مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

ثبوت: فرض کیجیے کہ a کے مفرد اجزائے ضربی اس طرح $a = p_1, p_2, ...p_n$

جہاں پر $p_1, p_2, ...p_n$ مفرد اعداد ہیں۔ اور یہ ضروری نہیں کہ یہ تمام متفرق نہ ہوں۔

$$a^2 = (p_1, p_2, ...p_n)(p_1, p_2, ...p_n) = p_1^2, p_2^2, ...p_n^2$$

دیا گیا ہے کہ 'p' a^2 کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔ حساب کے بنیادی مسئلہ کی رو سے کہ 'p' ایک مفرد جزو ضربی ہے a^2 کا حساب کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے ہم جانتے ہیں کہ a^2 کے مفرد اجزائے ضربی صرف $p_1, p_2, ...p_n$ ہیں۔

اس طرح 'p' ان اجزائے ضربی $p_1, p_2, ...p_n$ میں کوئی ایک ہوگا۔

اب چونکہ $a = p_1, p_2, ...p_n$ ہیں تب 'p' a کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

مندرجہ بالا ثابت کیے گئے بیان کو P=2، p=5 اور a^2=1,4,9,25,36,49,64,81 لیتے ہوئے تصدیق کیجیے۔

اب ہم $\sqrt{2}$ کو غیر ناطق عدد کے طور پر ثابت کریں گے $\sqrt{2}$ غیر ناطق ثابت کرنے کے لیے ''تضاد'' کا طریقہ کا راستعمال کریں گے

مثال - 7: ثابت کیجیے کہ $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\sqrt{2}$ ایک ناطق عدد ہے۔

اگر یہ ناطق عدد ہے تب کوئی دو صحیح اعداد r اور s ($s \neq 0$) وجود رکھتے ہیں اس طرح کہ $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$۔

اگر r اور s کے '1' کے علاوہ مشترک جز ضربی ہیں تب اعظم ترین مشترک اجزائے ضربی سے تقسیم کرتے ہوئے $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ حاصل کریں

۔ جہاں پر a اور b ہم مفرد اعداد ہیں۔

اس طرح $b\sqrt{2} = a$

دونوں جانب مربع کرتے ہوئے دوبارہ ترتیب دینے پر ہم کو $2b^2 = a^2$ حاصل ہوگا۔ لہٰذا 2، a^2 تقسیم کرتا ہے کو۔

اب مسئلہ 6-1 کی رو سے: اگر 2، a^2 کو تقسیم کرتا ہے تب یہ a کو بھی تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح ہم a=2c لکھ سکتے ہیں جہاں پر C کوئی صحیح عدد ہے۔

a کی قدر درج کرنے پر $2b^2 = 4c^2$ یعنی $b^2 = 2c^2$

اس کا مطلب یہ ہوا کہ 2، b^2 کو تقسیم کرتا ہے یعنی 2، b کو بھی تقسیم کرتا ہے مسئلہ 6 - 1 کی مدد سے جہاں پر p=2)

یعنی a اور b دونوں کا مشترک جز و ضربی 2 ہے۔

لیکن یہ ایک تضاد ہے کیونکہ حقیقتاً a اور b ہم مفرد اعداد ہیں۔ یہ تضاد اس لیے وجود میں آیا ہے کیونکہ ہم نے $\sqrt{2}$ کو ناطق عدد فرض کیا ہے جو غلط ہے اس لیے ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

عموماً یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\sqrt{d}$ ایک غیر ناطق ہوتا ہے جب کہ 'd' ایک مثبت صحیح عدد ہے جو دوسرے عدد کا مربع نہ ہو۔ اس طرح $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ $\sqrt{24}$ وغیرہ وغیرہ غیر ناطق اعداد ہیں۔

جماعت نہم میں آپ نے پڑھا ہے کہ

- ایک ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا مجموعہ یا فرق غیر ناطق ہوتا ہے اور
- ایک غیر صفری ناطق اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا خارج قسمت بھی غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

اب ہم یہاں چند خاص مسائل ثابت کریں گے۔

SCERT TELANGANA

مثال - 8 : بتلائیے کہ $5-\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

حل: فرض کرو کہ $5-\sqrt{3}$ ناطق عدد ہے تب a اور b کوئی ہم مفرد اعداد $(b \neq 0)$ کے لیے اس طرح

$$5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$$

اس لیے $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

ہمیں حاصل ہوتا ہے $\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{5b-a}{b}$ ....

چوں کہ a اور b صحیح اعداد ہیں یعنی $5-\frac{a}{b}$ ایک ناطق عدد ہوگا۔ اسطرح $\sqrt{3}$ بھی ناطق عدد ہوگا۔

لیکن یہ تضاد ہے کہ حقیقتاً $\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق ہے۔

یہ تضاد اس لیے وجود میں آیا ہے کہ ہم نے $5-\sqrt{3}$ کو ناطق عدد فرض کیا تھا جو غلط ہے

اس طرح ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ $5-\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

مثال - 9: بتلائیے کہ $3\sqrt{2}$ غیر ناطق عدد ہے۔

حل: آیئے اب ہم $3\sqrt{2}$ کو متضاد طور پر ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔

تب a اور b کوئی دو ہم مفرد اعداد $(b \neq 0)$ کے لیے اس طرح $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ ہوگا۔

ہمیں حاصل ہوتا $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ چونکہ 3، a اور b صحیح اعداد ہیں، اس لیے $\frac{a}{3b}$ ایک ناطق عدد ہوگا اسطرح $\sqrt{2}$ بھی ناطق عدد ہوگا۔

لیکن یہ تضاد ہے حقیقتاً عدد $\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

اس طرح ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $3\sqrt{2}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

مثال - 10: ثابت کیجیے کہ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد ہے۔

حل: فرض کرو کہ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ایک ناطق عدد ہے۔ جہاں پر a,b صحیح اعداد ہیں۔ اور $b \neq 0$

اس طرح $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{a}{b}$

اس لیے $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-\sqrt{3}$

SCERT TELANGANA

دونوں جانب مربع کرنے پر حاصل ہوگا

$$2 = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2\frac{a}{b}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 3 - 2$$

$$\frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} + 1 \Rightarrow \frac{2a}{b}\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1$$

$$\sqrt{3} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

اس لیے $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ناطق عدد ہوگا۔ چونکہ a,b صحیح اعداد ہیں'

اور $\sqrt{3}$ بھی ناطق ہوگا جو تضاد ہے۔

حقیقتاً $\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس طرح $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ بھی ایک غیر ناطق عدد ہوگا۔

نوٹ:

1۔ دو غیر ناطق اعداد کا مجموعہ غیر ناطق ہی ہونا ضروری نہیں ہے۔

اگر $a = \sqrt{2}$ اور $b = -\sqrt{2}$ تب a اور b دونوں غیر ناطق اعداد ہیں۔

لیکن a+b=0 جو ایک ناطق عدد ہے۔ اس طرح' کسی دو غیر ناطق اعداد کا مجموعہ / فرق ہمیشہ غیر ناطق عدد ہوگا۔

2۔ دو غیر ناطق اعداد کا حاصل ضرب 'غیر ناطق' ہی ہونا ضروری نہیں ہے۔

مثلاً $a = \sqrt{2}$ اور $b = 3\sqrt{2}$ جہاں پر a اور b دونوں غیر ناطق اعداد ہیں۔

لیکن ab=6 جو ایک ناطق عدد ہے۔

مشق - 1.4:

1۔ ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل غیر ناطق اعداد ہیں۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{5}$ (v) $3+2\sqrt{5}$

2۔ ثابت کیجیے کہ $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ غیر ناطق عدد ہے، جبکہ p اور q مفرد اعداد ہیں۔

1.4 قوت نما کا اعادہ Exponentials Revisted

ہم جانتے ہیں

طبعی قوت نما n کے ساتھ a کا قوت نما a^n کے اجزا کا حاصل ضرب ہے یعنی $a^n = \underbrace{a.a.a......a}_{n-factor}$

2 کے قوت نما $2^o, 2^1, 2^2, 2^3............$

3 کے قوت نما $3^o, 3^1, 3^2, 3^3.............$

SCERT TELANGANA

ہم جانتے ہیں کہ 81 کو 3^4 لکھا جاتا ہے اس کو قوت نمائی شکل کہتے ہیں $3^4=81$ عدد 4 قوت نما ہے اور 3 اساس ہے ہم اس کو اس طرح پڑھتے ہیں۔'' اساس 3 کا چوتھا قوت نما 81 ہے۔ قوت نماؤں کے کلیات کی یاد دہانی کیجیے۔

اگر a،b حقیقی اعداد ہیں $a \neq 0, b \neq 0$ اور m,n صحیح اعداد سے تب۔

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$; (ii) $(ab)^m = a^m . b^m$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$, اگر a،b حقیقی اعداد ہیں $a \neq 0, b \neq 0$ اور m،n صحیح اعداد ہیں

(v) $a^0 = 1$ if $a \neq 0$ (vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $a \neq 0$

یہ کیجیے

1۔ محسوب کیجیے۔

(i) 2^1 (ii) $(4.73)^0$ (iii) 0^3 (iv) $(-1)^4$ (v) $(0.25)^{-1}$ (vi) $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (vii) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

2۔ (a) 10,100,1000,10000,10000 کو قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

(b) مندرجہ ذیل کو سادہ ترین قوت نمائی شکل میں لکھیے۔

(i) 16×64 (ii) 25×125 (iii) $128 \div 32$

قوت نما اور لوگارتھم

آیئے مندرجہ ذیل پر غور کریں۔

$2^x = 4 = 2^2$ جس سے x=2 حاصل ہوتا ہے۔

$3^y = 81 = 3^4$ جس سے y=4 حاصل ہوتا ہے۔

$10^z = 10000 = 10^5$ جس سے z=5 حاصل ہوتا ہے

کیا ہم مندرجہ ذیل کے لیے x کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟

$2^x = 5$,$3^x = 7$, $10^x = 5$

اگر ہاں تو x کی قدریں کیا ہیں؟

$2^x=5$ کے لیے 2 کو کس قوت پر اٹھایا جائے کہ 5 حاصل ہو؟ اس لیے x اور 5 کے درمیان نئے رشتے کو قائم کرنے کی ضرورت ہے۔

SCERT TELANGANA

ایسی حالت میں ایک نئے رشتے لوگارتھم کو متعارف کیا جاتا ہے۔آیئے غور کریں۔

$y=2^x$، میں x کی کونسی قدر پر y، 5 ہوتا ہے؟

مشاہدہ کرنے سے اگر x=1 تب $y=2^1=2$، اگر x=2 تب $y=2^2=4$ اگر x=3 تب $y=2^3=8$ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ x کی قدر 2 اور 3 کے درمیان ہوتی ہے۔کیا x کی قدر 2 کے قریب ہے یا 3 کے قریب لیکن x کی قدر '2' کے قریب ہے۔

اگر $2^x=5$ یہاں x کی تعریف ''5 کا لوگارتھم 2 کے اساس پر'' کے طور پر کی جاتی ہے۔علامتی طور پر اس کو $x=\log_2 5$ لکھا جاتا ہے۔

2^x کا گراف

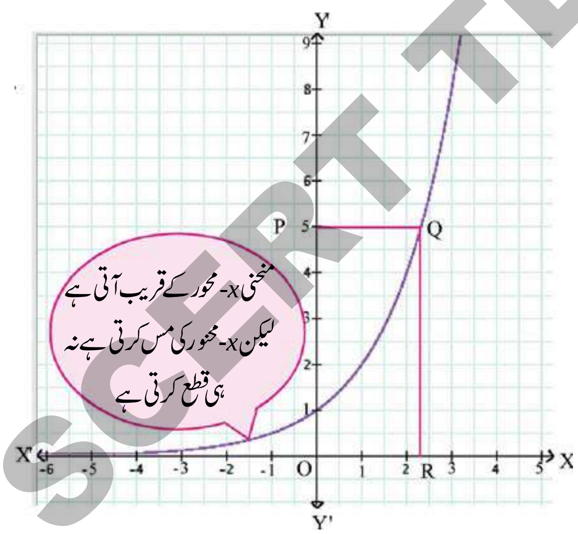
آیئے $y=2^x$ کا گراف اتاریں

x کی چند قدروں کا انتخاب کرتے ہوئے y کی قدر محسوب کرتے ہیں۔

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ہم نقاط کو ترسیمی کاغذ پر نشاندہی کر کے انہیں منحنی کے ذریعے ملاتے ہیں۔

غور کیجیے کہ جیسے جیسے x کی قدر بڑھتی ہے۔$y=2^x$ کی قدر بھی بڑھتی ہے اور جیسے جیسے x کی قدر گھٹتی ہے y=2x کی قدر بھی گھٹتی ہوئی o کے قریب پہنچتی ہے لیکن کبھی بھی صفر (0) نہیں ہوتی۔



آیئے غور کریں اگر $y=2^x$ تب x کی کس قدر کے لیے y کی قدر 5 ہوتی ہے؟

ہم جانتے ہیں کہ گراف میں y- محور 2^x کی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔

x- محور کس کو ظاہر کرتا ہے؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ x- محور x کی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔

y- محور پر 5 کی نشاندہی کیجیے اور اس کو متعلقہ نقطہ P سے ظاہر کیجیے

نقطہ P سے x- محور کے متوازی ایک خط کھینچیے جو منحنی کے نقطہ Q پر ملتا ہے۔

اب x محور پر عمود QR کھینچیے۔کیا ہم گراف کی مدد سے OR کا طول معلوم کر سکتے ہے؟ یا یہ کہاں ہوتا ہے؟ اس طرح ہم جانتے ہیں کہ x کی مطلوبہ قدر نقاط P اور Q کے x- مختصات ہوتی ہے۔جیسا کہ $2^x=5$ اس طرح x کی قدر اساس 2 پر 5 کا لوگارتھم کہلاتی ہے۔اس کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $\log_2 5$

SCERT TELANGANA

اگر $2^x=5$ یا $3^x=7$ یا $10^x=5$ ہو تب x کی قدر معلوم کرنا مشکل امر ہے۔ اس کے لئے ہم درج ذیل حل کر سکتے ہیں۔

اگر $2^x=5$ تب 'x' کو لوگارتھم 5 اساس '2' کے لئے $log_2 5$ لکھے ہیں۔

اگر $3^x=7$ ہو تب 'x' کو لوگارتھم 5 اساس 3 لکھتے ہیں اس طرح $log_3 7$

اگر $10^x=5$ تب 'x' کو لوگارتھم 10 اساس 5 کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

اگر a اور N مثبت صحیح اعداد ہو اس طرح کہ $a \neq 1$ کو $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ہم مندرجہ بالا جدول کو دوبارہ اس طرح لکھتے ہیں۔

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$x = \log_2 y$	-2	-1	0	1	2	3

لوگارتھم کو تعریف کی رو سے $y=2^x$ کا مشاہدہ کیجیے۔

اگر $y = \frac{1}{4}$; $x = -2$ i.e. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ and $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{2}$; $x = -1$ i.e. $2^{-1} = \frac{1}{2}$ and $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$y = 2$; $x = 1$ i.e. $2^1 = 2$ and $1 = \log_2 2$

$y = 4$; $x = 2$ i.e. $2^2 = 4$ and $2 = \log_2 4$

$y = 8$; $x = 3$ i.e. $2^3 = 8$ and $3 = \log_2 8$

یعنی منحنی کے کسی بھی نقطہ کا y مختص 2 کی x ویں قوت ہوتی ہے اور منحنی کے کسی بھی نقطہ کا x- مختص اساس 2 پر y- مختص کا لوگارتھم ہوتا ہے۔

آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

اگر $10^y = 25$ تب اس کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے $y = \log_{10} 25$ یا y=log25

"کسی بھی عدد کا لوگارتھم اساس 10 پر عام لوگارتھم کہلاتا ہے" اس صورت میں عموماً ہم اساس 10 کو نہیں لکھتے جیسا کہ $\log_{10} 25$ کو اس طرح لکھتے ہیں۔ log25

"a اور N مثبت حقیقی اعداد ہیں اس طرح $a \neq 1$ تب ہم اس کی تعریف عام طور پر اس طرح کرتے ہیں $\log_a N = x \Leftrightarrow ax = N$ "

یہ کیجیے

1۔ حسب ذیل کو لوگارتھم کی شکل میں لکھیے۔

i) $7=2^x$ ii) $10=5^b$ iii) $\frac{1}{81}=3^c$ iv) $100=10^z$ v) $\frac{1}{257}=4^a$

2۔ حسب ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

i) $\log_{10}100=2$ ii) $\log_5 25=2$ iii) $\log_2 2=1$ iv) $x=\log_2 9$

کوشش کیجیے

حسب ذیل کو حل کیجیے۔

i) $\log_2 32=x$ ii) $\log_5 625=y$ iii) $\log_{10}10000=z$

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ قوت نما کی شکل اور لوگارتھم کی شکل ایک دوسرے کی معکوس ہوتی ہیں۔ یہ مشاہدہ بھی کیا گیا ہے کہ ہر ایک مثبت حقیقی عدد ایک منفرد لوگارتھمک قدر رکھتا ہے۔ کیونکہ کوئی بھی انتصابی خط ترسیم کے ایک نقطہ پر مس کرتا ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ کیا $\log_2 0$ کا وجود ہے؟ وجہ بتائیے

2۔ ثابت کرو۔ (i) $\log_b b=1$ (ii) $\log_b 1=0$ (iii) $\log_x b^x=x$

(iv) اگر $\log_x 16=2$ تب $x^2=16$ جہاں $x=\pm 4$، کیا یہ صحیح ہے یا نہیں؟

لوگارتھم کی خصوصیات

کئی میدانوں میں لوگارتھم بہت ہی اہم ہے اور یہ جدید ریاضی ہے ہم اب لوگارتھم پر مشتمل عبارتوں کو سلجھانے کے لیے چند بنیادی خصوصیات اخذ کریں گے۔

(1) ضرب کا اصول

لوگارتھم کے خصوصیات قوت نما کے خصوصیات کے مشابہہ ہوتے ہیں مثلاً اگر ہم مساوی اساس والے قوت نمائی اعداد کو ضرب دیتے ہیں تو قوت نما کو جمع کرتے ہیں۔

یعنی $a^x.a^y=a^{x+y}$

قوت نما کی یہ خصوصیت لوگارتھم سے منسلک ہوتی ہے کیوں کہ لوگارتھم بھی قوت نما ہے جس سے ضرب کا اصول حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ: (اصول حاصل ضرب)

فرض کرو کہ a، x اور y مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں $a\neq 1$

تب $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

یعنی حاصل ضرب کا لوگارتھم، لوگارتھم کا مجموعہ ہے۔

ثبوت: فرض کرو کہ $\log_a x=m$ اور $\log_a y=n$ تب $a^m=x$ اور $a^n=y$

SCERT TELANGANA

اب

$$xy = a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\therefore \quad \log_a xy = m + n = \log_a x + \log_a y$$

کوشش کیجیے

ہم جانتے ہیں۔ log100000=5

ثابت کیجیے کہ 100000 کو 1000x100 لکھنے پر بھی وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ جواب کی تصدیق لوگارتھم کے ضرب کا اصول استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے۔

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل کے لوگارتھم کو لوگارتھم کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) 35×46 (ii) 235×437 (iii) 2437×3568

(ii) خارج قسمت کا اصول (The Quotient Rule)

جب ہم مساوی اساس والے قوت نمائی اعداد کو تقسیم کرتے ہیں تو قوت نما کو تفریق کرتے ہیں۔

یعنی $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

یہ خاصیت خارج قسمت کے اصول کی جانب رہنمائی کرتا ہے۔

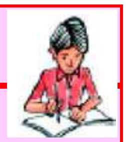
فرض کرو کہ n، a اور y مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں $a \neq 1$

تب $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y$$

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$$



یہ کیجیے

1۔ مندرجہ ذیل لوگارتھم کو لوگارتھم کے فرق میں ظاہر کیجیے۔

i) $\log \dfrac{23}{34}$ ii) $\log \dfrac{373}{275}$ iii) 4525÷3734 iv) 5055÷3303

SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

ہم جانتے ہیں کہ $(a^m)^n = a^{mn}$

فرض کیجیے $a^n = m$ تب $m = \log_a x$

$x^n = a^{mn}$ تب $\log_a x^n = mn$

$= n\log_a x$ (کیوں؟)

(iii) قوت نما کا اصول

جب کسی قوت نمائی عبارت کو قوت نما پر اٹھایا جاتا ہے تو ہم قوت نما کو ضرب دیتے ہیں۔

یعنی $(a^m)^n = a^{m-n}$

یہ خاصیت قوت نما کے اصول کی جانب رہنمائی کرتی ہے۔

فرض کرو کہ y،x،a مثبت صحیح اعداد ہیں جہاں $a \neq 0$ تب 'n' کوئی بھی مثبت صحیح عدد ہو۔

تب $\log_a x^n = n \log_a x$

کوشش کیجیے

ہمیں معلوم ہے کہ $\log_2 32 = 5$ ثابت کیجیے کہ $32 = 2^5$ لکھنے پر بھی وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور لوگارتھم کے قوت نما کے اصول کے استعمال سے جواب کی تصدیق کیجیے۔

اگر $2^x = 3^5$ ہو تو کیا آپ x کی قدر معلوم کر سکتے ہیں؟ اس صورت حال میں ہم 3^5 کی قدر $3^5 = 243$ معلوم کرتے ہیں تب x کی قدر معلوم کر سکتے ہیں جس کے لیے 2^x کی قدر 243 کے مساوی ہوتی ہے۔

لوگارتھم لیتے ہوے اور ضابطہ $\log_a x^n = n \log_a x$ کو استعمال کرتے ہوئے آسانی سے $3^{25}, 3^{33}$ وغیرہ کی قدر معلوم کی جا سکتی ہے۔

$$2^x = 3^5$$

لوگارتھم شکل میں لکھنے پر

$$\log_2^{2^x} = \log_2^{3^5}$$

$$x \log_2^2 = 5 \log_2 3$$

$$x = 5 \ \log_2 3 \quad \left(\because \log_a x^n = n \log_a x \ and \log_a^a = 1\right)$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ x کی قدر 5 اور $\log_2 3$ کی قدر کا حاصل ضرب ہے۔

یہ کیجیے

1۔ ضابطہ $\log_a x^n - n\log_a^x$ کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل کو حل کیجیے۔

(i) $\log_2 7^{25}$ (ii) $\log_5 8^{50}$ (iii) $\log_5^{23}$ (iv) $\log 1024$

نوٹ: $\log x = \log_{10} x$

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

(i) $\log_2^{32}$ کی قدر معلوم کیجیے؟ (ii) $\log_c^{\sqrt{c}}$ کی قدر معلوم کیجیے؟

(iii) $\log_{10}^{0.001}$ کی قدر معلوم کیجیے؟ (iv) $\log_{\frac{2}{3}} {}^{8}\!/_{27}$ کی قدر معلوم کرو؟

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

ہم جانتے ہیں کہ اگر $7 = 2^x$ ہوتب $x = \log_2^7$ تب $\log_2^7$ کی قدر کیا ہوگی؟ آپ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔ چند مزید مثالیں $a\log_a^N$ کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا کو تعمیم کیجیے۔

مثال 11. $\log\frac{343}{125}$ کو پھیلائیے۔

حل: جیسا کہ آپ جانتے ہیں $\log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

اس لیے $\log\frac{342}{125} = \log 343 - \log 125$

$$= \log 7^3 - \log 5^3$$

کیوں کہ $\log_a x^m = m\log_a x$

$$= 3\log 7 - 3\log 5$$

لہذا $\log\frac{343}{125} = 3(\log 7 - \log 5)$

مثال 12. 2log3+3log5-5log2 کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیے۔

حل:

$$2\log 3 + 3\log 5 - 5\log 2$$

$$= \log 3^2 + \log 5^3 - \log 2^5 \quad (m\log_a^x = \log_a x^m)$$

$$= \log 9 + \log 125 - \log 32$$

$$= \log(9\times125) - \log 32 \quad (\log_a x + \log_a y = \log_a xy)$$

$$= \log 1125 - \log 32$$

کیوں کہ $= \log\frac{1125}{32}\left(\log_a x - \log_a y = \log_z\frac{x}{y}\right)$

SCERT TELANGANA

مثال 13. حل کیجیے۔ $3^x = 5^{x-2}$

حل: $x\log_{10} 3 = (x-2)\log_1 5$ (دونوں جانب log لینے پر $\log 3^x = \log 5^{x-2}$)

$$x\log_{10} 5 - 2\log_{10} 5 = x\log_{10} 3$$

$$x\log_{10} 5 - x\log_{10} 3 = 2\log_{10} 5$$

$$x(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) = 2\log_{10} 5$$

$$x = \frac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 5 - \log_{10} 3}$$

مثال 14. x کی قدر معلوم کیجیے۔اگر $2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3 = \log x$

حل: $\log x = 2\log 5 + \frac{1}{2}\log 9 - \log 3$

$$= \log 5^2 + \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log \sqrt{9} - \log 3$$

$$= \log 25 + \log 3 - \log 3$$

$$\log x = \log 25$$

$$x = 25$$

مشق-1.5

1) مندرجہ ذیل کے قدریں معلوم کیجیے؟

(i) $\log_{25} 5$ (ii) $\log_{81} 3$ (iii) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

(iv) $\log_7 1$ (v) $\log_x \sqrt{x}$ (vi) $\log_2 512$

(vii) $\log_{10} 0.01$ (viii) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{8}{27}\right)$ (ix) $2^{2+\log_2^3}$

2. مندرجہ ذیل کی عبارتوں کو logN کی شکل میں ظاہر کیجیے۔اوران کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) $\log 2 + \log 5$ (ii) $\log_2 16 - \log_2 2$ (iii) $3\log_{64} 4$

(iv) $2\log 3 - 3\log 2$ (v) $\log 10 + 2\log 3 - \log 2$

SCERT TELANGANA

3. مندرجہ ذیل کو x اور y کی رقوم مین ظاہر کیجیے اگر دیا گیا ہے کہ $x = \log_2 3$ اور $y = \log_2 5$

(i) $\log_2 15$ (ii) $\log_2 7.5$ (iii) $\log_2 60$ (iv) $\log_2 6750$

4. مندرجہ ذیل کو پھیلائیے۔

(i) $\log 10000$ (ii) $\log\left(\frac{128}{625}\right)$ (iii) $\log x^2y^3z^4$ (iv) $\log\frac{p^2q^3}{r}$ (v) $\log\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$

5. اگر $x^2+y^2=25xy$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $2\log(x+y)=3\log 3+\log x+\log y$

6. اگر $\log\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{1}{2}(\log x+\log y)$ تب $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ کی قدر معلوم کیجیے؟

7. اگر $(2.3)^x=(0.23)^y=1000$ ہو تب $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ کی قدر معلوم کیجیے؟

8. اگر $2^{x+1}=3^{1-x}$، تب x کی قدر معلوم کیجیے؟

9. کیا (i) log2 ناطق ہے یا غیر ناطق؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے؟

(ii) log100 ناطق ہے یا غیر ناطق؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے؟

مشق (اختیاری)

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ کیا عدد 6^n ہندسہ 5 پر ختم ہوتا ہے۔ جبکہ n ایک طبعی عدد ہے۔ وجوہات بیان کیجیے۔

2۔ کیا 7×5×3×2+3 ایک مرکب عدد (غیر مفرد عدد) ہے؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

3۔ ثابت کیجیے کہ $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ جانچ کیجیے کہ $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ناطق عدد یا غیر ناطق عدد ہے۔

4۔ اگر $x^2+y^2=6xy$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $2\log(x+y)=\log x+\log y+3\log 2$

5۔ 4^{2013} میں ہندسوں کی تعداد معلوم کیجیے اگر $\log_{10} 2=0.3010$ ہو

نوٹ: کسی عدد کے لوگارتھم کے صحیح حصے اور اعشاری حصے سے متعلق اپنے استاد سے گفتگو کیجیے۔

SCERT TELANGANA

تجویز کردہ منصوبہ کام:

اقلیدس الگورتھم

☆ رنگین ربن یا گرڈ پیپر کو استعمال کرتے ہوئے اقلیدس الگورتھم کی مدد سے HCF معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ اقلیدس کا نظریہ تقسیم: دیے گئے مثبت صحیح اعداد a اور b کے لیے مکمل اعداد q اور r اس طرح ہیں کہ $a=bq+r$ ، $O<r<b$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

2۔ حساب کا بنیادی مسئلہ یہ بتلاتا ہے کہ ہر مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ اور یہ اجزائے ضربی کا عمل یکتا ہے۔ مفرد اعداد کی کوئی خاص ترتیب کے بغیر۔

3۔ اگر P کوئی مفرد عدد ہے اور p عدد a^2 کو تقسیم کرتا ہے جہاں 'a' مثبت صحیح عدد ہے تب 'p' ، 'a' کو تقسیم کرتا ہے۔

4۔ فرض کیجیے کہ 'x' ایک ناطق عدد ہے جس کا اعشاری پھیلاؤ مختتم ہے۔ تب ہم 'x' کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں جہاں p اور q ہم مفرد اعداد ہیں اور q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں ہیں۔ جہاں m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں۔

5۔ فرض کیجیے کہ $x=\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے اس طرح سے کہ q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں ہیں جہاں n اور m مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب x اعشاری پھیلاؤ رکھتا ہے جو مختتم ہے۔

6۔ فرض کیجیے کہ $x=\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی 2^n5^m کی شکل میں نہیں ہے جہاں n اور m مثبت صحیح اعداد ہیں تب x اعشاری پھیلاؤ رکھتا ہے جو غیر مختتم اور تکراری ہے۔

7۔ اگر $a^n = x$ ہو تو $\log_a x = n$ جہاں a اور x مثبت اعداد ہیں اور $a \neq 0$ کے

8۔ لوگارتھم کے قوانین

(i) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^m = m \log_a x$ (iv) $a^{\log_a N} = N$ (v) $\log_a 1 = 0$

(vi) $\log_a a = 1$

9۔ لوگارتھم کا استعمال شعبہ انجینئرنگ، سائنس، تجارت اور معاشیات میں ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

باب
2
سٹس Sets

2.1 تمہید

آپ ایک شخص کو کس طرح بیان کر سکتے ہیں جبکہ آپ کو ایسا کرنے کے لیے کہا گیا ہے؟ آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

راما نجن علم ہندسہ میں دلچسپی رکھنے والا ریاضی داں تھا۔

مولانا حسرت موہانی اردو کے شاعر تھے اور مجاہد آزادی بھی تھے۔

البرٹ آنسٹائین جرمن طبیعات داں تھا، موسیقی اس کا شوق تھا۔

مریم مرزا خانم واحد خاتون ریاضی داں تھی جس نے ریاضی میں میڈل جیتا

ہم افراد کی درجہ بندی ان کی مخصوص خصوصیت اور دلچسپی کی بناء پر کرتے ہیں۔ تب ہمیں بہت زیادہ گروپ حاصل ہوتے ہیں۔ لوگ اپنے اطراف کی دنیا کو ان کے ماحول اور ان کے رشتوں کو سمجھنے کے لیے درجہ بندی کرتے ہیں۔ لائبریری میں کتابیں مضمون واری ترتیب دی جاتی ہیں تاکہ مطلوبہ کتاب آسانی سے مل جائے۔ کیمیا میں عناصر کو درجہ بندی گروپ اور دور میں کی گئی ہے۔ آپ کی جماعت دہم کا نصاب مختلف عنوانات کے تحت 14 باب میں تقسیم کیا گیا ہے۔

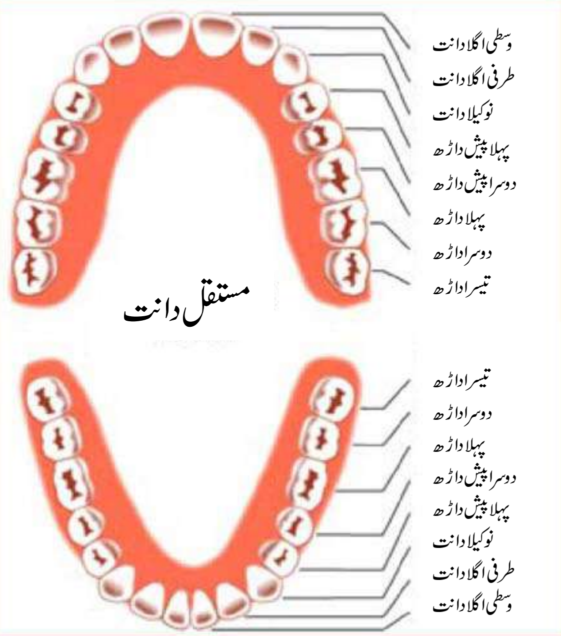
ڈینٹل فارمولہ

غور کیجیے کہ انسانی دانت کو ان کے فعل کے لحاظ سے چار اقسام میں تقسیم کیا گیا ہے۔

(i) اگلے دانت (ii) نوکیلے دانت

(iii) پیش داڑھ (iv) داڑھ

دانتوں کا ضابطہ دراصل ایک ربع میں پائے جانے والے قاطع دانت، کچلی بیش داڑھ اور داڑھ ہیں اس طرح ہم انسانی دانتوں کے ضابطہ کو 2,12,2,3 لکھتے ہیں۔



SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔2020-21

ریاضی دوسروں سے مختلف نہیں ہے۔اس میں اشیا کے بامعنی گروپ جمع کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

ریاضی میں اشیا کی مشترک خصوصیات ہوتی ہیں تاکہ اس کو واحد اشیا کا مجموعہ لیا جائے۔

ریاضی میں استعمال ہونے والے عام اعداد کے گروپ یہ ہیں۔

طبعی اعداد .... 1,2,3,4 کا کلکشن N=

مکمل اعداد .... 0,1,2,3 کا کلکشن W=

صحیح اعداد .... $\pm1, \pm2, \pm3$ کا کلکشن Z یا I=

ناطق اعداد کا کلکشن Q=

یعنی دو اعداد جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں q,p صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

(یعنی ایسے اعداد جن کا اعشاری پھیلاؤ ہو) حقیقی اعداد کا کلکشن R=

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل مجموعے میں پائی جانیوالی ''مشترک خاصیت'' کی شناخت کیجیے اور لکھیے؟

(i) 2,4,6,8 (ii) 2,3,5,7,11,... (iii) 1,4,9,16,...

(iv) جنوری، فروری، مارچ، اپریل ۔۔۔ (v) انگوٹھا، انگشت شہادت، درمیانی انگلی، چوتھی انگلی، چھوٹی انگلی ۔۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مندرجہ ذیل مجموعے کا مشاہدہ کیجیے تمام ممکنہ عمومی بیانات کو ان کی خصوصیات کی بنا پر تیار کیجیے۔

(i) 2,4,6,8,... (ii) 1,4,9,16,.......

2.2 سٹ SET

سٹ اشیاء کا خوش معروف مجموعہ ہے۔سٹ میں موجود اشیاء ان کے ''عناصر'' کہلاتے ہیں۔ سٹ کو { } سے ظاہر کیا جاتا ہے اس کے عناصر کو ' , ' کا استعمال کرتے ہوئے علحدہ کرتے ہیں مشترک اصول سٹ کے عناصر کا تعین کرتا ہے۔

مثال کے طور پر جب ہم پہلے پانچ مفرد اعداد کا سٹ لکھنا چاہتے ہیں۔ اسکو {2,3,5,7,11} کی طرح لکھا جاتا ہے اور قاطع دانت کا سٹ = { درمیانی قاطع دانت، جانبی قاطع دانت }

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل سٹس لکھیے۔

(1) پہلے پانچ مثبت صحیح اعداد کا سٹ

(2) 100 سے بڑے اور 125 سے کم تمام 5 کے ضعف کا سٹ

(3) پہلے پانچ مکعبی اعداد کا سٹ

(4) رامانجن اعداد میں پائے جانے والے ہندسوں کا سٹ

2.2.1 سٹ کا فہرستی طریقہ اور سٹ ساز شکل (Roster Form and Set Builder Form)

سٹ کا طویل جملوں میں اظہار ایک مشکل عمل ہے اس لیے عموماً سٹ کو انگریزی کے بڑے حروف تہجی A,B,C...... سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً: M ہمارے دانتوں میں داڑھ کا سٹ ہے اس سٹ کو { تیسرا داڑھ، دوسرا داڑھ، پہلا داڑھ } = M سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے دوسری مثال پر غور کریں۔ Q ایسے چار ضلعی کا سٹ ہے جس میں کم از کم دو ضلعے مساوی ہیں۔ تب اس سٹ کو ہم اس طرح لکھتے ہیں۔

{ برچھی کا اگلا سرا (Dart)، مساوی الساقین منحرف، پتنگ، متوازی اضلاع، معین، مستطیل، مربع } = Q

یہاں ہم نے عناصر کو فہرست کی شکل میں لکھا ہے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ سٹ کا فہرستی طریقہ Roster From ہے۔

آیئے مندرجہ بالا دو مثالوں میں عناصر کے تعلق اور ان کے اظہار کے بارے میں بحث کریں گے۔ فرض کرو کہ

اگر ہم کہتے ہیں کہ دوسرا داڑھ، داڑھ کے سٹ سے تعلق رکھتا ہے اس کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔ ''$\in M$ دوسرا داڑھ'' اور ہم اس کو اس طرح پڑھتے ہیں۔ دوسرا داڑھ سٹ M سے تعلق رکھتا ہے''

کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ'' $\in M$ معین'' آپ اس کو کس طرح پڑھیں گے؟

اوپری مثال میں کیا مربع سٹ M سے تعلق رکھتا ہے۔ تب آپ اسکو کس طرح ظاہر کریں گے؟ جب ہم کہتے ہیں کہ ''مربع سٹ M میں نہیں ہے'' اس کو ہم '' $\notin M$ مربع'' سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کو اسطرح پڑھا جاتا ہے ''مربع سٹ M سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔''

پچھلی جماعتوں میں ہم نے طبعی اعداد کے سٹ کو 'N' صحیح اعداد کے سٹ کو 'Z' 'ناطق اعداد کے سٹ کو 'Q' سے اور حقیقی اعداد کے سٹ کو 'R' سے ظاہر کرنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں چند اعداد دیے گئے ہیں دیے گئے اعداد؛ اعداد کے کس سٹ سے تعلق رکھتے اور کس سٹس سے تعلق نہیں رکھتے ہیں طے کیجیے اور ان کو صحیح علامتوں سے ظاہر کیجیے

(i) 1   (ii) 0   (iii) -4   (iv) $\frac{5}{6}$ (v) $1.\bar{3}$

(vi) $\sqrt{2}$ (vii) log2   (viii) 0.03   (ix) π (x) $\sqrt{-4}$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

کیا آپ ناطق اعداد کے سٹ کو فہرستی طریقہ میں لکھ سکتے ہیں؟

آپ کے سابقہ معلومات سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ناطق اعداد کو فہرستی طریقہ میں ظاہر کرنا ایک مشکل ترین عمل ہے۔ اور ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ ناطق اعداد کی شکل $\frac{p}{q}$ ہوتی ہے (جہاں پر $q \neq 0$ اور p، q صحیح اعداد ہوتے ہیں۔)

جب کبھی ہم کسی سٹ کو عناصر کی مشترک خصوصیت بیان کرتے ہوئے لکھتے ہیں اس طریقہ کار کو ''سٹ ساز شکل'' کہتے ہیں۔ سٹ ساز شکل کو ایک مخصوص قاعدہ کے تحت ظاہر کیا جاتا ہے۔

آیئے اب ہم ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہوئے غور کریں۔

فرض کیجیے کہ A، 20 سے چھوٹے 3 کے اضعاف کا سٹ ہے تب A={3.6.9.12.15.18}

اور یہ سٹ A کا فہرستی طریقہ ہے۔ ہم سٹ 'A' کو سٹ ساز شکل میں اس طرح لکھتے ہیں A={x:x,x<20 ,3 کا ضعف ہے} اور اسکو اس طرح پڑھتے ہیں ''A' x عناصر کا سٹ ہے اسطرح کہ x تین کے اضعاف ہیں اور x چھوٹا ہے 20 سے۔

A= {x:x ''تین کے اضعاف ہیں'' x اور x<20}

سٹ   x   تمام   اس طرح کہ

اور ناطق اعداد کے سٹ کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔(p، q صحیح اعداد ہیں اور $Q=(x : x = \frac{p}{q}, q \neq 0$

نوٹ: (i) روسٹر فارم یا فہرستی شکل میں عناصر کو ترتیب میں درج کرنا ضروری نہیں ہے جیسے مثال: 1 کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں {1,7,2,9} یا {1,2,7,9}

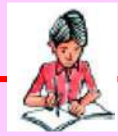
(ii) فہرستی طریقہ میں عناصر کو درج کرنے کے دوران عنصر کو دہرایا نہ جائے مثال کے طور پر لفظ "SCHOOL" کے حرف کا سٹ اس طرح ہوگا۔ {s,c,h,o,l} اور {s,c,h,o,o,l} نہیں ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ سٹ کے عناصر منفرد ہوتے ہیں۔ یعنی دُہرائے نہیں جاتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

آیئے چند سٹس کا فہرستی طریقہ اور سٹ سازشکل کا مشاہدہ کریں۔

فہرستی شکل	سٹ سازشکل
V={a,e,i,o,u}	V={x: x انگریزی زبان کے حروف علت ہے}
$A=\{-2,-1,0,1,2\}$	$A=\{x:-2\le x\le 2, x\in z\}$
$B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}$	$B=\left\{x:x=\frac{1}{n}, n\in N, n\le 5\right\}$
$C=\{2,5,10,17\}$	$C=\{x:x=n^2+1, n\in N, n\le 4\}$



یہ کیجیے

1۔ مندرجہ ذیل سٹس کے عناصر لکھیے۔

(i) G = {20 کے تمام اجزائے ضربی}

(ii) F = {اعداد 17 اور 61 کے درمیان 4 کے اضعاف جو عدد 7 سے مکمل طور پر تقسیم ہوتے ہیں}

(iii) S = {x:x لفظ 'MADAM' کے حروف ہیں}

(iv) P = { x:x عدد 3.5 اور 6.7 کے درمیان مکمل عدد ہے}

2۔ مندرجہ ذیل سٹس کو ''فہرستی شکل'' میں لکھیے۔

(i) B، سال کے 30 دن رکھنے والے مہینوں کا سٹ ہے۔

(ii) P، 10 سے چھوٹے تمام مفرد اعداد کا سٹ ہے۔

(iii) X، قوس قزاح میں پائے جانے والے تمام رنگوں کا سٹ ہے۔

3۔ A، عدد 12 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ مندرجہ ذیل میں کونسا 'A' کا عنصر نہیں ہے۔

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 12

کوشش کیجیے

1۔ آپ اپنے پسند کے ایسے سٹس بنایئے جن میں الجبرائی وجیومٹرائی تصورات ہوں

2۔ فہرستی طریقہ کو سٹ سازشکل سے جوڑ لگایئے۔

(a)	{x: x ایک مثبت صحیح عدد جو 18 کا قاسم ہے}	(i)	{p, r, i, n, c, a, l}
(b)	{x: x ایک صحیح عدد ہے اور $x^2 - 9 = 0$}	(ii)	{0}
(c)	{x: x ایک صحیح عدد ہے اور x + 1 = 1}	(iii)	{1, 2, 3, 6, 9, 18}
(d)	{x: x لفظ PRINCIPAL کا ایک حرف ہے}	(iv)	{3, -3}

SCERT TELANGANA

مشق - 2.1:

1۔ مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) حرف 'J' سے شروع ہونے والے سال کے تمام مہینوں کا کلکشن

(ii) ہندوستان کے بہت ہی ذہین دس مصنفوں کا کلکشن

(iii) دنیا کے گیارہ بہترین کرکٹ کے بلے بازوں کا کلکشن

(iv) آپ کی جماعت کے تمام لڑکوں کا کلکشن

(v) تمام جفت صحیح اعداد کا کلکشن

2۔ اگر A={0, 2, 4, 6}، B = {3, 5, 7} اور C = {p, q, r} تب خالی جگہوں کو مناسب علامت ∈ یا ∉ سے پُر کیجیے۔

(i) 0 ….. A (ii) 3 ….. C (iii) 4 ….. B

(iv) 8 ….. A (v) p ….. C (vi) 7 ….. B

3۔ مندرجہ ذیل بیانات کو علامتوں کے استعمال سے ظاہر کیجیے۔

(i) عنصر 'x' سٹ A سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔

(ii) 'd' سٹ 'B' کا ایک عنصر ہے۔

(iii) '1' طبعی اعداد کے سٹ N سے تعلق رکھتا ہے۔

(iv) '8' مفرد اعداد کے سٹ 'P' سے تعلق نہیں رکھتا ہے۔

4۔ مندرجہ ذیل بیانات آیا صادق ہیں یا کاذب ہیں؟ بیان کیجیے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) مفرد اعداد کا سٹ ∌ 5 (ii) S = {5, 6, 7} سے ہمیں 8∈S حاصل ہوتا ہے۔

(iii) جہاں W مکمل اعداد کا سٹ ہے W ∉ 5- (iv) جہاں 'Z' صحیح اعداد کا سٹ ہے $\frac{8}{11} \in Z$

5۔ مندرجہ ذیل سٹس کو فہرستی شکل میں لکھئے۔

(i) B = {x: x، 6 سے چھوٹا طبعی عدد ہے}

(ii) C = {x: x دو ہندسی طبعی عدد ہے جس کے ہندسوں کا مجموعہ '8' ہے}

(iii) D = {x: x مفرد عدد ہے جو 60 کا قاسم ہے}

(iv) E = {x: لفظ BETTER کے تمام حروف ہے}

6۔ مندرجہ ذیل سٹس کو سٹ ساز شکل میں لکھئے۔

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32}

(iii) {5, 25, 125, 625} (iv) {1, 4, 9, 25, ….. 100}

7۔ مندرجہ ذیل سٹس کے عناصر کو فہرستی شکل میں لکھئے۔

(i) A = {x: x طبعی عدد ہے جو 50 سے بڑا ہے لیکن 100 سے چھوٹا ہے}

(ii) B = {x: x ایک صحیح عدد ہے، $x^2 = 4$}

(iii) D = {x: x لفظ 'LOYAL' کا حرف ہے}

SCERT TELANGANA

8۔ فہرستی شکل کو سٹ ساز شکل سے جوڑیئے۔

(i)	{1, 2, 3, 6}	(a)	{x: 'x' مفرد عدد ہے اور 6 کا قاسم ہے}
(ii)	{2, 3}	(b)	{x: 'x' ایک طاق طبعی عدد ہے اور 10 سے چھوٹا ہے}
(iii)	{m,a,t,h,e,i,c,s}	(c)	{x: 'x' طبعی عدد ہے اور عدد 6 کو تقسیم کرتا ہے}
(iv)	{1, 3, 5, 7, 9}	(d)	{x: 'x' لفظ "MATHEMATICS" کا حرف ہے}

2.3 خالی سٹ (EMPTY SET)

مندرجہ ذیل سٹس کی مثالوں پر غور کیجیے۔

(i) A = { x: 'x' '1' سے چھوٹا طبعی عدد ہے}

(ii) D = { x: 'x' '2' سے قابل تقسیم طاق عدد ہے}

سٹ A اور سٹ D میں کتنے عناصر ہیں؟ ہم جانتے ہیں کہ '1' سے چھوٹا کوئی طبعی عدد نہیں ہے لہذا سٹ 'A' میں عناصر نہیں ہیں۔ یا ہم کہتے ہیں کہ A ایک خالی سٹ ہے اسی طرح کوئی طاق اعداد نہیں ہیں جو 2 قابل تقسیم ہیں۔ لہذا D بھی ایک خالی سٹ ہے۔

ایک سٹ جس میں کوئی عنصر نہ ہو ایک خالی سٹ **Null set** یا **Void set** کہلاتا ہے۔ خالی سٹ کو علامات ϕ یا { } سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہاں خالی سٹ کی مزید مثالیں ہیں۔

(i) A = {x : 1 < x < 2, x ایک طبعی عدد ہے}

(ii) B = {x : $x^2 - 2 = 0$ x ایک ناطق عدد ہے}

نوٹ: ϕ اور {0} دو مختلف سٹس ہیں۔ {0} ایک سٹ ہے جس کا صرف ایک عنصر '0' ہے جبکہ { } ایک خالی سٹ ہے۔

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں کونسے خالی سٹس ہیں؟ آپ کے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) 2 اور 3 کے درمیان آنے والے صحیح اعدا کا سٹ

(ii) طبعی اعداد کا سٹ جو کہ عدد '1' چھوٹے ہیں۔

(iii) طاق اعداد کا سٹ جو کہ '2' سے تقسیم ہونے پر باقی صفر رہتا ہے۔

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس خالی سٹس ہیں۔ آپ کے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $A=(x:x^2=4$ اور $3x=9)$

(ii) ایک مستوی میں لئے گئے تمام مثلثات کا سٹ جن کے زاویوں کا 180^o سے کم ہے۔

2.4 آفاقی سٹ (Universal Set)

آیئے دانتوں کے سٹ پر غور کریں۔ جس پر ہم نے اس باب کے ابتداء میں مباحثہ کیا ہے

آپ دانتوں کے مکمل سٹ کو چار سٹس میں درجہ بندی کر چکے ہیں جن کے نام یہ ہیں قاطع دانت کا سٹ، کچلیاں کا سٹ، پیش داڑھ کا سٹ اور داڑھ کا سٹ۔

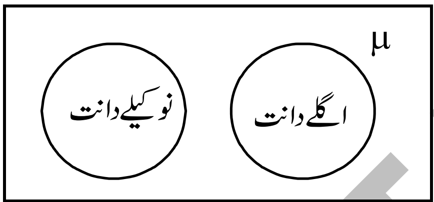
دانت کا سٹ

کچلیاں	قاطع دانت
پیش داڑھ	داڑھ

لیکن کیا داڑھ کا سٹ بھی کل دانت کے سٹ کا عنصر ہے یا نہیں؟

یہاں پر کل دانتوں کا سٹ دیے گئے چار سٹس کے لیے **''آفاقی سٹ''** ہے۔

غور کیجیے دانتوں کے آفاقی سٹ اور قاطع دانت کے سٹ، کچلیاں کے سٹ یہ کو متصلہ شکل میں ظاہر کیا گیا ہے



شکل پر غور کیجیے شکل میں خالی حصہ کس کو ظاہر کرتا ہے؟ آیئے اب ہم مزید آفاقی سٹ کی مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

(i) اگر ہم اپنی ریاست تلنگانہ کے لوگوں کے مختلف گروپس کے بارے میں معلومات حاصل کرنا چاہتے ہیں (جیسے ان کی آمدنی، یا کام یا ذات) جہاں پر تمام تلنگانہ کے لوگوں کا سٹ آفاقی سٹ ہوگا۔

(ii) اگر ہم ہمارے ملک کے لوگوں کے مختلف گروپس کے بارے میں معلومات حاصل کرنا چاہتے ہیں تب ہندوستان کے تمام لوگوں کا سٹ ''آفاقی سٹ'' ہوگا۔

آفاقی سٹ کو عموماً 'μ' سے ظاہر کرتے ہیں۔ اور بعض اوقات 'U' سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ آفاقی سٹ کو شکل میں عام طور پر مستطیل سے ظاہر

> 1. جب ہم کہتے ہیں کہ ''اگر x<3 تب x<4'' اس بیان کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔'' $x < 3 \Rightarrow x < 4$ ''
> 2. جب ہم کہتے ہیں کہ ''x-2=5 اگر اور صرف اگر x=7'' اس بیان کو ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں $x-2=5 \Leftrightarrow x<7$ ہیں۔

آیئے طبعی اعداد کے سٹ $N=\{1,2,3,4,....\}$ اور جفت اعداد کا سٹ جو ان ہی طبعی اعداد میں موجود ہیں غور کریں تب N طبعی اعداد کا سٹ جفت اعداد کے سٹ کے لیے آفاقی سٹ ہوتا ہے۔ کیا طاق اعداد کے سٹ کے لیے بھی طبعی N اعداد سٹ آفاقی سٹ ہے۔

SCERT TELANGANA

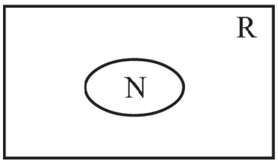
2.4.1۔ تحت سیٹ SUBSET

آیئے سٹ $A=\{1,2,3,.....\}$ پر غور کریں سٹ A کے عناصر سے جتنے چاہے عناصر لے کر آپ کتنے سیٹس بنا سکتے ہو بنایئے؟

اب {1}،{2}{3}،{1,2}،{2,3}،{1,3} اور {1,2,3} آپ کے بنائے ہوئے سیٹس ہیں کیا آپ کہنا چاہیے مزید چند سیٹس تشکیل دیے سکتے ہیں؟ تب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تمام سیٹس سٹ A کے تحت سیٹس ہیں۔ اگر ہم {1,2} کو سٹ A کا تحت کہنا چاہیے ہیں تو اس کو ہم اس طرح $\{1,2\}\subset A$. لکھتے ہیں جب ہم A کے تحت سیٹس پر غور کرتے ہیں ہمیں کہنا چاہیے کہ {1,2,3} بھی سٹ A کا تحت ہوتا ہے۔

اگر سٹ A کے تمام عناصر، سٹ B کے عناصر ہوں تو تب ہم کہتے ہیں کہ سٹ A تحت سٹ ہے B کا۔ اور اس کو ہم $A\subseteq B$ ظاہر کرتے ہیں یعنی $B\supseteq A$ سے مراد ''اگر اور صرف اگر سٹ A کا ہر ایک عنصر سٹ B کا بھی عنصر ہوتا ہے۔

تب ہم اس طرح لکھتے ہیں۔ $A\subseteq B \Leftrightarrow a\in A \Rightarrow a\in B$ جہاں پر A اور B دو سیٹس ہیں۔



آیئے اب ہم حقیقی اعداد کے سٹ R پر غور کریں جس کے کئی تحت سیٹس ہوتے ہیں۔

مثلاً: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$، طبعی اعداد کا سٹ

$W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ مکمل اعداد کا سٹ،

$Z = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ صحیح اعداد کا سٹ

خالی سٹ ϕ اور ایک غیر خالی سٹ A پر غور کریں۔ کیا ϕ 'A' کا تحت سٹ ہے۔ ایک ϕ میں کوئی بھی عنصر نہ ہوں جو کہ 'A' کا بھی عنصر نہیں ہے۔

ϕ خالی سٹ کے لئے اس طرح کا کوئی بھی عنصر موجود نہیں ہوتا ہے۔ اس طرح $\phi\subset A$

خالی سٹ ہر سٹ کا تحت سٹ ہوتا ہے۔

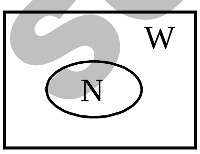
کیا $A\subseteq A$ تمام عناصر LHS کے اور RHS کے جو کہ سٹ A کے تحت ہیں A کے ہی عناصر ہیں اس طرح

ہر سٹ خود اپنا تحت سٹ ہوتا ہے

ناطق اعداد کا سٹ، $Q=\left\{ p/q ,\ p,q \notin z, q\neq 0\right\}$

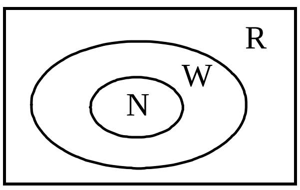
غیر ناطق اعداد کا سٹ 'Q' تمام حقیقی اعداد پر مشتمل ہوتا ہے جس میں ناطق اعداد نہیں ہوتے ہیں۔ تب $\{x : x \in R$ اور $x \notin Q\}$ Q^1 یعنی تمام حقیقی اعداد جو ناطق نہیں ہوتے مثلاً $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$ اور π

اسی طرح، طبعی اعداد کا سٹ N، مکمل اعداد کے سٹ W کا تحت سٹ ہے۔ ہم اس کو اسطرح لکھتے ہیں $N\subset W$ مزید مکمل اعداد کا سٹ W حقیقی اعداد R کا تحت سٹ ہے۔



یعنی $W\subset R$ اور $Z\subset W$

$\Rightarrow N\subset W\subset R$



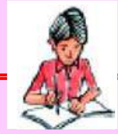
ان تحت سیٹس کے درمیان چند ظاہری رشتے یہ ہیں

$N \subset Z \subset Q \subset R,\ Q^1 \subset R,$ اور $N \not\subset Q^1$

SCERT TELANGANA

حروف علت کے سٹ V={a,e,i,o,u} پر غور کیجیے اور انگریزی کے تمام حروف کے سٹ A={a,b,c,d,....z} پر غور کیجیے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ سٹ V کے ہر ایک عنصر سٹ A کا بھی عنصر ہے۔ لیکن سٹ A کے چند عنصر ایسے ہیں جو سٹ V سے تعلق نہیں رکھتے ہیں اس صورت میں سٹ V ‘سٹ A کا واجب تحت سٹ کہلاتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں $V \subset A$ جہاں پر اگر $a \in V$ تب $a \in A$ اس کو V⊂A کی طرح ظاہر کیا جاتا ہے اور V کا واجب تحت سٹ ہے۔ V کا پڑھا جاتا ہے۔ تحت سٹ کے لئے ⊂ اور واجب تحت سٹ کے لئے ⊆ علامات استعمال ہوتی ہیں۔



یہ کیجیے

1۔ A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4}, C = {1, 2, 3, 4, 7}, F = { }.

خالی جگہوں کو علامات ⊂ یا ⊄ سے پُر کیجیے

(i) A ….. B (ii) C ….. A (iii) B ….. A

(iv) A ….. C (v) B ….. C (vi) ϕ ….. B

2۔ مندرجہ ذیل میں کونسا بیان صادق ہے؟ وضاحت کیجیے۔

(i) { } = ϕ (ii) ϕ = 0 (iii) 0 = { 0 }

کوشش کیجیے

1۔ { چار ضلعی کا سٹ }=A ‘{ مربع ‘مستطیل ‘منحرف ‘معین }=B۔ بیان کیجیے کہ کیا A ⊂ B یا B ⊂ A آپ کے جواب کی تصدیق کیجیے۔

2۔ اگر A = {a, b, c, d} تب A کے کتنے تحت سٹس ہوتے ہیں؟

(A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 65

3۔ P ‘5 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے‘ Q ‘25 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ اور R ‘125 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ مندرجہ ذیل میں کونسا ایک کاذب ہے؟

(A) P ⊂ Q (B) Q ⊂ R (C) R ⊂ P (D) P ⊂ R

4۔ A ‘10 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ ہے‘ B ‘10 سے کم طاق اعداد کا سٹ ہے۔ اور C ‘10 سے کم جفت اعداد کا سٹ ہے۔ مندرجہ ذیل میں کونسے بیان صادق ہیں؟

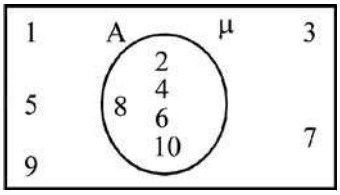
(i) A ⊂ B (ii) B ⊂ A (iii) A ⊂ C

(iv) C ⊂ A (v) B ⊂ C (vi) $\phi \subset A$

SCERT TELANGANA

2.5 وین اشکال Venn Diagrams

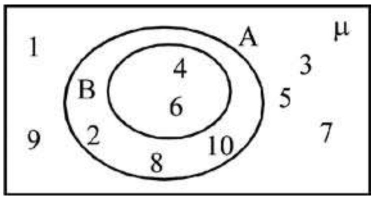
ہم سٹس کو اشکال میں ظاہر کرنے کے طریقہ کار کے بارے میں جان چکے ہیں۔ آیئے اب ہم وین یولر (Venn-Euler) ڈائیگرام یا وین ڈائیگرام کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے کہ سٹس کے درمیان موجود رشتوں کو ظاہر کرنے کا طریقہ ہے۔ عام طور پر یہ ڈائیگرام (اشکال) مستطیل اور بند منحنیوں یعنی دائروں پر مشتمل ہوتے ہیں۔



جیسا کہ اس سبق کی ابتداء میں بیان کیا گیا کہ آفاقی سٹ کو عام طور پر مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

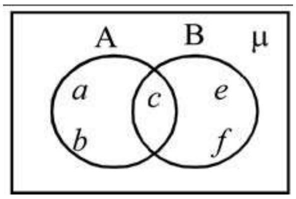
(i) غور کیجیے کہ $\mu = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ ' ایک آفاقی سٹ ہے'

اور جس کا تحت سٹ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ہے تب ان سٹس کی وہ وین اشکال اس طرح ہوگی۔



(ii) $\mu = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ آفاقی سٹ ہے۔

جس کے تحت سٹس $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اور $B = \{4, 6\}$ ہیں اور $B \subset A$ تب وین اشکال اس طرح ہوگی۔

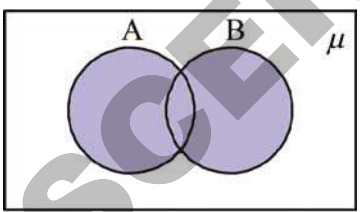


(iii) فرض کرو کہ $A = \{a, b, c, d\}$ اور $B = \{c, d, e, f\}$ تب ہم ان سٹس کی وضاحت وہ وین اشکال کی مدد سے اس طرح کرسکتے ہیں۔

2.6 سٹس کے بنیادی اعمال Basic Operations on Sets

ہم جانتے ہیں کہ حساب میں اعداد کے بنیادی اعمال جیسے عمل جمع، عمل تفریق اور عمل ضرب ہیں۔ اسی طرح سٹس کے لیے بنیادی اعمال جیسے اجماع، تقاطع اور سٹس کا فرق لیے جاتے ہیں۔

2.6.1 سٹس کا اجماع (Union of Sets):



$A \cup B$

فرض کیجیے کہ μ آپ کی جماعت کے تمام طلباء کا سٹ ہے۔
فرض کیجیے کہ A ' آپ کی جماعت کے وہ طلباء سٹ ہے جو منگل کو غیر حاضر تھے اور B آپ کی جماعت کے وہ طلباء کا سٹ جو چہارشنبہ کو غیر حاضر تھے۔ تب

A = {محوین، اریب، اسرار}

B = {اریب، نصرت، اطہر}

اب ہم K معلوم کرنا چاہتے ہیں جو ایسے طلباء کا سٹ جو یا تو منگل کو غیر حاضر تھے یا چہارشنبہ کو غیر حاضر تھے۔ تب کیا $K \in$ محوین

$K \in$ اریب، $K \in$ اسرار، $K \in$ نصرت، $K \in$ اطہر، انجم

محوین، اریب، اسرار، نصرت، اطہر یہ تمام سٹ K سے تعلق رکھتے ہیں لیکن انجم K سے تعلق نہیں رکھتی ہے۔

اس طرح {محوین، اریب، اسرار، نصرت، اطہر} = K

SCERT TELANGANA

یہاں K‘ سٹس Aاور B کا اجماع کہلاتا ہے۔ A اور B کا اجماع ایک سٹ ہے جس کے ارکان Aاور B کے تمام عناصر پر مشتمل ہے۔اجماع کوظاہر کرنے کے لیے علامت ∪ استعمال کی جاتی ہے۔اور علامتی طور پر ہم اس کو اسطرح $A \cup B$ لکھتے ہیں اور اس طرح پڑھا جاتا ہےAاجماعB‘‘یا A cup B(A کپ B)

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال1. فرض کروکہ A={2,5,6,8}اور B={5,7,9,1} تب $A \cup B$ معلوم کیجیے۔

حل: $A \cup B$ ={2,5,6,8} ∪ {5,7,9,1}

={2,5,6,8,5,7,9,1}

={1,2,5,6,7,8,9}

نوٹ کیجیے کہ سٹ $A \cup B$ سٹ لکھنے کے دوران ہم نے مشترک عنصر’5‘ کوصرف ایک مرتبہ لیا ہے۔

مثال2. فرض کروکہ اگر A={a,e,i,o,u}اور B={a,i,u}بتلایئے کہ $A \cup B = A$

حل: $A \cup B$ = {a,e,i,o,u} ∪ {a,i,u}

={a,e,i,o,u,a,i,u}

={a,e,i,o,u}=A

اس مثال سے اس بات کی وضاحت ہوتی ہے کہ سٹ Aاور اسکے تحت سٹ’B‘ کا اجماع خود سٹ’A‘ ہوتا ہے۔

یعنی اگر $B \subset A$ تب $A \cup B = A$

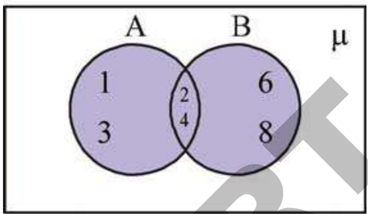
مثال3. اگر A={1,2,3,4}اور B={2,4,6,8} تب $A \cup B$ معلوم کیجیے۔

حل: B={2,4,6,8}اور A={1,2,3,4}

تب $A \cup B$ ={1,2,3,4} ∪ {2,4,6,8}

={1,2,3,4,2,4,6,8}

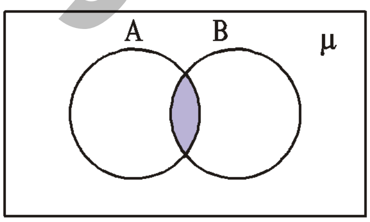
={1,2,3,4,6,8}



A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6, 8}

2.6.2: سٹس کا تقاطع (INTERSECTION OF SETS)

آیئے دوبارہ غیر حاضر طلباء کی مثال پر غور کرتے ہیں۔اس بار ہم ایسا سٹ’L‘ معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طلباء منگل اور چہارشنبہ دونوں دن غیر حاضر رہے۔ہمیں حاصل ہوتا ہے۔L={اریب}‘یہاں سٹ L ‘سٹ Aاور سٹ’B‘ کا تقاطع کہلاتا ہے۔



A∩B

عام طور پر سٹ Aاور سٹ B کا تقاطع‘اُن تمام عناصر کا سٹ ہے جو سٹ Aاور Bمیں مشترک طور ہوتے ہیں۔یعنی وہ عناصر جو A کے ممبر ہیں اور B کے بھی ممبر ہیں۔ہم تقاطع کو علامتی طور پر A ∩ B سے ظاہر کرتے ہیں۔(A تقاطع B پڑھتے) ہیں۔

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ اور } x \in B\}$$

SCERT TELANGANA

A اور B کا تقاطع کو وین ڈائیگرام میں سایہ دار حصہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

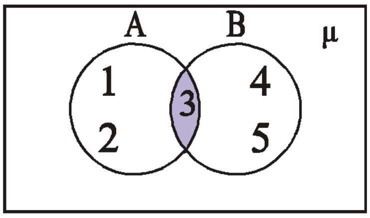
مثال 4. اگر $A=\{5,6,7,8\}$ اور $B=\{7,8,9,10\}$ تب $A\cap B$ معلوم کیجیے۔

حل: سٹ A اور سٹ B کے مشترک عناصر 7 اور 8 ہیں

(مشترک عناصر) $A\cap B=\{5,6,7,8\}\cap\{7,8,9,10\}=\{7,8\}$

مثال - 5: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{3, 4, 5\}$ تب $A \cap B$ کی وضاحت و وین ڈائیگرام کے ذریعے کیجیے۔

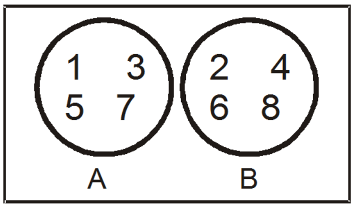
حل: $A \cap B$ کی وضاحت وین ڈائیگرام اس طرح کی جاسکتی ہے



$A \cap B = \{3\}$

غیر مشترک سٹس : Disjoint Sets

فرض کیجیے کہ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8\}$۔ ہم دیکھتے ہیں کہ A اور B میں کوئی مشترکہ عنصر نہیں ہے۔ اس طرح کہ سٹس غیر مشترک سٹس کہلاتے ہیں۔ غیر مشترک سٹس کو وین ڈائیگرام کی مدد سے اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔



$A \cap B = \phi$

یہ کیجیے

(i) فرض کروکہ $A = \{1, 3, 7, 8\}$، اور $B = \{2, 4, 7, 9\}$ تب $A \cap B$ اور $A \cup B$ معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $A = \{6, 9, 11\}$، $\phi = \{\ \}$ تب $A \cup \phi$ اور $\phi \cap A$ معلوم کیجیے۔

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$، $B = \{2, 3, 5, 7\}$ تب $A \cap B$ معلوم کیجیے اور مزید بتلائیے کہ $A \cap B = B$

(iv) اگر $A = \{4, 5, 6\}$، $B = \{7, 8\}$ تب بتلائیے کہ $A \cup B = B \cup A$

کوشش کیجیے

1۔ A اور B کے چند سٹ بنائیے اور ان کے عناصر اس طرح لیجیے کہ A اور B غیر مشترک ہوں

2۔ اگر $A = \{2, 3, 5\}$، $A \cup \phi$ اور $\phi \cup A$ معلوم کیجیے اور ان کا تقابل کیجیے۔

3۔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ تب $A \cup B$، اور $A \cap B$ معلوم کیجیے؟ ان نتائج سے متعلق آپ کیا محسوس کرتے ہیں

4۔ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ تب A تقاطع B معلوم کیجیے۔

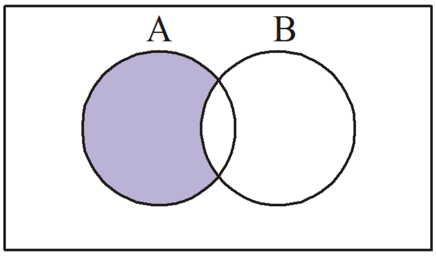
SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

1۔ کوئی دو غیر مشترک سٹس کا تقاطع ایک خالی سٹ ہے اپنے جواب کی تصدیق کیجیے

2.6.3 سٹس کا فرق (Difference of Sets)

فرض کرو کہ A '10 چھوٹے طبعی اعداد کا سٹ ہے۔اور B '10 چھوٹے جفت اعداد کا سٹ ہے۔اگر ہم 10 سے چھوٹے طاق اعداد کے سٹ پر غور کریں' تب اس سٹ کے عناصر سٹ A سے تعلق رکھتے ہیں جب کہ سٹ B سے نہیں۔



اس سٹ کو A−B سے ظاہر کیا جاتا ہے۔اور A تفریق B پڑھا جاتا ہے۔

$\therefore$ A−B={1,3,5,7,9}

آیئے اب ہم سٹس کے فرق کی تعریف کریں۔

سٹس A اور B کا فرق دراصل وہ سٹ ہوتا ہے جس میں صرف A کے عناصر موجود ہوتے ہیں B کے نہیں۔ہم A اور B کے فرق کو A=B ظاہر کرتے ہیں۔اور اس کو اسطرح پڑھا جاتا ہے''A منفی B''

$$A - B = \{x : x \in A \text{ اور } x \notin B\}$$

$$A - B = \{1,3,5,7,9\}$$

مثال - 6: فرض کرو کہ A = {1, 2, 3, 4, 5}' B = {4, 5, 6, 7} ' A-B اور B-A معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے A = {1,2,3,4,5} اور B = {4,5,6,7}' صرف وہی عناصر لیے جائیں جو A' میں ہوں لیکن B میں موجود نہ ہوں

A−B={1,2,3,4,5}−{4,5,6,7}={1,2,3}

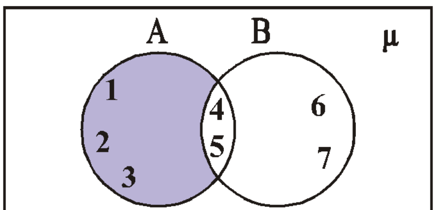
$\therefore$ A – B = {1, 2, 3}

چونکہ 4'5 'B' کے عناصر ہیں ان عناصر کو A−B کے سٹ میں نہیں لیا جاسکتا ہے۔اسی طرح B-A کے لیے صرف ان ہی عناصر کو لینا چاہیے جو صرف B میں ہوں لیکن A میں نہیں

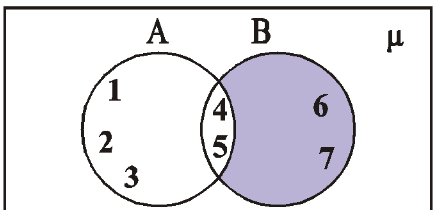
$\therefore$ B – A = {6, 7} (4,5' A کے عناصر ہیں جن کو B سے نکال دیا گیا ہے)

نوٹ: A - B $\neq$ B - A

ذیل میں A - B اور B - A کے وین ڈائیگرام دیے گئے ہیں



A – B = {1, 2, 3}



B – A = {6, 7}

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

1۔ اگر $A = \{1, 2, 3, 4 ,5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$ تب $A-B$ اور $B-A$ معلوم کیجیے۔ کیا یہ دو مساوی ہیں۔

2۔ اگر $V = \{4, 5, 6, 7, 8 , 9\}$ اور $B = \{1, 4,9, 16, 25\}$ تب $V-B$ اور $B-V$ معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

سٹس $A-B$، $B-A$ اور $A \cap B$ آپس میں غیر مشترک سٹس ہیں۔ اگر یہ بیان صادق ہے تب مشاہدے کے لیے مزید چند مثالیں دیجیے

مشق 2.2

1۔ اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$، $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ تب $A \cap B$ اور $B \cap A$ معلوم کیجیے۔ کیا یہ مساوی سٹس ہیں

2۔ $A = \{0, 2, 4\}$، $A \cap \phi$ اور $A \cap A$ معلوم کیجیے اور اس پر تبصرہ کیجیے۔

3۔ اگر $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ اور $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ تب $A-B$ اور $B-A$ معلوم کیجیے۔

4۔ اگر A اور B دو سٹس اس طرح $A \subset B$ تب $A \cup B$ کیا ہوگا؟

5۔ اگر $A=\{x:$ x، ایک طبعی عدد ہے $\}$

$B=\{x:$ x، ایک جفت طبعی عدد ہے $\}$

$C=\{x:$ x، ایک طاق طبعی عدد ہے $\}$

$D=\{x:$ x، ایک مفرد عدد ہے $\}$، تب

$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$ معلوم کیجیے۔

6۔ اگر $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$، $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$، $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$، $D = \{5, 10, 15, 20\}$ تب

(i) $A – B$ (ii) $A – C$ (iii) $A – D$ (iv) $B – A$ (v) $C – A$

(vi) $D – A$ (vii) $B – C$ (viii) $B – D$ (ix) $C – B$ (x) $D – B$

7۔ مندرجہ ذیل میں کونسے بیانات صادق ہیں یا کاذب بتلائیے۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ اور $\{3, 6\}$ غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ اور $\{a, b, c, d\}$ غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ اور $\{3, 7, 11, 15\}$ غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

(iv) $\{2, 6, 10\}$ اور $\{3, 7, 11\}$ غیر مشترک (مختلف) سٹس ہیں۔

SCERT TELANGANA

2.7 مساوی سٹس (Equal Sets)

مندرجہ ذیل سٹس پر غور کیجیے۔

A={ سچن، ڈراویڈ، کوہلی }

B={ ڈراویڈ، سچن، دھونی }

C={ کوہلی، ڈراویڈ، سچن }

مندرجہ بالا تین سیٹس A، B اور C میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ A کے تمام کھلاڑی C میں ہیں۔ C کے بھی تمام کھلاڑی A میں ہیں۔ سٹ A اور سٹ C کے عناصر یکساں (ایک جیسے) ہیں جبکہ سٹ A اور B کے چند عناصر مختلف ہیں۔ اسی لیے A اور C مساوی سٹس کہلاتے ہیں۔ جبکہ A، اور B غیر مساوی سٹس کہلاتے ہیں۔

دو سٹس A اور C مساوی سٹس کہلاتے ہیں اگر سٹ A کا ہر عنصر سٹ C سے تعلق رکھتا ہو (یعنی $A \subseteq C$) اور سٹ C کا ہر ایک عنصر سٹ A سے تعلق رکھتا ہو (یعنی $C \subseteq A$)

اگر A اور C مساوی سٹ ہیں تب ہم A=C لکھ سکتے ہیں۔ مزید اس طرح سے بھی لکھا جا سکتا ہے

اگر $C \subseteq A$ اور $A \subseteq C \Leftrightarrow A = C$

یہاں پر علامت $\Leftrightarrow$ دوہری دلالت کو ظاہر کرتی ہے جس کو "اگر صرف اور صرف" پڑھا جاتا ہے۔ (مختصراً "اگر" لکھا جاتا ہے)

اگر A اور C یکساں عناصر پر مشتمل ہوتے ہیں تب یہ سٹس مساوی سٹس کہلاتے ہیں یعنی A=C

مزید ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ "ہر سٹ خود اپنا تحت سٹ ہوتا ہے۔"

مثال - 7: اگر $A = \{p, q, r\}$ اور $B = \{q, p, r\}$ تب جانچ کیجیے کہ A=B ہے یا نہیں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A = \{p, q, r\}$ اور $B = \{q, p, r\}$

مندرجہ بالا سٹس میں سٹ A کا ہر ایک عنصر B کا بھی عنصر ہے۔ $\therefore\ A \subset B.$

اسی طرح B کا ہر ایک سٹ A کا بھی عنصر ہے۔ $\therefore\ B \subset A.$

مندرجہ بالا دو رشتوں سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ A=B

مثال - 8 : اگر $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ اور N ایک طبعی اعداد کا سٹ ہے تب جانچ کیجیے کہ آیا A اور N مساوی ہیں؟

حل: دونوں سٹس میں موجود عناصر یکساں (ایک ہی ہیں) اس لیے $A \subseteq N$ اور $N \subseteq A$

مزید یہ کہ دونوں A اور N دونوں طبعی اعداد کے سٹس ہیں۔ اس لیے سٹ A اور سٹ N مساوی سٹس کہلاتے ہیں یعنی $A = N$

مثال - 9: سٹ $A = \{1, 2, 3,4\}$ اور سٹ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ کا مشاہدہ کیجیے۔ کیا یہ سٹس مساوی سٹس ہیں؟

حل: $A \subset B$، لیکن $B \not\subset A$ کا اس طرح $A \neq B$

SCERT TELANGANA

مثال -10: فرض کرو کہ سٹ A، 6 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ ہے۔ اور سٹ P، 30 کے تمام مفرد اجزائے ضربی کا سٹ ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا A اور P مساوی سٹس ہیں؟

حل: A = { 2,3,5} 6 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ

عدد 30 کے مفرد اجزائے ضربی 2، 3، اور 5 ہیں، اس لیے P = { 2,3,5} ہوگا

چونکہ A کا ہر ایک عنصر سٹ 'P' کا بھی عنصر ہے اس لیے

'A' اور 'P' مساوی سٹس ہیں۔ $P \subset A,\ A \subset P \Rightarrow P = A$

مثال - 11: بتایئے کہ سٹس A اور B مساوی ہیں؟ جہاں

A={x: ''ASSASSINATION'' کا حرف ہے x}

B={x: ''STATION'' لفظ x کا حرف ہے}

حل: دیا گیا ہے کہ A={ x: لفظ ''ASSASSINATION'' کا حرف ہے x}

سٹ A کا فہرستی طریقہ A = {A,S,I,N,T,O} (چونکہ سٹ عناصر دہرائے نہیں جاتے)

دیا گیا ہے کہ B = {x: لفظ ''STATION'' کا حرف ہے x }

سٹ B کا فہرستی طریقہ B = {A,S,I,N,T,O}

اس طرح A اور B کے عناصر یکساں ہیں اور A=B

مثال - 12: سٹس ϕ، A = {1, 3}، B = {1, 5, 9}، C = {1, 3, 5, 7, 9} پر غور کیجیے مندرجہ ذیل میں دونوں سٹس کے درمیان خالی جگہوں میں مناسب علامت $\subset$ اور $\not\subset$ درج کیجیے

(i) ϕ ….. B (ii) A ….. B (iii) A ….. C (iv) B ….. C

حل: (i) $\phi \subset B$ چونکہ خالی سٹ ہر ایک سٹ کا تحت سٹ ہوتا ہے۔

(ii) $A \not\subset B$ چونکہ $3 \in A$ لیکن $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ چونکہ $3 \in A$، 1 اور یہی عنصر C سے بھی تعلق رکھتے ہیں۔

(iv) $B \subset C$ چونکہ سٹ B کا ہر ایک عنصر سٹ C کا بھی عناصر ہے۔

مشق - 2.3

1۔ مندرجہ ذیل میں کونسے سٹس مساوی ہیں؟

(i) A = {x: لفظ ''FOLLOW'' کا حرف ہے x }

(ii) B ={x: لفظ ''FLOW'' کا حرف ہے x}

(iii) C ={x: لفظ ''WOLF'' کا حرف ہے x }

SCERT TELANGANA

2۔مندرجہ ذیل سٹس پر غور کیجیے اور علامتوں = اور ≠ کو درج کرتے ہوئے بیانات کو صادق بنائیے

$A = \{1, 2, 3\}$; B = {پہلے تین طبعی اعداد}

$C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{d, c, a, b\}$

$E = \{a, e, i, o, u\}$; F={انگریزی حروف کے حرف علت}

(i) A .... B (ii) A .... E (iii) C .... D (iv) D .... F

(v) F .... A (vi) D .... E (vii) F .... B

3۔ مندرجہ ذیل میں بتائیے کہ آیا A=B ہے یا نہیں؟

(i) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{d, c, a, b\}$

(ii) $A = \{4, 8, 12, 16\}$ $B = \{8, 4, 16, 18\}$

(iii) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ B={x: مثبت جفت صحیح عدد x اور x<10 }

(iv) A={x: 10 کے اضعاف ہے, x} B={10,15,20,25,30..........}

4۔ مندرجہ ذیل کے لیے وجوہات بیان کیجیے۔

(i) $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ≠ {$x : x \in N$ اور $1 < x < 10$}

(ii) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ≠ {$x : x = 2n+1$ اور $n \in N$}

(iii) $\{5, 15, 30, 45\}$ ≠ {x : 15 کا ضعف ہے ‘x}

(iv) $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ ≠ {x : مفرد عدد ہے x}

5۔ مندرجہ ذیل سٹس کے تمام تحت سٹ لکھئے۔

(i) $B = \{p, q\}$ (ii) $C = \{x, y, z\}$ (iii) $D = \{a, b, c, d\}$

(iv) $E = \{1, 4, 9, 16\}$ (v) $F = \{10, 100, 1000\}$

SCERT TELANGANA

2.8۔ متناہی اورلامتناہی سٹ: FINITE AND INFINITE SETS

آیئے مندرجہ ذیل سٹ پر غور کریں۔

(i) A={آپ کے مدرسے کے طلباء} (ii) $L = \{2,3,5,7\}$

(iii) B={x: ‘x’ایک جفت عدد ہے} (iv) J ={x: ‘x’ ‘7’کا ضعف ہے}

کیا آپ مندرجہ بالا دیے گئے سٹس عناصر کے کی لسٹ (فہرست) تیار کرسکتے ہیں؟

(i) میں عناصر کی تعداد آپ کے مدرسہ میں موجود طلباء کی تعداد ہی ہوگی۔ سٹ (ii) میں سٹ’L‘ میں عناصر کی تعداد 4 ہے سٹ A اور L کے عناصر کی تعداد ایک مکمل عدد سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ایسے سٹس جن کی تعداد کسی مخصوص مکمل عدد سے ظاہر کی جاتی ہے۔متناہی سٹس کہلاتے ہیں۔

آیئے اب سٹ B پر غور کریں۔ جو تمام جفت اعداد کا سٹ ہے۔ہم B کے تمام عناصر کی تعداد کو ظاہر نہیں کر سکتے۔ کیونکہ جفت اعداد ختم نہیں ہوتے ہیں۔اس لیے مقدار (تعداد) کو کسی ایک مکمل عدد سے ظاہر نہیں کر سکتے ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ ان سٹس میں عناصر کی تعداد متناہی نہیں ہے۔سٹس B اور J میں ارکان کی تعداد لامتناہی ہے۔ایسے سٹس جن میں عناصر کی تعداد متناہی نہیں ہوتی ہے’’لامتناہی‘‘سٹس کہلاتے ہیں۔

ہم کسی دیے گئے ایک نقطہ سے گزرنے والی لامتناہی خطوط کھینچ سکتے ہیں۔اس لیے یہ سٹ ایک لامتناہی سٹ ہوگا اسی طرح صحیح اعداد کے مجموعہ میں سے آخری عدد معلوم کرنا نہ ممکن ہے۔اس لیے اس سٹ کو لامتناہی سٹ کہتے ہیں۔اگر یہ متناہی نہ ہوں۔

مزید مثالوں پر غور کریں۔

(i) فرض کیجیے کہ ‘W’ ہفتہ کے تمام دنوں کا سٹ ہے‘ تب W ایک متناہی ہے۔

(ii) فرض کرو کہ ‘S’ مساوات $x^2 - 16 = 0$ کے ریشوں کا سٹ ہے تب ‘S’ ایک متناہی سٹ ہے۔

(iii) فرض کرو کہ ‘G’ خط کے تمام نقاط کا سٹ ہے۔تب ‘G’ لامتناہی سٹ ہے۔

مثال - 13: مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے متناہی کونسے لامتناہی لکھیے۔

(i) $\{x : x \in N$ اور $(x - 1)(x - 2) = 0\}$ (ii) $\{x : x \in N$ اور $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ اور $2x - 2 = 0\}$ (iv) $\{x : x \in N$ اور x مفرد ہے$\}$

(v) $\{x : x \in N$ اور x طاق ہے$\}$

حل: (i) اس صورت میں x کی قدر ’1‘ یا ’2‘ ہوسکتی ہے اس لیے سٹ $\{1,2\}$ ہوگا۔لہٰذا یہ سٹ متناہی ہے۔

(ii) $x^2 = 4$ دلالت کرتا ہے کہ $x = +2$ یا $x = -2$‘ لیکن $x \in N$ یا ‘x’ ایک طبعی عدد ہے۔تب سٹ $\{2\}$ ہوگا۔ یہ ایک متناہی سٹ ہے۔

SCERT TELANGANA

(iii) دیئے گئے سٹ میں x=1 اور N ∋ 1 ‘تب یہ ایک متناہی سٹ ہے۔

(iv) دیا گیا سٹ تمام مفرد اعداد کا سٹ ہے‘ ہم جانتے ہیں کہ مفرد اعداد لا متناہی ہیں۔اس لیے یہ سٹ لا متناہی سٹ ہے۔

(v) چونکہ طاق اعداد لا متناہی ہیں۔اس لیے یہ سٹ لا متناہی سٹ ہے۔

2.9۔ متناہی سیٹ کا کارڈینل عدد Cardinality or Cardinal number of a Finite Set

اب مندرجہ ذیل متناہی سٹس پر غور کریں۔

$A = \{1, 2, 4\}$؛ $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$؛ $C = \{x$: لفظ INDIA کا حرف ہے ‘$x\}$

یہاں پر سٹ ’A‘ کے عناصر کی تعداد = 3

سٹ ’B‘ کے عناصر کی تعداد = 5

سٹ ’C‘ کے عناصر کی تعداد = 4

(سٹ C میں حرف ’I‘ کو دوہرایا گیا ہے کیونکہ کوئی بھی سٹ میں عناصر متفرق لینا چاہیے اس لیے C میں صرف 4 عناصر ہیں)

سٹ میں موجود عناصر کی تعداد کو سٹ کا (Cardinal Number) (کارڈینل عدد) یا (Cardinality) کہتے ہیں۔

سٹ A کے کارڈینل عدد کو n(A)=3 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح n(B)=5 اور n(C)=4

متناہی سٹ کے لیے کارڈینل عدد مکمل عدد ہوتا ہے اور لا متناہی سٹ کے لیے کارڈینل عدد کے بارے میں اگلی جماعتوں میں سیکھیں گے۔

نوٹ: خالی سٹ میں کوئی بھی عنصر نہیں ہوتا ہے۔اس لیے خالی سٹ کا کارڈینل عدد $n(\phi) = 0$ ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

1۔ مندرجہ ذیل میں کونسے خالی سٹ ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) 2 اور 3 کے درمیان واقع تمام صحیح اعداد کا سٹ

(ii) عدد 1 سے چھوٹے تمام طبعی اعداد کا سٹ

(iii) ایسے طاق اعداد کا سٹ جن کو ’2‘ سے تقسیم کرنے پر باقی صفر بچتا ہے۔

2۔ مندرجہ ذیل میں کونسے سٹ متناہی اور کونسے لا متناہی ہیں۔ بیان کیجیے اور آپ کے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(i) $A = \{x : x \in N$ اور $x < 100\}$ (ii) $B = \{x : x \in N$ اور $x < 5\}$

(iii) $C = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ (iv) $D = \{1, 2, 3, 4\}$

(v) $\{x$: ہفتہ کا ایک دن ‘$x\}$

3۔ لا متناہی سٹ کی نشاندہی کیجیے۔

(A) 10 سے چھوٹے مکمل اعداد کا سٹ ہے (B) 10 سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ ہے

(C) 10 سے چھوٹے صحیح اعداد کا سٹ ہے (D) 10 کے اجزائے ضربی کا سٹ ہے

SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ ایک خالی سٹ 'متناہی سٹ ہوتا ہے۔ کیا یہ بیان صادق ہے یا کاذب ہے؟ کیوں؟

مشق - 2.4:

1۔ مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے خالی سٹ اور کونسے نہیں ہیں؟

(i) ایک نقطہ سے گذرنے والے خطوط کا سٹ

(ii) طاق طبعی اعداد کا سٹ جو عدد '2' سے قابل تقسیم ہے۔

(iii) {x : x 'طبعی عدد ہے' $x < 5$ اور $x > 7$ ہے}

(iv) {x : x 'کوئی دو متوازی خطوط کا مشترک نقطہ ہے'}

(v) مفرد جفت اعداد کا سٹ ہے

2۔ مندرجہ ذیل سٹس میں کونسے متناہی اور کونسے لا متناہی سٹس ہیں؟

(i) سال کے تمام مہینوں کا سٹ ہے

(ii) {1, 2, 3, …, 99, 100}

(iii) '99' سے چھوٹے مفرد اعداد کا سٹ

(iv) انگریزی حرف تہجی کا سٹ

(v) X- محور کے متوازی خطوط کا سٹ

(vi) '5' کے اضعاف کا سٹ

(vii) مبداء (0,0) سے گذرنے والے دائروں کا سٹ

مثال 14. اگر A={1,2,3,4,5} اور B={2,4,6,8} تب n(AUB) معلوم کیجیے۔

حل: سٹ A میں کل '5' عناصر ہیں۔ n(A)=5

سٹ B میں کل '4' عناصر ہیں۔ n(B)=4

لیکن AUB={1,2,3,4,5,6,8} میں 9 عناصر نہیں ہیں۔ اور اس میں صرف 7 ہیں۔ کیوں؟

SCERT TELANGANA

سوچیے۔تبادلہ خیال کیجیے

1۔ $n(A)$، $n(B)$، $n(A\cap B)$ اور $n(A\cup B)$ کے درمیان کیا رشتہ ہے؟

2۔ اگر A اور B غیر مشترک سٹس ہیں تب $n(A\cup B)$ کو کیسے معلوم کرو گے؟

تجویز کردہ منصوبہ کام:

آپ کی کلاس میں آپ کے ساتھیوں کے پسندیدہ گیمس اخبارات ر ٹی وی چینلس کے بارے میں ایک سروے کیجیے۔ سیٹس کی مدد سے ان معلومات کو اکٹھا کیجیے۔ معلوم کیجیے۔

(i) کتنے ساتھی گیمس، اخبارات، ٹی وی چینلس میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(ii) کتنے ساتھی ان میں سے دو جیسے گیمس ر اخبارات یا اخبارات یا ٹی وی چینلس یا گیمس ر ٹی وی چیانلس میں دلچسپی رکھتے ہیں اور کتنے ساتھی تینوں میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

(iii) اور ایسے کتنے ساتھی ہیں جو کسی بھی گیمس ر اخبارات ر ٹی وی چینلس میں دلچسپی نہیں رکھتے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ سٹ ایک خوش معروف اشیاء کا مجموعہ ہوتا ہے۔ جہاں پر خوش معروف کا مطلب یہ ہوتا ہے،

(i) سٹ کے تمام عناصر میں ایک مشترک خصوصیت ہونی چاہیے اور

(ii) آیا دیا گیا عنصر سٹ سے تعلق رکھتا ہے کہ نہیں' کا تعین ممکن ہو۔

2۔ اشیاء جو سٹ سے تعلق رکھتے ہیں وہ اس سٹ کے عناصر کہلاتے ہیں۔ ہم "تعلق رکھتے" کے لیے علامت '$\in$' کا استعمال کرتے ہیں۔

3۔ سٹس کو روسٹر شکل میں تمام عناصر کو کاما سے علحدہ کرتے ہوئے ان کو منحنی قوسین میں درج کرتے ہوئے ظاہر کیا جاتا ہے۔

4۔ سٹس' کو سٹ ساز شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

5۔ ایک ایسا سٹ جس میں کوئی عنصر نہ ہو خالی سٹ کہلاتا ہے یا Null سٹ یا Void سٹ کہلاتا ہے۔

6۔ ایک سٹ متناہی سٹ ہوگا اگر اس سٹ کے عناصر کی تعداد کی گنتی کی جاسکتی ہے۔

SCERT TELANGANA

7۔ ایک سٹ لا متناہی سٹ ہوگا اگر اس کے عناصر کی تعداد کی گنتی ممکن نہ ہو۔

8۔ سٹ میں موجود عناصر کی تعداد کو اُس سٹ کا Cardinal number/Cardinality کہتے ہیں۔

9۔ آفاقی سٹ کو 'μ' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ عام طور پر وین اشکال میں اسکو مستطیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

10۔ سٹ A، سٹ B کا تحت سٹ ہوتا ہے اگر 'a' تعلق رکھتا ہے A سے دلالت کرتا ہے کہ 'a' تعلق رکھتا ہے سٹ B سے۔

اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $A \subset B$ اگر $a \in B$ تب $a \in A$ جہاں A اور B دو سٹس ہیں۔

11۔ دو سٹس A اور B مساوی سٹ ہوتے ہیں اگر سٹ A کا ہر ایک عنصر سٹ B کا بھی عنصر ہو اور B کا ہر ایک عنصر سٹ A کا بھی عنصر ہو۔

12۔ سٹس A اور B کے اجماع کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔ $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

13۔ سٹس A اور B کے تقاطع کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ اور } x \in B\}$$

14۔ دو سٹس A اور B کے فرق کو A-B یا B-A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

15۔ سٹس کے بنیادی اعمال کو سہل طریقہ پر وین اشکال کی مدد سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔1

SCERT TELANGANA

باب 3

کثیر رکنیاں
Polynomials

3.1 تمہید:

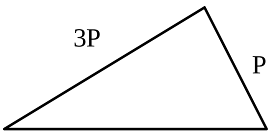
آیئے مندرجہ ذیل کی دوصورتوں پر غور کرتے ہیں۔

1۔ ایک باغ میں پھولوں سے بنی سیج ایک مثلث کی شکل میں ہے۔مثلث کا سب سے بڑا ضلع اس کے چھوٹے ضلع کا تین گنا ہے اوراس کا سب سے چھوٹا ضلع درمیانی ضلع سے 2 اکائی چھوٹا ہے۔مان لیجیے کہ p چھوٹے ضلع کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے تب احاطہ 'p' کے ارقام میں کیا ہوگا؟

2۔ ایک مستطیلی ڈائننگ ہال کا طول اس کے عرض سے دوگنا ہے۔مان لیجیے کہ 'x' ہال کے عرض کی لمبائی کو ظاہر کرتا ہے ہال کے فرش کا رقبہ 'x' کے ارقام میں کیا ہوگا؟

مذکورہ بالاصورتوں میں ہر بیان میں ایک نامعلوم قدر ہے پہلی صورت میں چھوٹے ضلع کو P اکائیوں میں دیا گیا ہے

چونکہ مثلث کا احاطہ = تمام ضلعوں کا مجموعہ



احاطہ $= P+3P+P+2$

$5P+2$

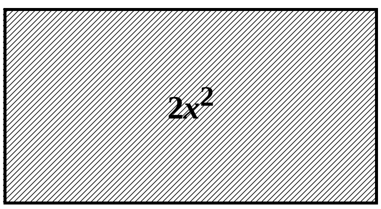
اسی طرح دوسری صورت میں مستطیل کا طول عرض کے دوگنا کے طور پر دیا گیا ہے

لہٰذا اگر عرض $= x$ طول $= 2x$

چونکہ مستطیل کا رقبہ $= lb$

رقبہ $= (2x)(x)$

$= 2x^2$



جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ مثلث کا احاطہ' $5P+2$ اور مستطیل کا رقبہ $2x^2$۔مختلف درجوں کے کثیر رکنیوں کی شکل میں ہے۔

SCERT TELANGANA

3.2 کثیر رکنیاں کیا ہیں؟

کثیر رکنی x میں ایک عبارت ہے جس میں ax^n کی شکل میں کے متناہی ارکان ہوتے ہیں۔ کسی مکمل عدد a کے لیے جہاں $a \neq 0$ کے اور n مکمل عدد ہے۔

کثیر رکنیاں ھیں	کثیر رکنیاں نہیں ھیں
$2x$	$4x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}x-4$	$3x^2+4x^{-1}+5$
x^2-2x-1	$4+\frac{1}{x}$

کیوں $\frac{1}{y-1}$ ایک کثیر رکنی نہیں ہے؟ اپنے دوستوں اور استاد سے تبادلہ خیال کیجیے۔

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں کونسی کثیر رکنیاں ہیں اور کونسی نہیں ہیں بیان کیجیے وجوہات بتائیے۔

(i) $2x^3$ (ii) $\frac{1}{x}-1$ (iii) $4z^2+\frac{1}{7}$ (iv) $m^2-\sqrt{2}\,m+2$ (v) $P^{-2}+1$

3.2.1 کثیر رکنی کا درجہ

یاد کیجیے کہ اگر $p(x)$ ، x میں ایک کثیر رکنی ہے $P(x)$ میں x کی اعظم ترین قوت کثیر رکنی $p(x)$ کا درجہ کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $3x+5$ متغیر 'x' میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ '1' ہے۔ اور ایک خطی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔

$5x$, $\sqrt{2}y+5$, $\frac{1}{3}p$, $m+1$ وغیرہ مزید خطی کثیر رکنیاں ہیں۔

دودرجی کی ایک کثیر رکنی دودرجی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔ مثلاً x^2+5x+4 متغیر 'x' میں دودرجی کثیر رکنی ہے۔

$2x^2+3x-\frac{1}{2}$, p^2-1, $3-z-z^2$, $y^2-\frac{y}{3}+\sqrt{2}$ متغیر x میں دودرجی کثیر رکنیوں کی چند مثالیں ہیں۔۔

عبارت $5x^3-4x^2+x-1$ متغیر 'x' میں 3 درجہ کی کثیر رکنی ہے۔ اور اسکو مکعبی کثیر رکنی کہتے ہیں۔ مکعبی کثیر رکنیوں کی مزید مثالیں $2-x^3$, p^3, l^2-l^3-l+5 ہیں

عدد 6 کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ $6.x^0$ جیسا کہ x کی قوت '0' ہے یہ ایک صفر درجہ کثیر رکنی ہے۔

کوشش کیجیے

3 ' دودرجی اور مکعبی کثیر رکنیاں اور 2 خطی کثیر رکنیاں جن کے ارکان کی تعداد مختلف ہو۔

ہم کسی بھی درجہ کی کثیر رکنیاں لکھ سکتے ہیں۔ $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2-8$ چھٹویں درجہ کی ایک کثیر رکنی ہے اور $x^{10}-3x^8+4x^5+2x^2$ ایک 10 درجی کثیر رکنی ہے۔

SCERT TELANGANA

ہم متغیر 'x' میں n درجہ کی ایک کثیررکنی لکھ سکتے ہیں جہاں 'n' کوئی بھی طبعی عدد ہے۔

عموماً ہم کہتے ہیں :

$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\dots a_{n-1}x + a_n$ ایک n^{th} درجہ کی کثیررکنی ہے۔ جہاں پر

$a_0, a_1, a_2 \dots\dots a_{n-1}, a_n$ x کے حقیقی ضریب ہیں اور $a_0 \neq 0$

مثلاً $ax+b$ ' متغیر x میں یک درجہ کی کثیررکنی کی عام شکل ہے۔ جہاں پر a اور b حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

کوشش کیجیے

1۔ متغیر 'x' میں دو درجی کثیررکنی اور مکعبی کثیررکنی کی عام شکل لکھیے۔

2۔ $q(z)$ 'n درجہ والی ایک عام کثیررکنی کی شکل لکھیے جس کے ضریب $b_0 \dots\dots b_n$ ہوں اور بتلایئے کہ $b_0 \dots\dots b_n$ کے لیے کیا شرائط ہیں۔

3.2.2 کثیررکنی کی قدر: Value of Polynomial

اب ہم کثیررکنی $p(x) = x^2 - 2x - 3$ پر غور کرتے ہیں۔ x کی کسی بھی قدر کے لیے کثیررکنی کی قدر کیا ہوگی؟ مثلاً

$x=1$ کے لیے کثیررکنی کی قدر کیا ہے۔ کثیررکنی میں $x=1$ درج کرنے سے ہمیں $p(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$

حاصل ہوتا ہے متغیر 'x' کو 1 میں تبدیل کرنے سے دی گئی کثیررکنی $p(x)$ کی قدر -4 حاصل ہوئی۔ یہ $x=1$ کے لیے $x^2 - 2x - 3$ کی قدر ہے

اس طرح $p(0)=-3$ ، $p(x)$ کی قدر $x=0$ پر ہے۔

پس اگر $p(x)$ 'متغیر 'x' کی ایک کثیررکنی ہو اور اگر k کوئی حقیقی عدد ہے' تب x کو k میں تبدیل کرنے پر جو قدر حاصل ہوتی ہے وہ

یہ کیجیے

(1) اگر $p(x) = x^2 - 5x - 6$ ہو تو $p(1), p(2), p(3), p(0), p(-1), p(-2), p(-3)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔

(2) ۔ اگر $p(m) = m^2 - 3m + 1$ ہو تو $p(1)$ اور $p(-1)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔

$x=k$ کے لیے $P(x)$ کی قدر کہلاتی ہے اور $p(k)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

3.2.3 کثیررکنی کا صفر Zero of Polynomial

$p(x) = x^2 - 2x - 3$ کی قدریں $x=3$ ' $x=1$ ' اور $x=2$ کے لیے کیا ہوں گی؟

ہمیں حاصل ہوتا ہے $p(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$

SCERT TELANGANA

ہم دیکھتے ہیں کہ $p(3) = 0$ اور $p(-1) = 0$ ‘ اس لیے 3 اور 1- کثیر رکنی $p(x) = x^2 - 2x - 3$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

چوں کہ $p(2) \neq 0$ اس لیے ’2‘ $p(x)$ کا صفر نہیں ہے۔

عام طور پر ایک حقیقی عدد ’k‘ کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کہلاتا ہے اگر $p(k)=0$ ہو۔

یہ کیجیے

(i) مان لیجیے کہ $p(x) = x^2 - 4x + 3$ تب $p(0), p(1), p(2), p(3)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔اور کثیر رکنی $p(x)$ کے صفر معلوم کیجیے۔

(ii) جانچ کیجیے کہ آیا 3- اور 3 ‘ کثیر رکنی $x^2 - 9$ کے صفر ہیں؟

مشق 3.1:

1۔ اگر $p(x) = 5x^7 - 6x^5 + 7x - 6$ ہو تو معلوم کیجیے۔

(i) x^5 کا ضریب (ii) $p(x)$ کا درجہ (iii) مستقل رکن

2۔ مندرجہ ذیل بیانات میں کونسے صادق ‘ اور کاذب ہیں؟ اپنے انتخاب کی وجوہات بیان کیجیے۔

(i) کثیر رکنی $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$ کا درجہ $\sqrt{2}$ ہے

(ii) کثیر رکنی $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ میں x^2 کا عددی ضریب ’2‘ ہے

(iii) مستقل کا درجہ صفر ہوتا ہے۔

(iv) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ایک دو درجی کثیر رکنی ہے۔

(v) کثیر رکنی کا درجہ اس کے ارکان کے تعداد سے ایک زیادہ ہوتا ہے۔

3۔ اگر $p(t) = t^3 - 1$ ہو تو $p(1), p(-1), p(0), p(2), p(-2)$ کی قدریں معلوم کیجیے۔

4۔ جانچ کیجیے کہ آیا 2 اور 2- کثیر رکنی $x^4 - 16$ کے صفر ہیں؟

5۔ جانچ کیجیے کہ آیا 3 اور 2- کثیر رکنی $p(x)$ کے صفر ہیں جہاں $p(x) = x^2 - x - 6$ ہے۔

3.3 کثیر رکنیوں کی صورت گری Working with Polynomials:

آپ سیکھ چکے ہیں کہ ایک خطی کثیر رکنی کے صفر کو کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً: اگر ’k‘، $p(x) = 2x + 5$ کا صفر ہے تب $p(k) = 0$ سے حاصل ہوتا ہے $2k + 5 = 0$ ‘ $\therefore\ k = \dfrac{-5}{2}$

SCERT TELANGANA

عام طور پر اگر k ، $p(x) = ax+b$ کا صفر ہے جہاں $a \neq 0$ تب $p(k) = ak + b = 0$

یعنی $k = \frac{-b}{a}$ ، یا خطی کثیر رکنی $ax+b$ کا صفر $\frac{-b}{a}$ ہے۔

پس، خطی کثیر رکنی کا صفر کثیر رکنی کے ضربیوں اور مستقل سے تعلق رکھتا ہے

کیا اعلیٰ درجہ رکھنے والی کثیر رکنیوں کے صفر بھی کثیر رکنیوں کے ضربیوں اور مستقل سے تعلق رکھتے ہیں؟ اس تعلق سے سوچیے اور اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔ اس موضوع پر ہم آگے بحث کریں گے۔

3.4 کثیر رکنیوں کے صفروں کا جیومٹری مفہوم:

آپ جانتے ہیں کہ ایک حقیقی عدد k ، کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے اگر $p(k) = 0$ ہو۔

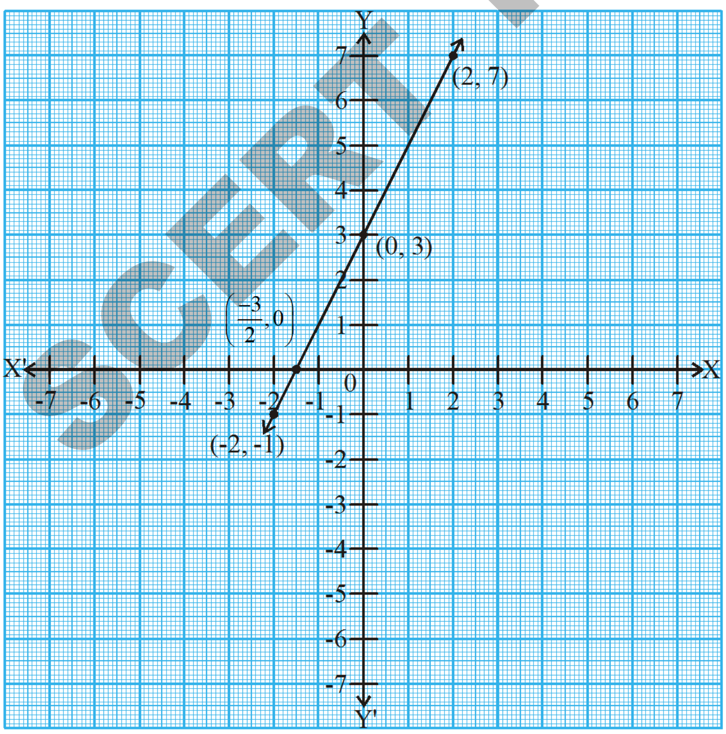
آیئے خطی اور دو درجی کثیر رکنیوں کا ترسیمی اظہار اور ان کے صفروں کا جیومٹریائی مفہوم دیکھتے ہیں۔

3.4.1 خطی کثیر رکنی کا ترسیمی اظہار:

پہلے ایک خطی کثیر رکنی $ax + b, (a \neq 0)$ پر غور کریں، آپ جماعت نہم میں پڑھ چکے ہیں کہ $y = ax+b$ کا گراف خط مستقیم ہے۔ مثال کے طور پر $y=2x+3$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو Y- محور کو نقطہ $(0,3)$ پر قطع کرتا ہے اور نقاط $(-2, -1)$ اور $(2,7)$ سے گذرتا ہے۔

جدول 3.1

x	-2	-1	0	2
$y = 2x + 3$	-1	1	3	7
(x, y)	(-2 , -1)	(-1,1)	(0 , 3)	(2 , 7)



گراف میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y = 2x+3$ ، کا گراف x- محور کو $x = -1$ ، $x = -2$ کے درمیان قطع کرتا ہے۔ یعنی نقطہ $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ پر۔ لیکن $x = \frac{-3}{2}$ کثیر رکنی $2x+3$ کا صفر بھی ہے۔

پس کثیر رکنی $2x + 3$ کے صفر اس نقطہ کا x- مختص ہے جہاں پر خط مستقیم $y = 2x + 3$ ، x- محور کو قطع کرتی ہے۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

گراف کھینچیے

(i) $y = 2x + 5$, (ii) $y = 2x - 5$, (iii) $y = 2x$ اور x- محور پر نقطہ تقاطع معلوم کیجیے

کیا ان نقاط کے x - مختصات کثیر رکنی کے بھی صفر ہیں؟

عام طور پر کسی خطی کثیر رکنی $ax + b, a \neq 0$ ، کے لیے $y = ax + b$ کا گراف ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔ جو x - محور کو صرف ایک ہی نقطہ یعنی $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ پر قطع کرتا ہے۔

اس طرح خطی کثیر رکنی $a \neq 0$ $ax+b$ کا صرف ایک صفر ہوتا ہے۔ اس نقطہ کا x- مختص ہوتا ہے جہاں ترسیم $y=ax+b$ x- محور پر قطع کرتی ہے۔ قطع کرنے والے نقطہ کو $\frac{-b}{a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

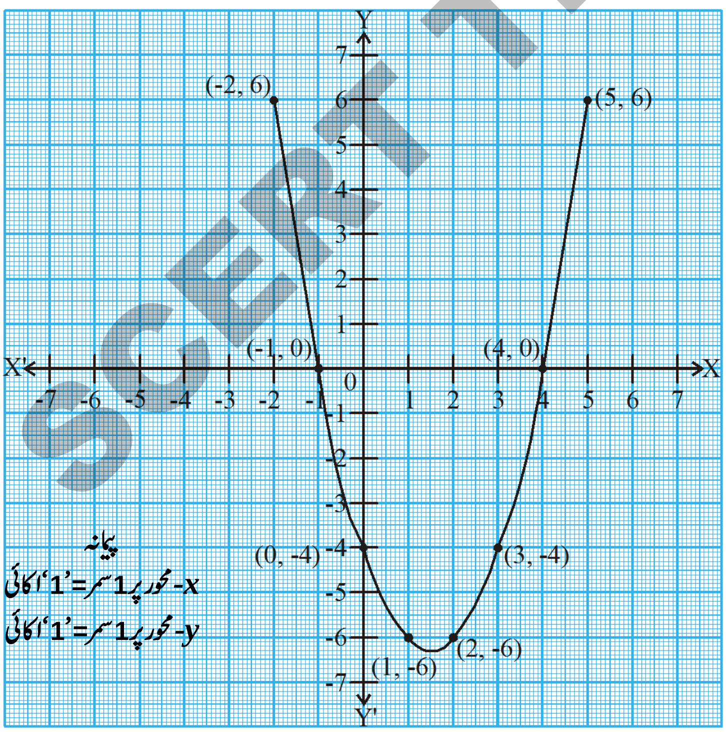
3.4.2 دو درجی کثیر رکنی کا ترسیمی اظہار:

آیئے اب ہم دو درجی کثیر رکنی کے صفر کے جیومٹریائی مفہوم کی پر غور کرتے ہیں۔ دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ پر غور کیجیے۔ آیئے $x^2 - 3x - 4$ کا گراف دیکھنے میں کیسا لگتا ہے مشاہدہ کرتے ہیں۔

آیئے x کی چند قدروں کے لیے $y = x^2 - 3x - 4$ کے متناظر قدروں کی فہرست جدول 3.2 میں درج کرتے ہیں۔

جدول 3.2

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6
(x, y)	(-2 , 6)	(-1 , 0)	(0 , - 4)	(1 , - 6)	(2 , - 6)	(3 , - 4)	(4 , 0)	(5 , 6)



مذکورہ بالا دیے گئے نقاط کو گراف پیپر پر نشاندہی کرتے ہیں اور ان کی گراف کھینچتے ہیں۔

کیا اس دو درجی کثیر رکنی $y = x^2 - 3x - 4$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے؟ یہ "∪" شکل کی منحنی ہے۔ یہ x - محور کو دو نقاط پر قطع کرتی ہے۔

حقیقت میں کسی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ کی متعلقہ مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کا گراف یا تو اوپر کی جانب کھلتا ہے جیسے ∪ یا پھر نیچے کی جانب کھلتا ہے جیسے ∩ یہ $a > 0$ یا $a < 0$ ، پر منحصر ہوتا ہے۔ (اس طرح کی منحنیاں مکافی (Parabola) کہلاتے ہیں)

SCERT TELANGANA

جدول سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ'-1' اور'4' دودرجی کثیررکنی کے صفر ہیں۔اورترسیم سے ہم دیکھتے ہیں کہ'-1' اور'4' مکافی اور x- محور کےنقطہ تقاطع کے x مختصات ہیں۔دودرجی کثیررکنی $x^2 - 3x - 4$ کےصفران نقاط کے x - مختصات ہیں۔جہاں پر $y = x^2 - 3x - 4$ کا گراف x - محورکوقطع کرتا ہے۔کثیررکنی $P(x) = y = x^2 - 3x - 4$

P(-1)=0 تب یہ ترسیم کے x- محور پر(-1،0) پرقطع کرتا ہےاس طرح

P(4)=0 بھی x- محور پر(4،0) پرقطع کرتا ہے۔

عام طور پر کثیررکنی P(x) اگرP(0)=0 تب اس کی ترسیم میں یہ x- محورکو(0,0) پرقطع کرتی ہے۔

یہ کسی بھی دودرجی کثیررکنی کے لیے صادق ہے یعنی دودرجی کثیررکنی، a ≠ 0، $ax^2 + bx + c$ کے صفر مکافی (Parabola)
a ≠ 0-، $y = ax^2 + bx + c$ اور x محور کےنقطہ تقاطع کے x- مختصات ہیں۔

کوشش کیجیے

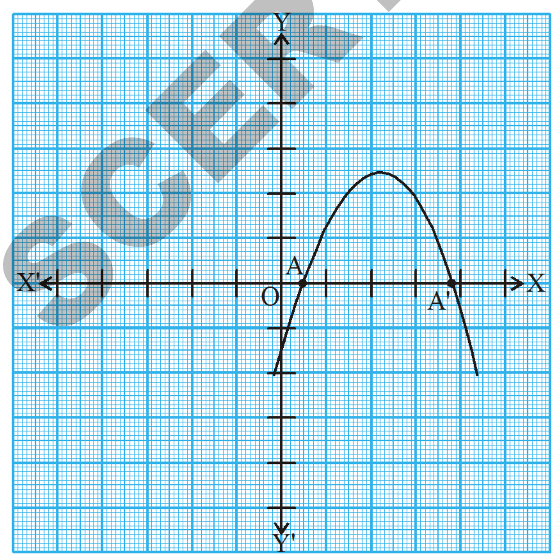
(i) $y = x^2 - x - 6$ (ii) $y = 6 - x - x^2$ کے گراف کھینچئے اور ہر ایک کے صفر معلوم کیجیے۔

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

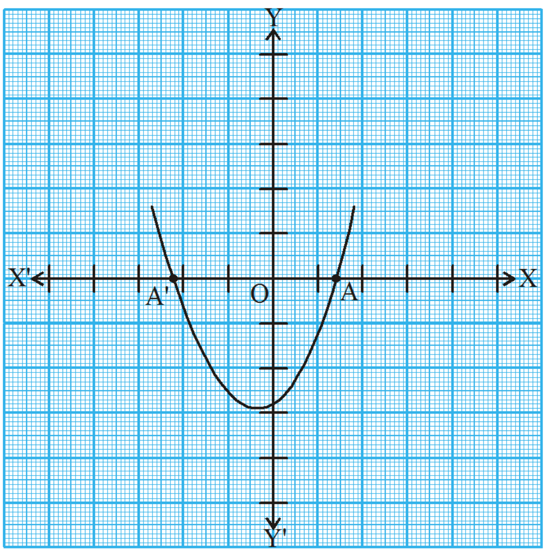
$y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ کی گراف کی شکل سے متعلق ہمارے پچھلے مشاہدات سے حسب ذیل تین صورتیں واقع ہوتے ہیں۔

صورت(i): یہاں پر گراف x- محورکو دومختلف نقاط A اور 'A پر قطع کرتا ہے۔اس صورت میں نقاط A اور A' کے x- مختصات دودرجی کثیررکنی $ax^2 + bx + c$ کے دو''صفر''ہوتے ہیں۔ مکافی (Parabola) یا تو اوپر کھلتا ہے یا نیچے کی جانب کھلتا ہے۔

(i)

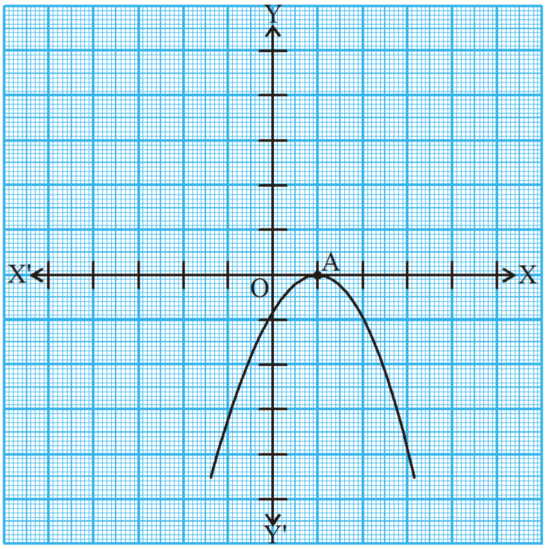


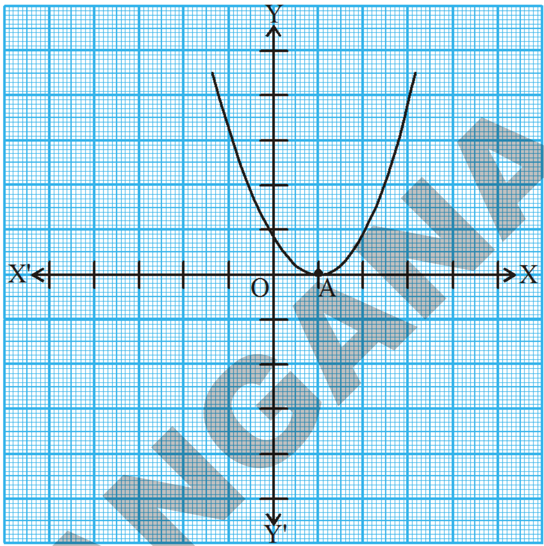
(ii)



SCERT TELANGANA

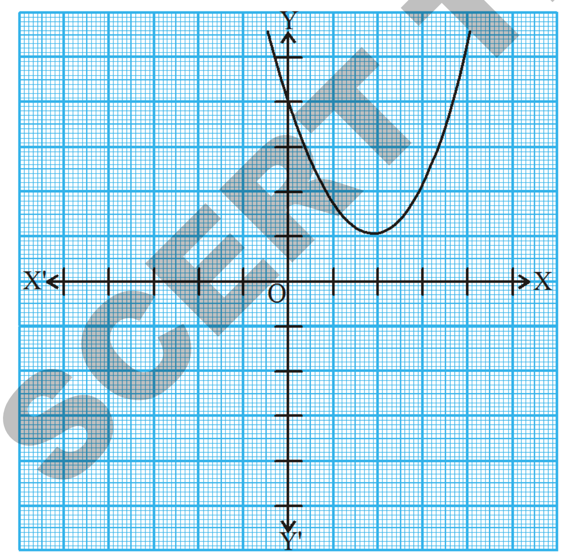
صورت(ii): یہاں پرگراف x- محور کوصرف ایک ہی نقط پر مس کرتا ہے۔یعنی دومنطبق نقاط پر۔لہذا صورت(i) کے دونقاط A اور A′ یہاں منطبق ہوکرصرف ایک نقط A بن جاتا ہے۔

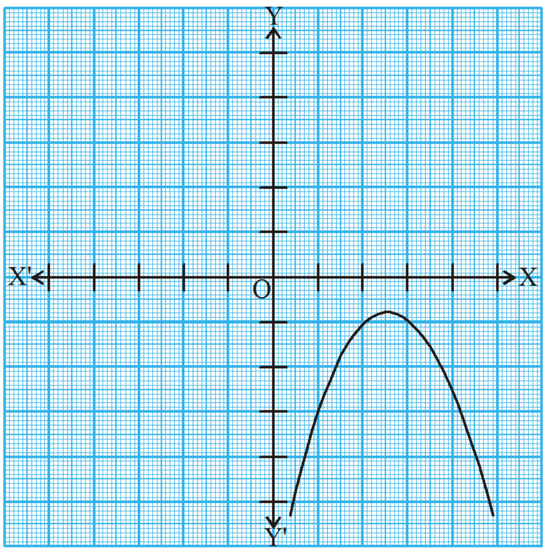




اس صورت میں دودرجی کثیررکنی $ax^2 + bx + c$ کا ''صفر'' نقطہ 'A' کا x- مختص ہی ہوگا۔

صورت(iii) یہاں دودرجی کثیررکنی کی گراف مکمل طورپر یاتو x- محور کے اوپر ہوگا یا مکمل طور پر نیچے ہوگا یہ گراف x- محور کو کسی بھی نقط پر قطع نہیں کرتا ہے۔





لہذا اس صورت میں دودرجی کثیررکنی $ax^2 + bx + c$ کا کوئی بھی ''صفر''نہیں ہوتا ہے۔

لہذا آپ جیومیٹریائی طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ دودرجی کثیررکنی کے یا تو دومختلف صفر یا دومساوی صفر (یعنی ایک صفر) یا کوئی صفرنہیں ہوتے ۔اس کا مطلب یہ ہے کہ دودرجی کثیررکنی کے زیادہ سے زیادہ دوصفر ہوسکتے ہے۔

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

1۔ دوصفر رکھنے والے تین کثیر رکنیوں کو لکھئے۔

2۔ ایک کثیر رکنی لکھئے جس کا ایک صفر ہو۔

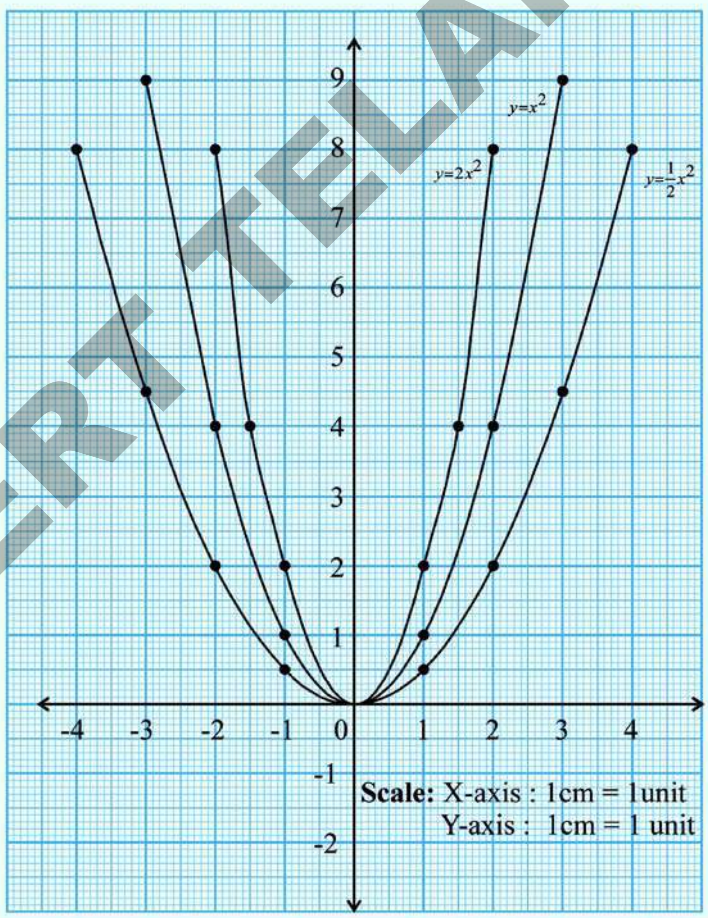
3۔ اگر دو کثیر رکنی کا صرف ایک صفر ہو تو آپ اس کی جانچ کس طرح کریں گے۔

4۔ تین کثیر رکنیاں جن کے کوئی صفر نہ ہوں۔

سوچیے۔تبادلہ خیال کیجیے

1۔ ذیل کے گراف میں دیے گئے منحنیوں پر غور کیجیے، $y = \frac{1}{2}x^2$ ، $y = x^2$ اور $y = 2x^2$ ، چند اور منحنیوں $y = x^2 + 1$ ، $y = 2x^2 + 1$ کے گراف بنائیے اور مشاہدہ کا تجزیہ کیجیے۔

2۔ اگر A اور B غیر مشترک سیٹس ہیں تب n(A∪B) کو کیسے معلوم کروگے؟



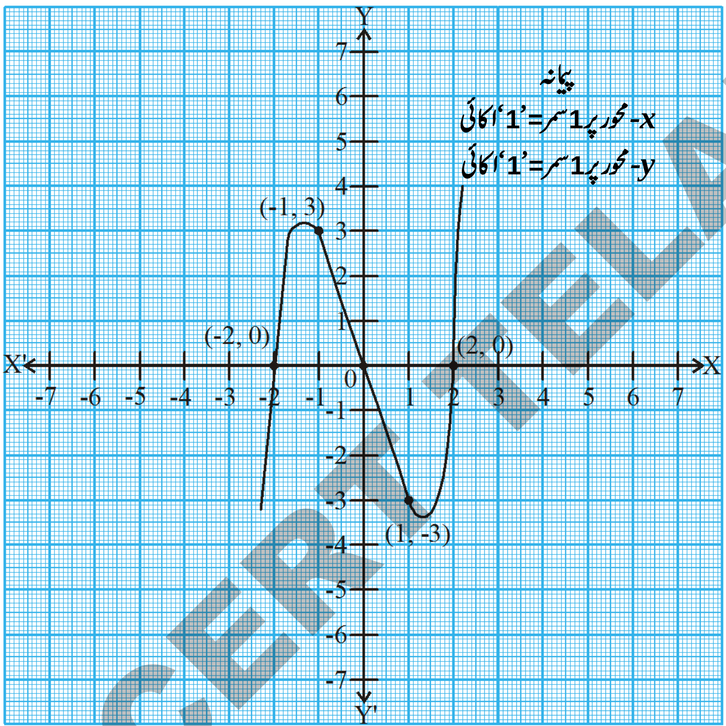
SCERT TELANGANA

3.4.3 مکعبی کثیررکنی کے صفر کا جیومٹری مفہوم:۔
(Geometrical Meaning of Zeroes of a cubic Polynomial)

مکعبی کثیررکنی کے صفروں کی جیومٹری مفہوم سے آپ کیا توقع رکھتے ہیں؟ آیئے معلوم کریں۔ مکعبی کثیررکنی $x^3 - 4x$ پر غور کیجیے۔
آیئے یہ دیکھنے کے لیے $y = x^3 - 4x$ کا گراف دیکھنے میں کیسا لگتا ہے۔ 'x' کی چند قدروں کے لیے $y = x^3 - 4x$ کے متناظر قدروں کی فہرست جدول 3.3 میں درج کرتے ہیں۔

جدول 3.3

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0
(x, y)	(–2, 0)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, 0)



ہم دیکھتے ہیں کہ $y = x^3 - 4x$ کا گراف شکل کے مطابق نظر آتا ہے۔
مندرجہ بالا جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ 2-, 0 اور 2 مکعبی کثیررکنی x^3-4x کے صفر ہیں۔ 2-, 0 اور 2 ان نقاط کے x-مختصات ہیں جہاں پر $y = x^3 - 4x$ کا گراف x-محور کو قطع کرتا ہے۔
لہٰذا اس کثیررکنی کے تین صفر ہیں۔
آیئے چند مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ مکعبی کثیررکنی x^3 اور $x^3 - x^2$ پر غور کیجیے۔ جدول 3.4 اور 3.5 کو دیکھیے۔

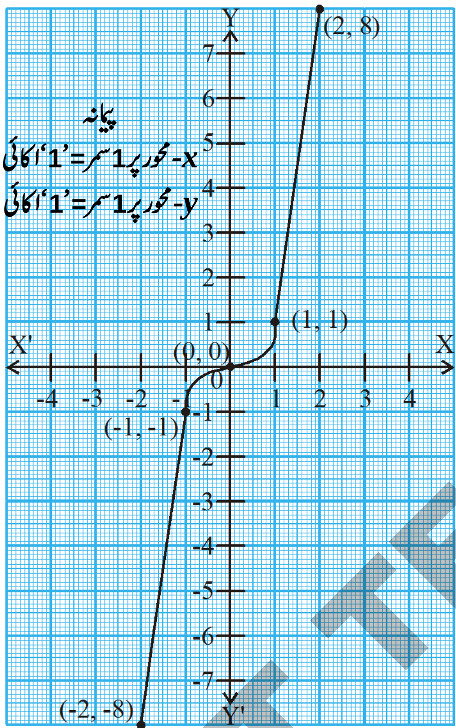
جدول 3.4

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3$	–8	–1	0	1	8
(x, y)	(–2, –8)	(–1, –1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 8)

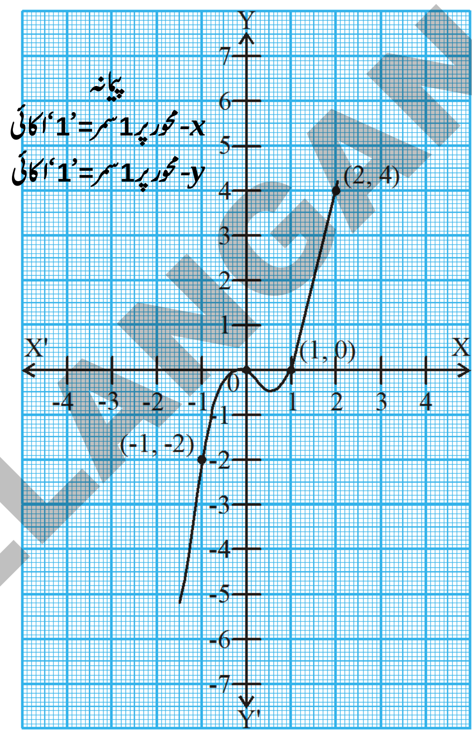
SCERT TELANGANA

جدول 3.5

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - x^2$	-12	-2	0	0	4
(x, y)	$(-2, -12)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$



$y = x^3$



$y = x^3 - x^2$

$y = x^3$ میں، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y = x^3$ کا گراف x - محور کو صرف ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا x - مختص '0' ہے۔ لہٰذا اس کثیر رکنی کا صرف ایک ہی صفر ہے۔ اسی طرح، $y = x^3 - x^2$ کا گراف x - محور کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے جسکے x - مختصات 0 اور 1 ہیں۔ لہٰذا مکعبی کثیر رکنی کے دو مختلف صفر ہیں۔

مندرجہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی بھی مکعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔ باالفاظ دیگرے کثیر رکنی جس کا درجہ تین ہو اس کے تین صفر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجیے

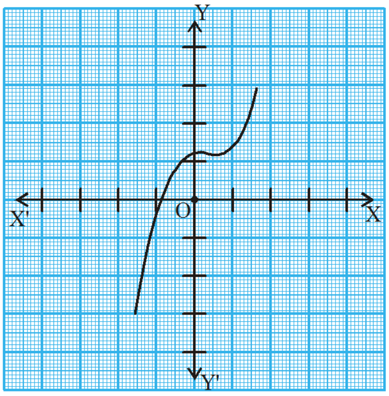
1۔ مکعبی کثیر رکنیوں کے صفر بغیر گراف تشکیل دیئے معلوم کیجیے۔

(i) $-x^3$ (ii) $x^2 - x^3$ (iii) $x^3 - 5x^2 + 6x$

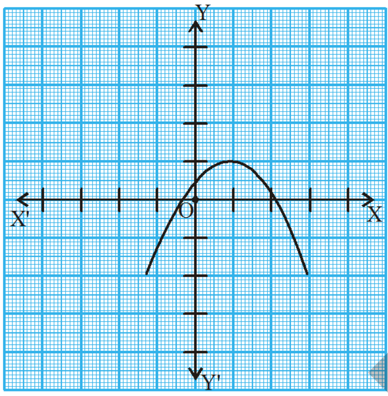
SCERT TELANGANA

تبصرہ(Remark): عموماً ایک n درجہ والی کثیر رکنی $p(x)$ کا گراف x- محور کو زیادہ سے زیادہ 'n' نقاط پر قطع کرتا ہے۔اس لیے n درجہ والی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 'n' صفر ہوتے ہیں۔

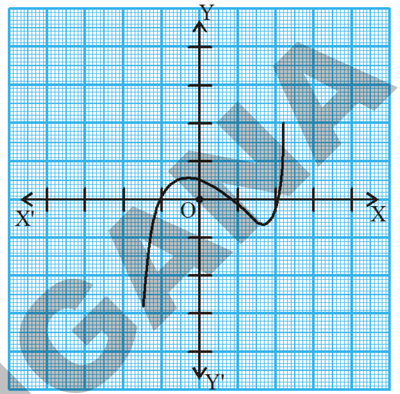
مثال- 1: مندرجہ ذیل دیئے گئے گراف پر غور کیجیے۔ ہر ایک $y=p(x)$ کا گراف ہے۔ جہاں $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے۔ ہر ایک کثیر رکنی $p(x)$ کے صفروں کی تعداد معلوم کیجیے۔



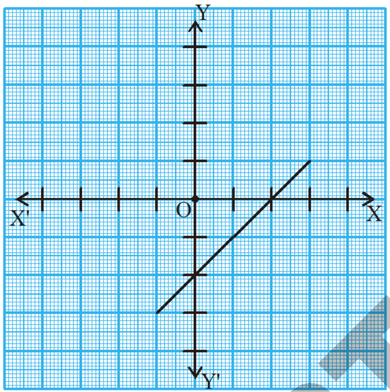
(i)



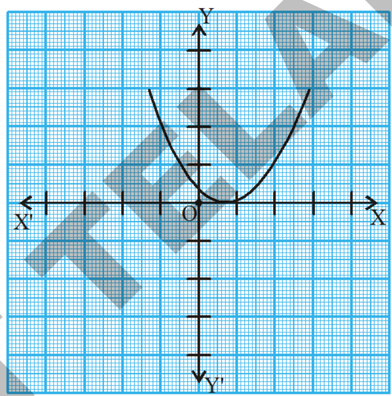
(ii)



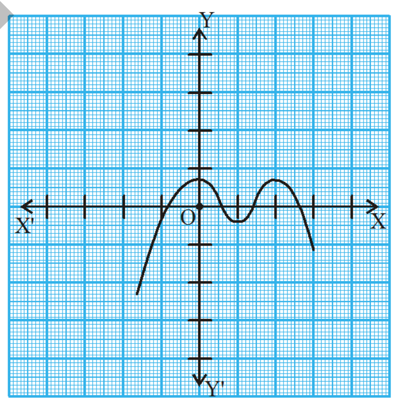
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

SCERT TELANGANA

حل: x کے دیئے گئے سعت میں ان کے متعلقہ گراف ہیں۔

(i) صفروں کی تعداد 1 ہے کیونکہ گراف x- کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) صفروں کی تعداد 2 ہے کیونکہ گراف x- محور کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے۔

(iii) صفروں کی تعداد '3' ہے۔ کیوں؟

(iv) صفروں کی تعداد '1' ہے۔ کیوں؟

(v) صفروں کی تعداد '1' ہے۔ کیوں؟

(vi) صفروں کی تعداد '4' ہے۔ کیوں؟

مثال - 2: دیئے گئے کثیر رکنیوں کے صفروں کی تعداد معلوم کیجیے۔ اور ان کی قدروں کو بھی معلوم کیجیے؟

(i) $p(x) = 2x + 1$ (ii) $q(y) = y^2 - 1$ (iii) $r(z) = z^3$

حل: ہم یہ گراف کی تشکیل کے بغیر کریں گے۔

(i) $p(x) = 2x + 1$ ایک خطی کثیر رکنی ہے اور اس کا صرف ایک ہی صفر ہوتا ہے۔

صفر معلوم کرنے کے لیے

مان لیجیے $p(x) = 0$

$$\therefore\ 2x+1 = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{-1}{2}$$

دی گئی کثیر رکنی کا صفر $\frac{-1}{2}$ ہے۔

(ii) $q(y) = y^2 - 1$ ایک دو درجی کثیر رکنی ہے۔

اس کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہوتے ہیں۔

صفر معلوم کرنے کے لیے مان لیجیے کہ $q(y) = 0$

$$\Rightarrow y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 1)(y - 1) = 0$$

$$\Rightarrow\ y = -1 \text{ یا } 1$$

لہٰذا دی گئی کثیر رکنی کے صفر '-1' اور '1' ہیں۔

(iii) $r(z) = z^3$ ایک مکعبی کثیر رکنی ہے۔ اس کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔

مان لیجیے کہ $r(z) = 0$

$$\Rightarrow z^3 = 0$$

$$\Rightarrow z = 0$$

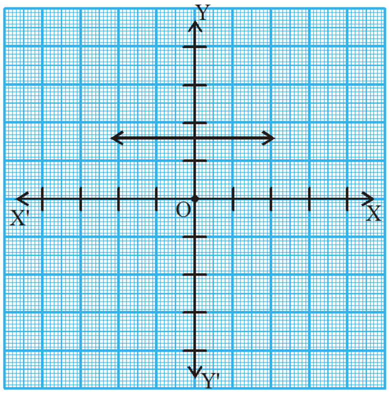
لہٰذا دی گئی کثیر رکنی کا صفر '0' ہے۔

SCERT TELANGANA

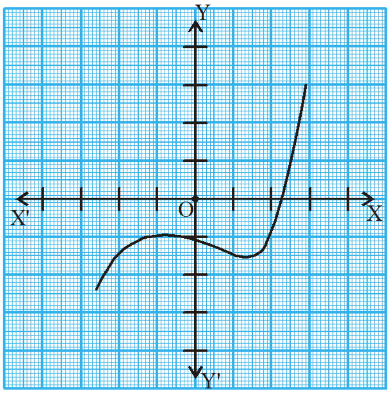
مشق 3.2

1۔ چند کثیر رکنیوں $y = p(x)$ کے گراف ذیل کی شکلوں میں دیے گئے ہیں ہر صورت میں کثیر رکنی $P(x)$ کے صفروں کی تعداد معلوم کیجیے۔

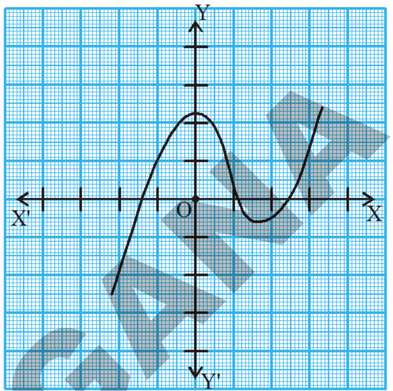
(i)



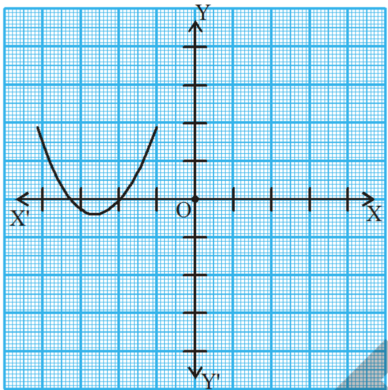
(ii)



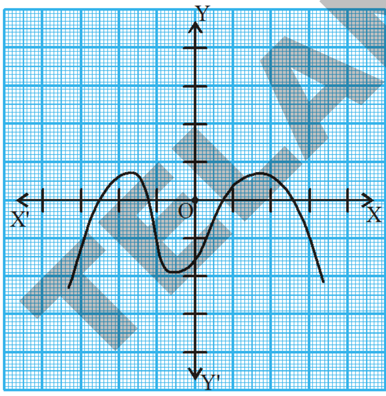
(iii)



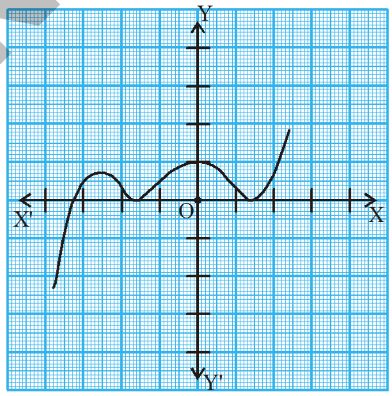
(iv)



(v)



(vi)



2۔ دیئے گئے کثیر رکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = 3x$ (ii) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

(iii) $p(x) = (x+2)(x+3)$ (iv) $p(x) = x^4 - 16$

3۔ دیئے گئے کثیر رکنیوں کی گراف تشکیل دیجیے اور صفروں کو معلوم کیجیے۔ جواب کے صحیح ہونے کی دلیل دیجیے۔

(i) $p(x) = x^2 - x - 12$ (ii) $p(x) = x^2 - 6x + 9$

(iii) $p(x) = x^2 - 4x + 5$ (iv) $p(x) = x^2 + 3x - 4$

(v) $p(x) = x^2 - 1$

4۔ کیوں $\frac{1}{4}$ اور -1 کثیر رکنی $p(x) = 4x^2+3x-1$ کے صفر ہیں؟

SCERT TELANGANA

3.5 کثیر رکنیوں کے صفر اور ضریبوں کے درمیان رشتہ:

پہلے ہی آپ مشاہدہ کر چکے ہیں کہ خطی کثیر رکنی $ax+b$ کا صفر $-\frac{b}{a}$ ہے۔اب ہم دو درجی کثیر رکنی کے صفروں اور اس کے ضریبوں کے درمیان رشتہ اخذ کرنے کی کوشش کریں گے۔اس کے لیے آیئے دو درجی کثیر رکنی $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ لیں گے۔

آپ جماعت نہم میں سیکھ چکے ہیں کہ درمیانی رکن کے ٹکڑے کرتے ہوئے کس طرح کثیر رکنی کے اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں۔لہذا اب ہم درمیانی رکن کے ایسے دو اجزاء بناتے ہیں جن کا مجموعہ $-8x$ ہو۔اور جن حاصل ضرب $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ہو۔لہذا

$$\begin{aligned}2x^2 - 8x + 6 &= 2x^2 - 6x - 2x + 6\\ &= 2x(x-3) - 2(x-3)\\ &= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ صفر ہوگا جب $x - 1 = 0$ یا $x - 3 = 0$ ہے۔یعنی $x = 1$ یا $x = 3$ ‘لہذا $2x^2 - 8x + 6$ کے صفر 1 اور 3 ہیں۔اب ہم یہ معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ کیا ان صفروں کا کثیر رکنیوں کے ارکان کے ضریبوں سے کوئی رشتہ ہے۔ x^2 کا ضریب ’2‘ ہے۔ ’x‘ کا عددی ضریب -8 ہے اور مستقل رکن 6 ہے۔جو x^0 کا ضریب ہے۔(یعنی $6x^0=6$)

ہم دیکھتے ہیں کہ $\dfrac{-(x \text{ کا عددی ضریب})}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{-(-8)}{2} = 4 = 1 + 3 =$ صفروں کا مجموعہ

$\dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{6}{2} = 3 = 1 \times 3 =$ صفروں کا حاصل ضرب

آیئے مزید ایک دو درجی کثیر رکنی پر غور کرتے ہیں۔

$$p(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

درمیانی رکن کے ٹکڑے کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\begin{aligned}3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)\\ &= (3x-1)(x+2)\end{aligned}$$

$3x^2 + 5x - 2$ صفر ہوتا ہے جب کہ $3x - 1 = 0$ ہو یا $x + 2 = 0$ ہو

یعنی جب $x = \frac{1}{3}$ یا $x = -2$

$3x^2 + 5x - 2$ کے صفر $\frac{1}{3}$ اور -2 ہیں۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$\dfrac{-(x \text{ کا عددی ضریب})}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{1}{2} + (-2) =$ صفروں کا مجموعہ

$\dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{1}{3} \times (-2) =$ صفروں کا حاصل ضرب

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل دو درجی کثیر رکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے۔ صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے اور ان صفروں کا کثیر رکنیوں کے ارکان کے ضریبوں کے رشتہ کی تصدیق کیجیے۔

(i) $p(x) = x^2 - x - 6$ (ii) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(iii) $p(x) = x^2 - 4$ (iv) $p(x) = x^2 + 2x + 1$

عموماً اگر α اور β دو درجی کثیر رکنی $p(x) = ax^2 + bx + c$ جہاں $a \neq 0$ کے صفر ہوں تب $(x - \alpha)$ اور $(x - \beta)$،
p(x) کے اجزائے ضربی ہونگے۔ اسی لیے

$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta)$ جہاں k ایک مستقل ہے۔

$$ax^2 + bx + c = k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$ax^2 + bx + c = kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

مساوات کے دونوں جانب x, x^2 کے ضریبوں اور مستقل ارکان کا تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ اور $c = k\alpha\beta$

اس سے حاصل ہوتا ہے $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$

$$\alpha + \beta = \frac{c}{a}$$

نوٹ: α ، β یونانی زبان کے حروف ہیں جنہیں بالترتیب 'الفا' alpha اور 'بیٹا' beta پڑھتے ہیں۔ آگے ہم ایک اور حرف 'γ' جس کا تلفظ گاما ہے استعمال کرینگے۔

لہٰذا $ax^2 + bx + c$ دو درجی کثیر رکنی کے صفروں کا مجموعہ $= (\alpha+\beta) = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{x \text{ کا عددی ضریب}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$

$ax^2 + bx + c$ دو درجی کثیر رکنی کے صفروں کا حاصل ضرب $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$

مثال -3: دو درجی کثیر رکنی $x^2 + 7x + 10$ کے صفروں کو معلوم کیجیے اور صفروں اور ضریبوں کے درمیانی رشتہ کی تصدیق کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

SCERT TELANGANA

لہذا کثیر رکنی $x^2 + 7x + 10$ کی قدر صفر ہوگی جبکہ $x + 2 = 0$ یا $x + 5 = 0$ ہو

یعنی، جب کہ $x = -2$ یا $x = -5$

اس لیے $x^2 + 7x + 10$ کے صفر -2 اور -5 ہیں۔

اب $\dfrac{-(x \text{ کا عددی ضریب})}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{-(7)}{1} = -(7) = -2 + (-5) =$ صفروں کا مجموعہ

$\dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}} = \dfrac{10}{1} = 10 = -2 \times (-5) =$ صفروں کا حاصل ضرب

مثال-4: دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3$ کے صفروں کو معلوم کیجیے صفروں اور ضریبوں کے درمیان رشتہ کی تصدیق کیجیے

حل: متماثلہ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ کو ذہن میں لائیے

اس کو استعمال کرتے ہوئے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

لہذا $x^2 - 3$ کی قدر صفر ہوتی ہے جبکہ $x = \sqrt{3}$ یا $x = \sqrt{3}$

اس لیے $x^2 - 3$ کے صفر $\sqrt{3}$ اور $-\sqrt{3}$ ہیں۔

$\dfrac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 =$ صفروں کا مجموعہ

$\dfrac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}} = \dfrac{-3}{1} = -3 = (\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) =$ صفروں کا حاصل ضرب

مثال - 5: دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجیے جس کے صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب -3 اور 2 ہے۔

حل: مان لیجیے کہ دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ ہے۔ اس کے صفر α اور β ہیں۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

اور $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

اگر ہم $a=1$ لیں تب $b=3$ اور $c=2$ ہوگا۔

لہذا دیے ہوئے شرائط کو مطمئن کرنے والی ایک دو درجی کثیر رکنی $x^2 + 3x + 2$ ہے۔

SCERT TELANGANA

اسی طرح، a کوئی بھی حقیقی عدد لے سکتے ہیں، مان لیجیے کہ یہ عدد 'k' ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{-b}{k}=-3$ یا $b=3k$ اور $\frac{c}{k}=2$ یا $c=2k$

a، b اور c کی قدریں درج کرنے سے ہمیں $kx^2+3kx+2k$ کثیر رکنی حاصل ہوتی ہے۔

مثال - 6: دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجیے جس کے صفر 2 اور $\frac{-1}{3}$ ہیں۔

حل: مان لیجیے کہ دو درجی کثیر رکنی $ax^2+bx+c, a\neq 0$ ہے اور اس کے صفر α اور β ہیں۔

یہاں $\alpha=2$، $\beta=\frac{-1}{3}$

صفروں کا مجموعہ $(\alpha+\beta)=2+\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

صفروں کا حاصل ضرب $=\alpha\beta=2\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-2}{3}$

دو درجی کثیر رکنی ax^2+bx+c اس طرح ہوگی

$k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$ جہاں 'k' ایک مستقل ہے

$$=k\left[x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right]$$

'k' کی کسی بھی قدر کے لیے جہاں $k\neq 0$ مطلوبہ کثیر رکنی $k\left[x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right]$ ہوگی۔

'k' کی مختلف قدر لینے پر

اگر $k=3$ تب $k\left[x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right]$ کثیر رکنی اس طرح ہوگی $3x^2-5x-2$

اور اگر $k=6$ تب $k\left[x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right]$ کثیر رکنی اس طرح ہوگی $6x^2-10x-4$

کوشش کیجیے

1۔ صفر -2 اور $\frac{1}{3}$ والی ایک دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجیے۔

2۔ دو درجی کثیر رکنی کیا ہے جس کے صفروں کا مجموعہ $\frac{-3}{2}$ اور صفروں کا حاصل ضرب -1 ہیں۔

SCERT TELANGANA

3.6 مکعبی کثیر رکنی Cubic Polynomials:

آیئے مکعبی کثیر رکنی پر غور کریں۔ کیا آپ سوچتے ہیں مندرجہ بالا حاصل رشتوں کی طرح ہی مکعبی کثیر رکنی کے صفر اور اس کے ضریب کے درمیان رشتہ ہوتا ہے۔

آیئے ہم غور کرتے ہیں $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$

ہم دیکھتے ہیں کہ $p(x) = 0$ کے لیے $x = 4, -2, \frac{1}{2}$

چونکہ $p(x)$ کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہو سکتے ہیں۔ یہ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ کے صفر ہیں۔

اس کے صفروں کا مجموعہ $= 4+(-2)+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ کا عددی ضریب})}{x^3 \text{ کا عددی ضریب}}$

اس کے صفروں کا حاصل ضرب $= 4+(-2)\times\frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{مستقل رکن})}{x^3 \text{ کا عددی ضریب}}$

تا ہم یہاں ایک اور زائد رشتہ ہے۔ غور کیجیے بہ یک وقت دو صفروں کے حاصل ضرب کا مجموعہ لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$= \{4\times(-2)\} + \left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$$

$$= -8-1+2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^3 \text{ کا عددی ضریب}}$$

عموماً اگر ایک مکعبی کثیر رکنی ax^3+bx^2+cx+d کے صفر α، β اور γ ہوں تب ثابت کیا جاسکتا ہے

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

α، β، γ صفروں والی ایک کثیر رکنی ax^3+bx^2+cx+d ہے۔ آیئے دیکھیں گے α، β، γ اور a، b، c اور d سے کس طرح کا رشتہ رکھتے ہیں۔ چونکہ α، β، γ صفر ہیں کثیر رکنی کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$$

کثیر رکنی کی مماثلت کے لیے ہم a سے ضرب دیتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

یعنی $= x^3 - x^2(\alpha+\beta+\gamma) + x(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - \alpha\beta\gamma$ کو 'a' سے ضرب دینے پر

اور $ax^3 - x^2a(\alpha+\beta+\gamma) + xa(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma$

ax^3+bx^2+cx+d سے تقابل کرنے پر حاصل ہوتے ہیں

$$\therefore b = -a(\alpha+\beta+\gamma), c = a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma), d = -a\alpha\beta\gamma$$

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے۔

اگر α, β, γ دی گئی کثیر رکنیوں کے صفر ہیں متعلقہ قدریں معلوم کر کے جدول میں درج کیجیے۔

S.No.	مکعبی کثیر رکنی	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$	$\alpha\beta\gamma$
1	x^3+3x^2-x-2			
2	$4x^3+8x^2-6x-2$			
3	x^3+4x^2-5x-2			
4	x^3+5x^2+4			

آیئے ایک مثال پر غور کریں۔

مثال -7: تصدیق کیجیے کہ 3 , -1 اور $-\frac{1}{3}$ مکعبی کثیر رکنی, $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ کے صفر ہیں یا نہیں اور مزید ان صفروں اور ضربیوں کے درمیانی رشتے کی جانچ کیجیے۔

حل: دی گئی کثیر رکنی کا $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$a=3$, $b=-5$, $c=-11$ اور $d=-3$ علاوہ ازیں

$$P(3)=3(3)^3-5(3)^2-11(3)-3=81-45-33-3=0$$

$$P(-1)=3(-1)^3-5(-1)^2-11(-1)-3=-3-5+11-3=0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

لہٰذا 3 , -1 اور $\frac{-1}{3}$ ، کثیر رکنی $3x^3-5x^2-11x-3$ کے صفر ہیں۔

چنانچہ ہم $\alpha=3$, $\beta=-1$ ، $\gamma=\frac{-1}{3}$ لیتے ہیں

حل: دی گئی کثیر رکنی کا کثیر رکنی ax^3+bx^2+cx+d سے تقابل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$a=3$, $b=-5$, $c=-11$ اور $d=-3$

$$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=3t(-1)+\left(\frac{-1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{-b}{a}$$

$$\therefore\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3t(-1)+(-1)\times\left(\frac{-1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{3}\right)\times3=-3+\frac{1}{3}-1=\frac{-11}{3}=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \alpha\beta\gamma=3\times(-1)\times\left(\frac{-1}{3}\right)=1=\frac{-(-3)}{3}=\frac{-d}{a}$$

SCERT TELANGANA

مشق 3.3

1۔ ذیل کی دو درجی کثیر رکنیوں کے صفروں کو معلوم کیجیے اور صفروں اور ضربیوں کے درمیان رشتے کی جانچ کیجیے۔

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2۔ دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجیے جبکہ دیئے گئے اعداد بالترتیب اس کے صفروں کا مجموعہ اور حاصل ضرب ہے۔

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

3۔ دیئے گئے α، β صفروں کے لیے دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجیے

(i) $2, -1$ (ii) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ (iii) $\frac{1}{4}, -1$ (iv) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

4۔ تصدیق کیجیے $1, -1$ اور 3 مکعبی کثیر رکنی $x^3 - 3x^2 - x + 3$ کے صفر ہیں۔ صفروں اور ضربیوں کے درمیان رشتے کی جانچ کیجیے۔

3.7 کثیر رکنیوں کی تقسیمی الگورتھم (مسئلہ تقسیم) Division Algorithm for polynomials

آپ جانتے ہیں کہ ایک مکعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔ اگر آپ کو صرف ایک صفر دیا جائے تو کیا آپ باقی دو صفر معلوم کر سکتے ہیں؟ اس کے لیے آیئے ایک مکعبی کثیر رکنی $x^3 - 3x^2 - x + 3$ پر غور کریں۔

اگر اس کا ایک صفر '1' ہے۔ تب آپ جانتے ہیں کہ یہ کثیر رکنی $(x-1)$ سے قابل تقسیم ہے۔ دی گئی کثیر رکنی کو $(x-1)$ سے تقسیم کرنے پر $x^2 - 2x - 3$ خارج قسمت حاصل ہوگا۔

$x^2 - 2x - 3$ کے اجزائے ضربی درمیانی رکن کے ٹکڑے کر کے حاصل کرتے ہیں اجزائے ضربی $(x+1)$ اور $(x-3)$ ہیں۔

ان سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

لہٰذا مکعبی کثیر رکنی کے صفر $1, -1$ اور 3 ہیں۔

آیئے ہم تفصیل سے تبادلہ خیال کریں گے کہ کس طرح ایک کثیر رکنی دوسری کثیر رکنی کو تقسیم کرتی ہے اور ان اقدامات سے قبل ایک مثال پر غور کریں۔

SCERT TELANGANA

مثال - 8: $2x^2+3x+1$ کو $x+2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل: غور کیجیے کہ ہم عمل تقسیم اس وقت روک دیتے ہیں جب باقی صفر '0' ہو یا اس کا درجہ مقسوم علیہ سے کم ہو لہٰذا یہاں خارج قسمت 2x-1 اور باقی 3 ہے اور

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x+2\overline{)\,2x^2+3x+1} \\ 2x^2+4x \\ -\quad - \\ \hline -x+1 \\ -x-2 \\ +\quad + \\ \hline 3 \end{array}$$

$$(2x-1)(x+2)+3 = 2x^2+3x-2+3$$
$$= 2x^2+3x+1$$
$$2x^2+3x+1 = (x+2)(2x-1)+3$$

یعنی $\boxed{\text{باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم}}$

آیئے اب اس طریقہ کو توسیع دیتے ہوئے ایک کثیر رکنی کو دو درجی کثیر رکنی سے تقسیم کرتے ہیں۔

مثال - 9: مکعبی کثیر رکنی $3x^3+x^2+2x+5$ کو دو درجی کثیر رکنی $1+2x+x^2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل: پہلے ہم مقسوم اور مقسوم علیہ کے ارکان کو ان کے درجوں کی تنزلی ترتیب میں لکھیں گے ان کی اس طرح کی ترتیب کو کثیر رکنیوں کی معیاری شکل کہتے ہیں۔ اس مثال میں مقسوم پہلے ہی سے اپنی معیاری شکل میں موجود ہے اور مقسوم علیہ کی معیاری شکل x^2+2x+1 ہے۔

$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x^2+2x+1\overline{)\,3x^3+x^2+2x+5} \\ 3x^3+6x^2+3x \\ -\quad -\quad - \\ \hline -5x^2-x+5 \\ -5x^2-10x-5 \\ +\quad +\quad + \\ \hline 9x+10 \end{array}$$

مرحلہ - 1: خارج قسمت کے پہلے رکن کو حاصل کرنے کے لیے مقسوم کے اعظم درجے رکن (یعنی $3x^3$) کو مقسوم علیہ کے اعلیٰ درجے کے رکن (یعنی x^2) سے تقسیم کرتے ہیں۔ یہ '3x' ہے تب تقسیم کے عمل کو مکمل کیجیے باقی $-5x^2-x+5$ ہے

مرحلہ - 2: اب خارج قسمت کے دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے نئے مقسوم کے اعظم درجے کے رکن (یعنی $-5x^2$) کو مقسوم علیہ کے اعظم درجے کے رکن (یعنی x^2) سے تقسیم کیجیے۔ ی(-5) حاصل ہوتا ہے۔ $-5x^2-x+5$ کے تقسیم کے عمل کو جاری رکھیئے۔

مرحلہ - 3: باقی $9x+10$ ہے اب $9x+10$ کا درجہ مقسوم علیہ 'x^2+2x+1' کے درجے سے کم ہے۔ لہٰذا ہم تقسیم کے عمل کو آگے جاری نہیں رکھ سکتے ہیں۔

لہٰذا خارج قسمت $3x-5$ اور باقی $9x+10$ ہے

$$(x^2+2x+1)\times(3x-5)+(9x+10) = (3x^3+6x^2+3x-5x^2-10x-5+9x+10)$$
$$= 3x^3+x^2+2x+5$$

یہاں ہم دوبارہ دیکھتے ہیں کہ

باقی + خارج قسمت × مقسوم علیہ = مقسوم

SCERT TELANGANA

یہاں ہم ایک الگورتھم استعمال کرتے ہیں جو اقلیدس کا تقسیمی الگورتھم کہلاتا ہے اس کے مطابق

اگر $p(x)$ اور $g(x)$ کوئی دو کثیر رکنیاں ہیں جہاں $g(x) \neq 0$، تب ہم کثیر رکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ اس طرح معلوم کرسکتے ہیں

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

جہاں یا تو $r(x) = 0$ ، $g(x)$ کا درجہ > $r(x)$ کا درجہ اگر $r(x) \neq 0$

یہ نتیجہ کثیر رکنیوں کے لیے **تقسیمی الگورتھم** کے طور پر جانا جاتا ہے۔

اب مذکورہ بالا بحث سے حسب ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(i) اگر $g(x)$ ایک خطی کثیر رکنی ہے تب $r(x) = r$ ایک مستقل ہوگا۔

(ii) اگر $g(x)=1$ ہو تب $q(x)$ کا درجہ $+1=$ $p(x)$ کا درجہ

(iii) اگر $p(x)$ کو $x - a$ سے تقسیم کیا جائے تب باقی $p(a)$ ہوگا۔

(iv) اگر $r = 0$ ہم کہہ سکتے ہیں کہ $q(x)$، $p(x)$ کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔ یا $q(x)$، $p(x)$ کا جز ضربی ہے۔

اس کے استعمال کی تشریح کے لیے آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال - 10: $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ کو $x - 1 - x^2$ سے تقسیم کیجیے اور تقسیمی الگورتھم کی تصدیق کیجیے؟

حل: غور کیجیے کہ دی گئی کثیر رکنیاں معیاری شکل میں نہیں ہیں۔ عمل تقسیم سے قبل ہم دونوں مقسوم اور مقسوم علیہ کے ارکان کو ان کے درجوں کی نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔

مقسوم $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

مقسوم علیہ $= -x^2 - x - 1$

تقسیمی عمل کو بائیں جانب دیکھایا گیا ہے

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
-x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\
 & -x^3 + x^2 - x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 2x^2 - 2x + 5 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & 3
\end{array}$$

یہاں پر ہم رک جاتے ہیں چونکہ باقی کا درجہ مقسوم علیہ $(-x^2 - x - 1)$ کے درجے سے کم ہے۔

لہذا خارج قسمت $= x - 2$ ، باقی $= 3$

مقسوم = مقسوم علیہ x خارج قسمت + باقی

$= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3$

$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$

$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

اس طرح تقسیمی الگورتھم کی تصدیق ہوئی۔

SCERT TELANGANA

مثال - 11: کثیر رکنی $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ کے تمام صفروں کو معلوم کیجیے۔اس کے دو صفر $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔

حل: چونکہ صفروں میں سے دو صفر $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔

اس لیے $(x-\sqrt{2})\;(x+\sqrt{2}) = x^2 - 2$ سے تقسیم کر سکتے ہیں

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 \qquad + 6x \\
 & + \qquad\quad - \\
\hline
 & x^2 - 2 \\
 & x^2 - 2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

خارج قسمت کا پہلا رکن $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

خارج قسمت کا دوسرا رکن $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

خارج قسمت کا تیسرا رکن $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

لہٰذا $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)\,(2x^2 - 3x + 1)$

$(-3x)$ کے ٹکڑے کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کرنے پر ہمیں $(2x-1)(x-1)$ حاصل ہوتا ہے۔لہٰذا اس کے صفر $x = \dfrac{1}{2}$ اور $x = 1$ ہیں۔

اس لیے دی گئی کثیر رکنیوں کے صفر $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ ، '1' اور $\dfrac{1}{2}$ ہیں۔

مشق 3.4

1۔ مندرجہ ذیل میں دی گئی کثیر رکنی $p(x)$ کو کثیر رکنی $g(x)$ سے تقسیم کیجیے۔خارج قسمت اور باقی معلوم کیجیے۔

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

SCERT TELANGANA

2۔ دوسری کثیر رکنی کو پہلی کثیر رکنی سے تقسیم کرتے ہوئے جانچ کیجیے کہ کس صورت میں پہلی کثیر رکنی دوسری کثیر رکنی کا جز ضربی ہے۔

(i) $2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12\ ,\ t^2 - 3$

(ii) $3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2,\ \ x^2 + 3x + 1$

(iii) $x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1,\ \ x^3 - 3x + 1$

3۔ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ کے تمام صفروں کو معلوم کیجیے اگر اس کے دو صفر $\sqrt{\frac{5}{3}}$ اور $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ہیں

4۔ $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ' کو کثیر رکنی $g(x)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت اور باقی بالترتیب x-2 اور -2x+4 ہے تب $g(x)$ معلوم کیجیے۔

5۔ $p(x), g(x), q(x)$ اور $r(x)$ کی مثالیں دیجیے جو تقسیمی الگورتھم کو مطمئن کرتے ہیں اور

(i) $deg\ p(x) = deg\ q(x)$ (ii) $deg\ q(x) = deg\ r(x)$ (iii) $deg\ r(x) = 0$

مشق اختیاری

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مکعبی کثیر رکنیوں کے ساتھ میں بازو دیئے گئے اعداد ان کے صفر ہیں اور ہر صورت میں صفروں اور ضریبوں میں رشتہ کی بھی جانچ کیجیے۔

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2\ ;\ (\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) $x^3 + 4x^2 + 5x - 2\ ;\ (1, 1, 1)$

2۔ ایک مکعبی کثیر رکنی معلوم کیجیے جن کے صفروں کا مجموعہ، ایک وقت میں دو صفروں کے حاصل ضرب کا مجموعہ اور تین صفروں کے حاصل ضرب بالترتیب 2 , 7- اور 14- ہیں۔

3۔ اگر کثیر رکنی $x^3 - 3x^2 + x + 1$ کے صفر $a - b$ ' a اور $a + b$ ہیں تب a ' اور b معلوم کیجیے۔

4۔ اگر کثیر رکنی $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ کے دو صفر $2 \pm \sqrt{3}$ ہیں تب دوسرے صفر معلوم کیجیے۔

5۔ اگر کثیر رکنی $x^4 - 6x^3 - 16x^2 + 25x + 10$ کو ایک دوسری کثیر رکنی $x^2 - 2x + k$ سے تقسیم کرتے ہیں تو باقی $x + a$ حاصل ہوتا ہے k اور a کی قدر معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

تجویز کردہ منصوبہ کام

دودرجی کثیر رکنی۔ کثیر رکنی کا صفر۔ جیومیٹریائی مفہوم رترسیم

مختلف شرائط کے لیے دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کی ترسیمات کھینچئے اور ان پر تبصرہ کیجیے۔

(i) $a>0$ (ii) $a<0$ (iii) $a=0$

(iv) $b>0$ (v) $b<0$ (vi) $b=0$

ہم نے کیا سیکھا

1۔ 1، 2، اور 3 درجہ والی کثیر رکنیاں بالترتیب خطی، دودرجی اور مکعبی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔

2۔ 'x' میں حقیقی ضریبوں والی دودرجی کثیر رکنی کی شکل $ax^2 + bx + c$ ہے جہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ اور $a \neq 0$

3۔ کثیر رکنی $p(x)$ کے صفران نقاط کے x-مختصات ہیں جہاں $y = p(x)$ کا گراف x- محور کو قطع کرتا ہے

4۔ ایک دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر اور مکعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہوتے ہیں۔

5۔ اگر α اور β دودرجی کثیر رکنی $a \neq 0$ ، $ax^2 + bx + c$ کے صفر ہیں تب $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

6۔ اگر α ، β ، γ معکبی کثیر رکنی $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$ کے صفر ہیں تب

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

اور
$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

7۔ تقسیمی الگورتھم بیان کرتا ہے کہ دی گئی کسی بھی کثیر رکنی $p(x)$ اور غیر صفری کثیر رکنی $g(x)$ کے لیے دو رکثیر رکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ اس طرح حاصل ہوتی ہیں کہ

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

جہاں $r(x) = 0$ یا $r(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجے سے چھوٹا ہوتا ہے اگر $r(x) \neq 0$

SCERT TELANGANA

باب
4

دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ
Pair of Linear Equations in Two Variables

4.1 تمہید

ایک دن نازیہ اپنے والد کے ہمراہ ایک کتابوں کی دکان پہونچی انہوں نے 3 نوٹ بک اور 2 پن خریدے جس کے لیے اس کے والد نے 80 روپیے ادا کیے۔ نازیہ کی سہیلی امرین کو وہ نوٹ بک اور پن پسند آئے اور اس نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110 روپیے میں خریدے ان کے ہم جماعت ساتھ رشمی کو پن اور جوزف کو نوٹ بک پسند آئی۔ انہوں نے نازیہ سے ایک پن کی اور ایک نوٹ بک کی قیمت دریافت کی۔ لیکن نازیہ کو ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت نہیں معلوم تھی۔ وہ لوگ ان کی علحدہ قیمت کس طرح معلوم کریں گے؟

اوپر دی گئی مثال میں ایک پن اور ایک نوٹ بک کی قیمت نہیں معلوم ہے یہ نامعلوم مقداریں ہیں۔ ہم روزمرہ زندگی میں ایسے کئی حالات سے دوچار ہوتے ہیں۔

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے

ذیل میں دو حالات/صورتیں دی گئی ہیں

1۔ کسی دن 2 کلوٹماٹر اور 1 کلو آلو کی قیمت 30` تھی۔ دو دن بعد 2 کلو آلو اور 4 کلو ٹماٹر کی قیمت 66` ہوگئی۔

2۔ ایم۔ کے نگر ہائی اسکول کی کرکٹ ٹیم کے کوچ نے 3 بلے (Bats) اور 6 گیند 3900` میں خریدے۔ اس کے بعد انہوں نے مزید ایک بلا (Bat) اور 2 گیند 1300` میں خریدے۔

مندرجہ بالا صورتوں میں نامعلوم مقداروں کی نشاندہی/ شناخت کیجیے۔ ہم نے یہ مشاہدہ کیا کہ ہر صورت میں دو نامعلوم مقداریں ہیں۔

4.1.1 : نامعلوم مقداروں کو ہم کس طرح معلوم کرتے ہیں۔

تمہید میں دی گئی مثال میں، نازیہ 3 نوٹ بک اور 2 پن 80` میں خریدتی ہے ہم ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت کس طرح معلوم کریں گے؟

رشمی اور جوزف اندازہ لگانے کی کوشش کرتے ہیں۔ رشمی کہتی ہے کہ ایک نوٹ بک کی قیمت 25` ہوگی تب تین نوٹ بک کی قیمت 75` ہوگی۔ دو پن کی قیمت 5` ہوگی تب ایک پن 2.50` میں ہوگا۔

جوزف نے سوچا کہ ایک پن کی قیمت کے لیے 2.50` بہت کم ہوتے ہیں اس پن کی کم سے کم قیمت 16` ہونی چاہیے تب ایک نوٹ بک کی قیمت بھی 16` ہوگی۔

SCERT TELANGANA

ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ نوٹ بک اور پن کی قیمت کے لیے کئی قدریں ہوسکتی ہیں۔ تا کہ کل قیمت 80` ہو۔ تب ہم یہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ نازیہ اور امرین نے نوٹ بک اور پن کس قیمت میں خریدے؟ صرف نازیہ کی ادا کی گئی قیمت کے استعمال سے ہم نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت نہیں معلوم کر سکتے۔ ہمیں امرین کے ذریعہ ادا کی گئی قیمت بھی استعمال کرنا ہوگا۔

4.1.2 ایک ساتھ دونوں مساواتوں کا استعمال

امرین نے وہی نوٹ بک اور پن خریدا ہے جو نازیہ نے خریدا۔ امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن کے لیے 110` ادا کئے لہذا ہمارے دو صورتیں ہیں جس کو ہم ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

(i) 3 نوٹ بک +2 پن کی قیمت = `80

(ii) 4 نوٹ بک +3 پن کی قیمت = `110

کیا ہم ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں،

رشمی کے ذریعہ اندازہ لگائی گئی قیمت پر غور کیجیے۔ اگر ایک نوٹ بک کی قیمت 25` اور ایک پن کی قیمت 2.50` ہو تب

4 نوٹ بک کی قیمت : 4×25 = `100

اور 3 پن کی قیمت : 3×2.50 = `7.50

اگر رشمی کا اندازہ درست ہے تب امرین کو 7.50` +100` =107.50` ادا کرنے ہوں گے۔ لیکن رشمی نے 110` ادا کیے۔

اب ہم جوزف کے اندازہ کی گئی قیمت پر غور کریں گے۔

جبکہ 4 نوٹ بک کی قیمت اگر ایک نوٹ بک 16` ہو تب : $4\times16$=64`

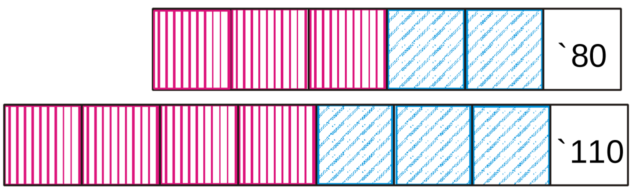
جبکہ 3 پن کی قیمت اگر ایک پن 16` ہو تب : $3\times16$=48`

اگر جوزف کا اندازہ درست ہے تب امرین کو 112` ادا کرنے ہوں گے۔ لیکن امرین کی ادا کردہ قیمت سے زیادہ ہے۔

اصل تب ہم کیا کریں گے؟ ایک نوٹ بک اور ایک پن کی قیمت خرید ہم کس طرح معلوم کریں گے؟

اگر ہمارے پاس ایک ہی مساوات جو دو نامعلوم مقداریں (متغیرات) میں ہوں تب ہم کئی جوابات معلوم کر سکتے ہیں۔ لہذا جب ہمارے پاس دو متغیرات ہوں، ہمیں کم سے کم دو غیر منحصر مساوات (Independent Equations) کی ضرورت ہوگی۔ تا کہ صحیح حل حاصل ہو۔ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کا ایک طریقہ ''مثالی طریقہ'' (Model Method) ہے۔ اس طریقہ میں نامعلوم مقداروں کو ظاہر کرنے کے لیے مستطیل یا مستطیل کے حصے استعمال کیے جاتے ہیں آیئے ہم اوپر کی مثال کو اس طریقے سے غور کرتے ہیں۔

مرحلہ-1: نوٹ بک کو اس خانہ سے اور پن کو سے ظاہر کریں۔

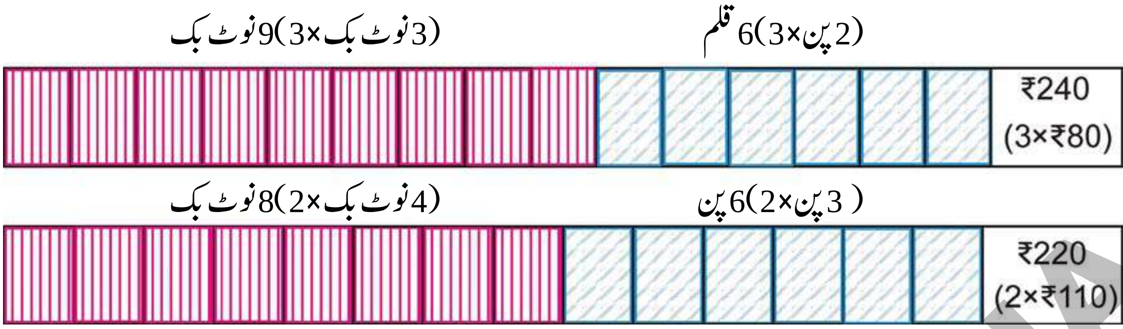


نازیہ نے 3 نوٹ بک اور 2 پن 80` میں خریدی

امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110` میں خریدی

SCERT TELANGANA

مرحلہ-2: مقداروں کو بڑھایئے (یا گھٹایئے) تا کہ کوئی مقدار دونوں صورتوں میں مساوی ہو جائے۔ یہاں پر ہم پنوں کی تعداد کو مساوی کریں گے۔



مرحلہ 2 میں ہم سادہ تناسبی منطق کا مشاہدہ کرتے ہیں

چونکہ نازیہ نے 3 نوٹ بکس اور 2 پن 80` میں خریدیں' لہذا 9 نوٹ بک اور 6 پن:

پن 6=2×3 اور نوٹ بک 3×3=9

تب کل قیمت 240=3×80` .... (1)

اسی طرح سے امرین نے 4 نوٹ بک اور 3 پن 110` میں خریدیں تب:

پن 6=2×3 اور نوٹ بک 2×4=8

تب کل قیمت 220=2×110` .... (2)

مساوات (1) اور (2) کا تقابل کرنے پر' ہم بہ آسانی یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک زائد نوٹ بک کی قیمت 20` = 220 ` - 240` ۔تب ایک نوٹ بک کی قیمت 20` ہوگی۔

نازیہ نے 3 نوٹ بک اور 2 پن 80` روپے میں خریدیں چونکہ ایک نوٹ بک کی قیمت 20` ہے 3 نوٹ بک کی قیمت 60` ہوگی۔ لہذا 2 پن کی قیمت 20 ` = 60 ` - 80 ` ہوگی۔

لہذا ایک پن کی قیمت 2÷20` = 10`

آیئے ہم ان قیمتوں کو امرین کی ادا کردہ قیمت کے مطابق جانچ لیں۔ 4 نوٹ بک کی قیمت 80` ہوگی اور 3 قلم کی قیمت 30` ہوگی تب کل قیمت 110` ہوگی جو درست ہے۔

مندرجہ بالا مباحثہ اور حساب سے یہ واضح ہوتا ہے کہ مطلق حل سٹ (منفرد حل سٹ) کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں دو متغیرات پر مبنی کم سے کم دو غیر منحصر (Independent) مساوات کی ضرورت ہوگی۔

عام طور پر ایک مساوات جو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ہو دو متغیرات x اور y پر مبنی خطی مساوات کہلاتی ہے۔ جہاں a' b اور c حقیقی اعداد ہیں۔ جہاں پر a اور b میں کم سے کم کوئی ایک صفر نہ ہو (عام طور پر ہم اس شرط کو $a^2 + b^2 \neq 0$ لکھتے ہیں)

کوشش کیجیے

ذیل کے سوالات کے صحیح جواب کا انتخاب کیجیے؟

1۔ ذیل میں کونسی مساوات خطی مساوات نہیں ہے

(a) $5 + 4x = y + 3$ (b) $x+2y = y - x$ (c) $3 - x = y^2 + 4$ (d) $x + y = 0$

SCERT TELANGANA

2۔ ذیل میں کونسی مساوات واحد متغیر پر خطی مساوات ہے۔

a) $2x + 1 = y - 3$ b) $2t - 1 = 2t + 5$

c) $2x - 1 = x^2$ d) $x^2 - x + 1 = 0$

3۔ ذیل میں دیا گیا کونسا عدد مساوات $2(x + 3) = 18$ کا حل ہے؟

a) 5 b) 6 c) 13 d) 21

4۔ x کی کونسی قدر مساوات $2x - (4 - x) = 5 - x$ کو مطمئن کرتی ہے۔

a) 4.5 b) 3 c) 2.25 d) 0.5

5۔ مساوات $x - 4y = 5$ کا

a) کوئی حل نہیں b) منفرد حل سٹ ہے c) دو حل سٹ ہیں d) لامحدود کئی حل سٹ ہیں

4.2 دو متغیرات میں خطی مساوات کی جوڑ کا حل:

تمہید میں دی گئی نوٹ بک اور پن کی مثال میں کتنی مساواتیں ہیں؟ ہمارے پاس دو مساواتیں ہیں یا دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ ہے۔ ایک خطی مساوات کے جوڑ کے حل سٹ سے کیا مراد ہے؟

متغیرات x اور y کی قدروں کی جوڑ جو دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتا ہے خطی مساوات کی جوڑ کا حل سٹ کہلاتا ہے۔

4.2.1 خطی مساوات کی جوڑ کا حل معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ

دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کے کتنے حل سٹ ہوتے ہیں؟ کیا ان کی تعداد لامتناہی یا ایک یا پھر ایک بھی نہیں۔

پچھلے حصہ میں ہم نے خطی مساوات کے جوڑ کے حل کے لیے مثالی طریقہ استعمال کیا۔ اب ہم ان مساوات کے حل کے لیے ترسیمی طریقہ کا استعمال کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات $a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0; (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$

دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ بناتی ہیں۔

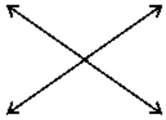
دو متغیرات میں خطی مساوات کی ترسیم ایک خط مستقیم ہوتی ہے۔ اس خط مستقیم پر پائے جانے والے حقیقی اعداد کے مرتب جوڑ (x,y) اس مساوات کے حل کو ظاہر کرتے ہیں۔ اور مرتب جوڑے (x,y) جو خط مستقیم پر واقع نہ ہوں وہ خطی مساوات کے حل نہیں ہوں گے۔

اگر ایک ہی مستوی کے دو خط مستقیم ہوں تب ان کے درمیان کیا رشتہ ممکن ہوسکتا ہے؟ اور اس رشتہ کی کیا اہمیت ہے؟

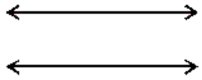
SCERT TELANGANA

جب کسی مستوی میں دو خط کھینچے گئے ہوں ان کے درمیان ذیل میں دیئے گئے تین صورتوں میں کوئی ایک صورت ممکن ہوگی۔

1۔ دو خط ایک نقطہ پر قطع کریں گے۔



2۔ دو خط آپس میں قطع نہ کریں یعنی وہ متوازی ہوں۔



3۔ دو خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے (یعنی دونوں یکساں ہوں)

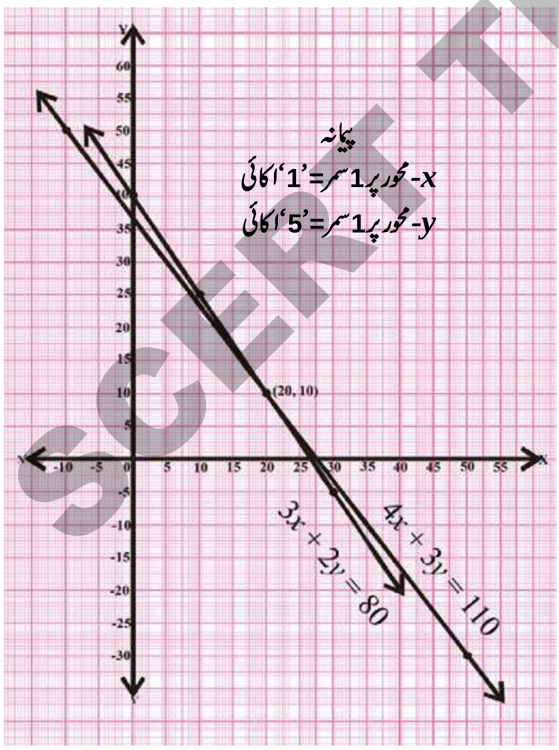
آیئے ہم پہلی مثال کو 'x' اور 'y' کے استعمال سے لکھتے ہیں جہاں x ایک نوٹ بک کی قیمت اور y ایک پن کی قیمت ہے۔ تب حاصل ہونے والی مساوات $3x+2y=80$ اور $4x+3y=110$ ہوں گی۔

مساوات $3x + 2y = 80$ کے لیے

x	$y = \frac{80-3x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{80-3(0)}{2} = 40$	(0, 40)
10	$y = \frac{80-3(10)}{2} = 25$	(10, 25)
20	$y = \frac{80-3(20)}{2} = 10$	(20, 10)
30	$y = \frac{80-3(30)}{2} = -5$	(30, -5)

مساوات $4x+3y = 110$ کے لیے

x	$y = \frac{110-4x}{3}$	(x, y)
-10	$y = \frac{110-4(-10)}{3} = 50$	(-10, 50)
20	$y = \frac{110-4(20)}{3} = 10$	(20, 10)
50	$y = \frac{110-4(50)}{3} = 30$	(50, -30)



اوپر کے نقاط کی کارتیزی مستوی میں نشاندہی کرنے پر ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو خطوط نقطہ (20,10) پر قطع کرتے ہیں۔

اوپر کی مساواتوں میں x اور y کی قدر درج کرنے پر

$4(20) + 3(10) = 110$ اور $3(20) + 2(10) = 80$

حاصل ہوگا۔

پس ترسیم سے ایک نوٹ بک کی قیمت 20` اور ایک پن کی قیمت 10` حاصل ہوئی۔ اعادہ کیجیے کہ ہمیں مثالی طریقے کے استعمال سے بھی یہی حل سٹ حاصل ہوا تھا۔

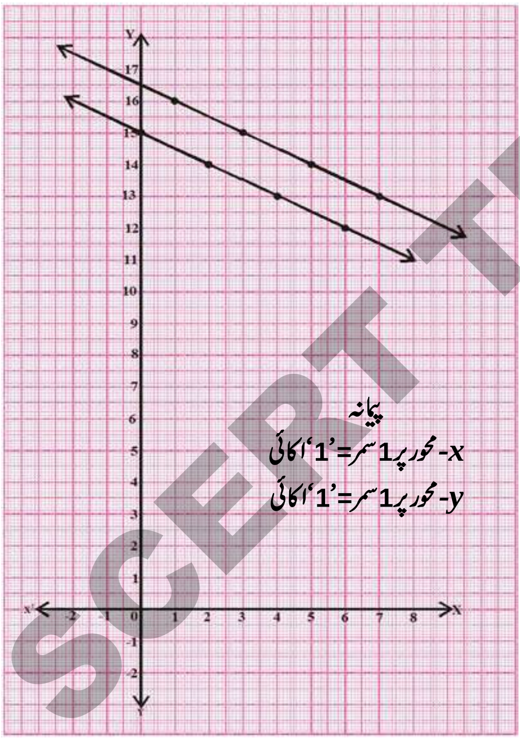
چونکہ صرف (20,10) ہی ایک مشترکہ نقطہ ہے۔ یہ خطی مساوات کا حل سٹ ایک ہی ہوگا۔ ایسی مساوات کا جوڑ "خطی مساواتوں کا حقیقی جوڑ" یا غیر منحصر جوڑ کہلاتا ہے۔ ان کا ہمیشہ ایک منفرد حل ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

آیئے سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے کے تحت دی گئی پہلی مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ہمیں 1 کلوٹماٹر اور 1 کلو آلو کی علحدہ علحدہ قیمت معلوم کرنا ہے۔فرض کروکہ 1 کلو آلو کی قیمت `$x$` اور 1 کلو ٹماٹر کی قیمت `$y$` روپے ہے۔تب یہ مساوات حاصل ہوگی۔ $1x+2y=30$ اور $2x+4y = 66$۔

مساوات $1x + 2y = 30$ کے لیے		
x	$y = \frac{30-x}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{30-0}{2} = 15$	(0, 15)
2	$y = \frac{30-2}{2} = 14$	(2, 14)
4	$y = \frac{30-4}{2} = 13$	(4, 13)
6	$y = \frac{30-6}{2} = 12$	(6, 12)

مساوات $2x+4y = 66$ کے لیے		
x	$y = \frac{66-2x}{4}$	(x, y)
1	$y = \frac{66-2(1)}{4} = 16$	(1, 16)
3	$y = \frac{66-2(3)}{4} = 14$	(3, 15)
5	$y = \frac{66-2(5)}{4} = 13$	(5, 14)
7	$y = \frac{66-2(7)}{4} = 12$	(7, 13)



اس ترسیم میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دومساوات سے بننے والے خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔ چونکہ خطوط قطع نہیں کرتے اس لیے ان دومساواتوں کا کوئی حل سٹ نہیں۔اس سے مراد یہ ہے کہ مختلف ایام میں ٹماٹر اور آلو کی قیمتیں مختلف ہے۔جس کا مشاہدہ ہم زندگی میں بھی کرتے ہیں۔ یہ تبدیلی غیر منحصر ہے

ایسا خطی مساواتوں کا جوڑا جس کا کوئی حل سٹ نہیں ہوتا۔غیر حقیقی خطی مساواتوں کا جوڑا کہلاتا ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے میں دیئے گئے دوسری مثال میں فرض کیجیے کہ ایک بلے کی قیمت `x` ہے اور ایک گیند کی قیمت `y` ہے۔ تب ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $x+2y = 1300$ اور $3x+6y=3900$

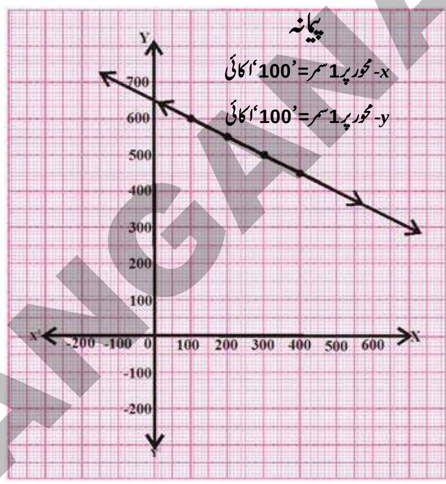
مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے		
x	$y = \frac{1300-x}{2}$	(x, y)
100	$y = \frac{1300-100}{2} = 600$	(100,600)

مساوات $2x+4y = 66$ کے لیے		
x	$y = \frac{3900-3x}{6}$	(x, y)
100	$y=\frac{3900-3(100)}{6} = 600$	(100,600)

SCERT TELANGANA

مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے		
200	$y = \dfrac{3900 - 3(200)}{6} = 550$	(200,500)
300	$y = \dfrac{3900 - 3(300)}{6} = 500$	(300,500)
400	$y = \dfrac{3900 - 3(400)}{6} = 450$	(400,450)

مساوات $x + 2y = 1300$ کے لیے		
200	$y = \dfrac{1300 - 200}{2} = 550$	(200,550)
300	$y = \dfrac{1300 - 300}{2} = 500$	(300,500)
400	$y = \dfrac{1300 - 400}{2} = 450$	(400,450)



ایک منطبق خطوط کی جوڑ کی مدد سے جیومیٹری طریقے سے مساواتوں کو بتایا گیا ہے اگر مساواتوں کے حل مشترک نقاط رکھتے ہیں تب اس صورت میں ان کے مشترک نقاط کیا ہیں؟

ترسیم میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ خط کا ہر ایک نقطہ دونوں مساواتوں کا مشترک حل رکھتا ہے اس طرح یہ دونوں مساواتیں جو معادل ہیں کئی لا متناہی حل رکھتے ہیں۔ اس طرح مساواتوں کے جوڑ **"دو متغیرات میں خطی مساواتوں کے منحصر اور Consistent pair کہلاتے ہیں"** مساواتوں کا نظام جو حل رکھتا ہے Consistent مساوات کے طور پر جانے جاتے ہیں۔

کوشش کیجیے

اوپر دی گئی مثال میں کیا آپ ایک بلہ (BAT) اور گیند کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں؟

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

کیا دیا گیا ہر منحصر مساواتوں کا جوڑ ہمیشہ حقیقی ہوتا ہے۔ کیوں؟ یا کیوں نہیں؟

یہ کیجیے

1۔ ذیل کی خطی مساواتوں کے نظام کو حل کیجیے۔

(i) $x - 2y = 0$ ، $3x + 4y = 20$ (ii) $x + y = 2$ ، $2x + 2y = 4$ (iii) $2x - y = 4$ ، $4x - 2y = 6$

2۔ ایک ریل کے راستے کی دو پٹریاں ذیل کے مساواتوں سے ظاہر کی گئی ہیں $x + 2y - 4 = 0$ اور $2x + 4y - 12 = 0$ تب ان مساواتوں کا ترسیمی اظہار کیجیے۔

4.2.3 مساواتوں کے نظام کی نوعیت اور عددی ضریبوں کے درمیان رشتہ

فرض کرو کہ کسی دو متغیر میں خطی مساوات کے جوڑ کے ضریب a_1, b_1, c_1 اور a_2, b_2, c_2 ہیں تب مندرجہ بالا مثالوں میں $\dfrac{b_1}{b_2}$ ، $\dfrac{a_1}{a_2}$ اور $\dfrac{c_1}{c_2}$ کی قدریں معلوم کر کے ان کا تقابل کرتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

غیر واضح دار	الجبری اظہار	ترسیمی اظہار	نسبتوں کا تقابل	$\frac{c_1}{c_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2}$	مساواتوں کا جوڑ
واضح دار اور غیر منحصر	واحد حل	قاطع خطوط	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{-80}{-110}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1. $3x+2y-80=0$ $4x+3y-110=0$
غیر واضح دار	کوئی حل سٹ وجود نہیں رکھتا	متوازی خطوط	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{-30}{-66}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	2. $1x+2y-30=0$ $2x+4y-66=0$
واضعدار اور منحصر	لامتناہی حل سٹ	ایک دوسرے پر منطبق خطوط	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{3900}{1300}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{3}{1}$	3. $3x+6y=3900$ $x+2y=1300$

آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال-1: جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مساواتوں کا جوڑ قاطع خطوط ہے' متوازی خطوط ہے یا منطبق خطوط ہے۔ اگر مساواتیں حقیقی ہوں تب ان کا حل سٹ معلوم کیجیے۔

$$2x + y - 5 = 0$$
$$3x - 2y - 4 = 0$$

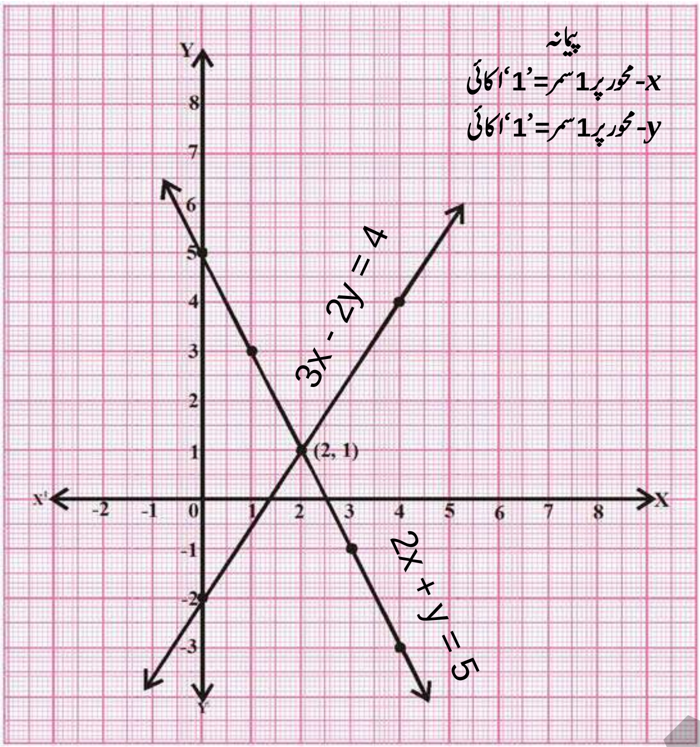
حل: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$ ، $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ ، $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-4}$

چونکہ $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$ لہذا دی گئی مساواتیں قاطع خطوط بناتی ہیں اور یہ حقیقی ہیں۔

مساوات $3x - 2y = 4$ کے لیے		
x	$y = \frac{4-3x}{-2}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-3(0)}{-2} = -2$	(0, -2)
2	$y = \frac{4-3(2)}{-2} = 1$	(2, 1)
4	$y = \frac{4-3(4)}{-2} = 4$	(4, 4)

مساوات $2x + y = 5$ کے لیے		
x	$y = 5 - 2x$	(x, y)
0	$y = 5 - 2(0) = 5$	(0, 5)
1	$y = 5 - 2(1) = 3$	(1, 3)
2	$y = 5 - 2(2) = 1$	(2, 1)
3	$y = 5 - 2(3) = -1$	(3, -1)
4	$y = 5 - 2(4) = -3$	(4, -3)

SCERT TELANGANA



اس مساوات کے جوڑ کا واحد حل سٹ (2,1) ہے۔

SCERT TELANGANA

مثال-2: جانچ کیجیے کہ ذیل میں دیا گیا مساوات کا جوڑ حقیقی ہے یا نہیں۔

$6x + 8y = 4$ اور $3x + 4y = 2$ اور ترسیمی اظہار کے ذریعہ تصدیق کیجیے۔

حل: $3x + 4y - 2 = 0$

$6x+8y - 4 = 0$

چونکہ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

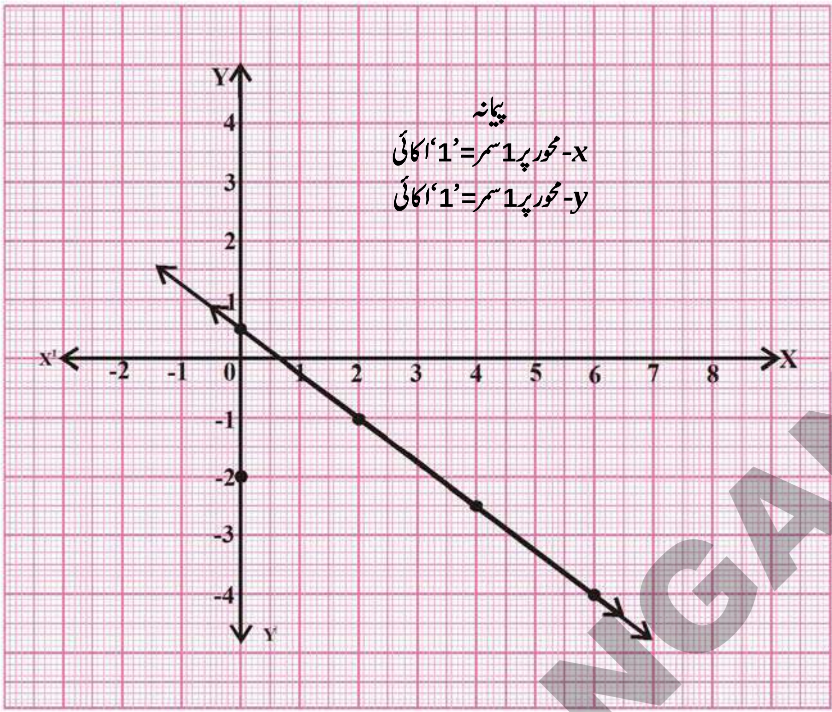
لہذا یہ خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں گے۔ پس دیا گیا خطی مساوات کا جوڑ حقیقی اور منحصر ہے اور لامتناہی حل سیٹ رکھتا ہے۔

مساوات $6x + 8y = 4$ کے لیے

x	$y = \frac{4-6x}{8}$	(x, y)
0	$y = \frac{4-6(0)}{8} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{4-6(2)}{8} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{4-6(4)}{8} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{4-6(6)}{8} = -4$	(6, -4)

مساوات $3x + 4y = 2$ کے لیے

x	$y = \frac{2-3x}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{2-3(0)}{4} = \frac{1}{2}$	$(0, \frac{1}{2})$
2	$y = \frac{2-3(2)}{4} = -1$	(2, -1)
4	$y = \frac{2-3(4)}{4} = -2.5$	(4, -2.5)
6	$y = \frac{2-3(6)}{4} = -4$	(6, -4)



مثال-3: جانچ کیجیے کہ آیا مساوات $2x\text{-}3y = 5$ اور $4x\text{-}6y = 15$ واضح دار ہیں یا نہیں۔ ترسیمی اظہار کے ذریعہ تصدیق کیجیے۔

حل: $4x\text{-}6y - 15 = 0$

$2x\text{-}3y - 5 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1}$$

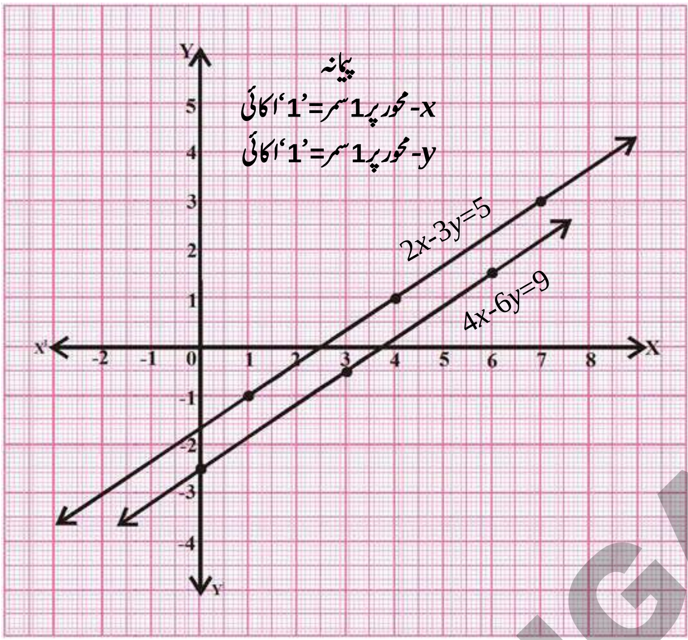
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-15}{-5} = \frac{3}{1} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

لہٰذا دی گئی مساوات کا جوڑ حقیقی نہیں۔ ان کا کوئی حل سٹ نہیں ہوتا۔ لہٰذا ان کا ترسیمی اظہار متوازی خطوط ہوگا۔

مساوات $4x - 6y = 9$ کے لیے		
x	$y = \dfrac{15-4x}{-6}$	(x, y)
0	$y = \dfrac{15-0}{-6} = \dfrac{-5}{2}$	(0, -2.5)
3	$y = \dfrac{15-4(3)}{-6} = \dfrac{-1}{2}$	(3, -0.5)
6	$y = \dfrac{15-4(6)}{-6} = \dfrac{3}{2}$	(6, 1.5)

مساوات $2x + 3y = 5$ کے لیے		
x	$y = \dfrac{5-2x}{-3}$	(x, y)
1	$y = \dfrac{5-2(1)}{-3} = -1$	(1, -1)
3	$y = \dfrac{5-2(4)}{-3} = 1$	(4, 1)
6	$y = \dfrac{5-2(7)}{-3} = 3$	(7, 3)

SCERT TELANGANA



یہ کیجیے

ذیل میں دی گئی مساوات کے نظام جانچیے کہ ان کا منفرد حل سٹ ہے یا لامتناہی کئی سٹ ہیں یا پھر کوئی حل سٹ نہیں۔ ان کو ترسیم کے ذریعہ حل کیجیے۔

(i) $2x+3y = 1$, $3x-y = 7$ (ii) $x + 2y = 6$, $2x + 4y = 12$ (iii) $3x + 2y = 6$, $6x + 4y = 18$

کوشش کیجیے

1۔ ذیل کے مساوات کے جوڑ میں P کی کس قدر کے لیے ان مساوات کا واحد حل سٹ ہوگا۔

$2x + py = -5$ اور $3x + 3y = -6$

2۔ مساوات کا جوڑ $2x - ky + 3 = 0$ اور $4x + 6y - 5 = 0$ میں k کی کس قدر کے لیے یہ مساوات متوازی خطوط کو ظاہر کرتے ہیں۔

3۔ مساوات کا جوڑ $3x + 4y + 2 = 0$ اور $9x + 12y + k = 0$ کی کس قدر کے لیے منطبق خطوط کو ظاہر کرتا ہے۔

4۔ 'P' کی کس مثبت قدر کے لیے ذیل کے خطی مساوات کے جوڑ کے لامتناہی حل سٹ ہوں گے۔

$px + 3y - (p - 3) = 0$ $12x + py - p = 0$

آیئے ہم چند مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں

مثال- 4: ایک باغ میں چند پھول اور مکھیاں ہیں۔ اگر ایک پھول پر ایک مکھی بیٹھ جائے تب ایک مکھی باقی رہ جائے گی۔ اور اگر ایک پھول پر دو مکھیاں بیٹھ جاتی ہیں تب ایک پھول باقی رہ جائے گا۔ باغ میں پھول اور مکھیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

حل: فرض کرو کہ باغ میں مکھیوں کی تعداد $= x$ اور

باغ میں پھولوں کی تعداد $= y$

اگرایک پھول پرایک مکھی بیٹھتی ہوتب 1 مکھی باقی رہ جائے گی لہذا $x = y + 1$

یا $x - y - 1 = 0$ .... (i)

اگرایک پھول پر دومکھیاں بیٹھتی ہیں تب ایک پھول باقی رہ جائے گالہذا $x = 2(y - 1)$

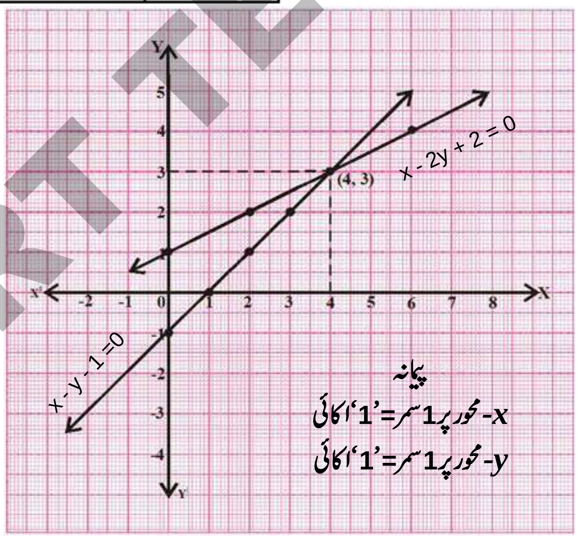
یا $x - 2y + 2 = 0$ .... (ii)

مساوات $x - 2y + 2 = 0$ کے لیے

x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
0	$y = \frac{0+2}{2} = 1$	(0, 1)
2	$y = \frac{2+2}{2} = 2$	(2, 2)
4	$y = \frac{4+2}{2} = 3$	(4, 3)
6	$y = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)

مساوات $x - y - 1 = 0$ کے لیے

x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, -1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)
2	$y = 2 - 1 = 1$	(2, 1)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
4	$y = 4 - 1 = 3$	(4, 3)



لہذا باغ میں 4 مکھیاں اور 3 پھول ہیں۔

مثال-5: ایک مستطیلی نما پلاٹ (plot) کا احاطہ 32 میٹر ہے۔اگر اس کا طول 2 میٹر بڑھا دیا جائے اور اس کا عرض 1 میٹر کم کر دیا جائے تب بھی اس پلاٹ کا رقبہ تبدیل نہیں ہوتا۔تب پلاٹ کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ پلاٹ طول اور عرض بالترتیب l اور b ہیں تب

SCERT TELANGANA

رقبہ $= lb$ اور احاطہ $= 2(l+b)$

$\Rightarrow 32 = 2(l+b)$

$\Rightarrow l+b = 16$

$\Rightarrow l+b-16 = 0$......(i)

جب طول 2 میٹر بڑھا دیا جائے تب نیا طول $l + 2$ ہوگا اور عرض 1 میٹر کم کر دیا جائے تب نیا عرض $b - 1$ حاصل ہوگا۔

تب رقبہ $= (l + 2)(b - 1)$

چونکہ رقبہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی

$(l + 2)(b - 1) = lb$

$\Rightarrow lb - l + 2b - 2 = lb$ یا $lb - lb = l - 2b + 2$

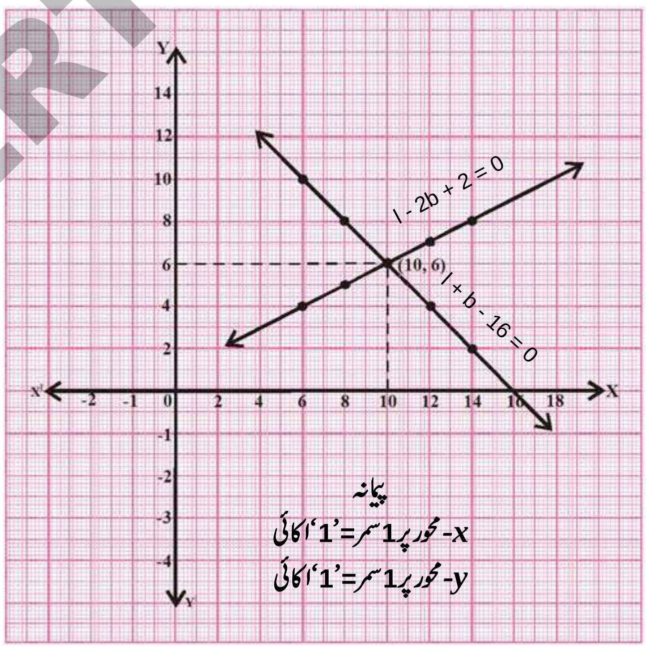
$\Rightarrow l - 2b + 2 = 0$......(2)

مساوات $l + b - 16 = 0$ کے لیے		
l	$b = 16 - l$	(l, b)
6	$b = 16 - 6 = 10$	(6, 10)
8	$b = 16 - 8 = 8$	(8, 8)
10	$b = 16 - 10 = 6$	(10, 6)
12	$b = 16 - 12 = 4$	(12, 4)
14	$b = 16 - 14 = 2$	(14, 2)

مساوات $l - 2b + 2 = 0$ کے لیے		
l	$b = \frac{l+2}{2}$	(l, b)
6	$b = \frac{6+2}{2} = 4$	(6, 4)
8	$b = \frac{8+2}{2} = 5$	(8, 5)
10	$b = \frac{10+2}{2} = 6$	(10, 6)
12	$b = \frac{12+2}{2} = 7$	(12, 7)
14	$b = \frac{14+2}{2} = 8$	(14, 8)

لہذا پلاٹ کا حقیقی طول 10 میٹر اور عرض 6 میٹر ہوگا۔

طول کی قدریں x- محور پر اور عرض کی قدریں y- محور پر حاصل ہونے والی ترسیم



SCERT TELANGANA

مشق - 4.1

1۔ نسبتوں $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ کے تقابل سے جانچیے کہ ذیل میں دیا گیا خطی مساوات کا جوڑ آیا ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے یا متوازی ہے یا ایک دوسرے پر منطبق ہے۔

a) $5x - 4y + 8 = 0$ $7x + 6y - 9 = 0$	b) $9x + 3y + 12 = 0$ $18x + 6y + 24 = 0$	c) $6x - 3y + 10 = 0$ $2x - y + 9 = 0$

2۔ جانچ کیجیے کہ ذیل میں دی گئی مساواتیں حقیقی ہیں یا غیر حقیقی۔ ان کو ترسیم کے ذریعہ حل کیجیے۔

a) $3x + 2y = 5$ $2x - 3y = 7$	b) $2x - 3y = 8$ $4x - 6y = 9$	c) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$ $9x - 10y = 14$
d) $5x - 3y = 11$ $-10x + 6y = -22$	e) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$ $2x + 3y = 12$	f) $x + y = 5$ $2x + 2y = 10$
g) $x - y = 8$ $3x - 3y = 16$	h) $2x + y - 6 = 0$ $4x - 2y - 4 = 0$	i) $2x - 2y - 2 = 0$ $4x - 4y - 5 = 0$

3۔ اسلم ملبوسات کی دوکان جا کر پینٹ اور شرٹ خریدتا ہے۔ جب اس کے دوستوں نے اس سے پوچھا کہ کتنے شرٹ اور پینٹ خریدے تب اس نے انہیں اس طرح جواب دیا ''شرٹ کی تعداد خریدے گئے پینٹ کی تعداد کے دوگنے سے 2 کم ہے اور اسی طرح شرٹ کی تعداد پینٹ کے چار گنا سے 4 کم ہے؟''

اسلم کے خریدے گئے پینٹ اور شرٹ کی تعداد معلوم کرنے میں اس کے دوستوں کی مدد کیجیے۔

4۔ ایک ریاضی کے کوئز (Quiz) میں جماعت دہم کے 10 طلباء نے شرکت کی۔ اگر لڑکیوں کی تعداد لڑکوں کی تعداد سے 4 زیادہ ہو تب کوئز میں شرکت کرنے والے لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

5۔ 5 پنسل اور 7 پن کی کل قیمت 50` ہے جبکہ 7 پنسل اور 5 پن کی کل قیمت 46` ہے ایک پنسل اور ایک پن کی علحدہ قیمت معلوم کیجیے

6۔ ایک مستطیلی نما باغ کا طول، عرض سے 4 میٹر زیادہ ہے اور اس باغ کا نصف احاطہ 36 میٹر ہے تب باغ کے ابعاد (طول، عرض) معلوم کیجیے۔

7۔ $2x + 3y - 8 = 0$ ایک خطی مساوات ہے ایک اور دو متغیرات پر مبنی خطی مساوات اس طرح لکھئے کہ ان دونوں کا ترسیمی اظہار کرنے پر قاطع خطوط حاصل ہوں۔ اور مزید دو خطی مساواتیں بنائیے جس میں ایک دی گئی مساوات متوازی ہو دوسری دی گئی مساوات پر منطبق ہو؟

8۔ ایک مستطیل کے طول کو '5' اکائی کم کرنے پر اور عرض '2' اکائی بڑھانے پر اس کا رقبہ 80 مربع اکائیاں کم ہو گیا۔ اگر اس مستطیل کا طول 10 اکائی بڑھا دیں اور عرض 5 اکائی کم کر دیں تب اس کا رقبہ میں 50 مربع اکائیاں کا اضافہ ہوگا۔ مستطیل کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

9۔ جماعت دہم میں اگر ایک بینچ پر 3 طلباء بیٹھتے ہیں تب ایک طالب علم باقی رہ جاتا ہے۔ اگر ایک بینچ پر 4 طلباء بیٹھتے ہیں تب ایک بینچ باقی رہ جاتی ہے جماعت میں طلباء اور بینچوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

4.3 خطی مساوات کے جوڑ کا حل سٹ معلوم کرنے کا الجبری طریقہ

خطی مساوات کے جوڑ کا حل سٹ معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ ہم سیکھ چکے ہیں۔ لیکن ان مساوات کے لیے جن کے حل سٹ کے مختصات طبعی اعداد نہیں ہوتے۔ ان کا ترسیمی اظہار آسان نہیں ہوتا۔

مثال کے طور پر جب حل سٹ کے نقاط $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$، (- 1.75, 3.3)، $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ وغیرہ ہوں تو اس طرح کے حل سٹ کی نشاندہی کے لیے غلطی کا امکان بہت زیادہ ہوتا ہے۔ کیا ان حل سٹ کو معلوم کرنے کا کوئی دوسرا طریقہ ہے؟ ایسے کئی الجبری طریقے ہیں جن پر اب ہم مباحثہ کریں گے۔

4.3.1 قدریں درج کرنے کا طریقہ (اندراجی طریقہ)

یہ طریقہ دو متغیرات پر مبنی خطی مساواتوں کو حل کرنے کے لیے کافی کارآمد ہے جہاں ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی رقوم میں آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقے کو سمجھنے کے لیے مرحلے وار غور کریں گے۔

مرحلہ-1: دو خطی مساواتوں سے کسی ایک مساوات میں ایک متغیر کو دوسرے متغیر کی رقوم میں لکھیے۔ مثال کے طور پر y کو x کی رقوم میں۔

مرحلہ-2: مرحلہ-1 میں حاصل کردہ y کی قدر کو دوسری مساوات میں درج کیجیے۔

مرحلہ-3: مرحلہ-2 میں حاصل کردہ مساوات کو مختصر کیجیے اور x کی قدر معلوم کیجیے۔

مرحلہ-4: مرحلہ (3) میں x کی حاصل کردہ قدر دی گئی کسی ایک خطی مساوات میں درج کیجیے اور y کی قدر محسوب کیجیے۔

مرحلہ-5: محسوب کردہ x اور y کی قدروں کو دی گئی دونوں مساوات میں درج کر کے حاصل کردہ حل سٹ کی تصدیق کیجیے۔

مثال-6: ذیل میں دیئے گئے مساوات کے جوڑ کو اندراجی طریقے سے حل کیجیے۔

$$2x - y = 5$$

$$3x + 2y = 11$$

حل:

$$2x - y = 5 \quad \text{.................}(1)$$

$$3x + 2y = 11 \quad \text{.................}(2)$$

مساوات (1) اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔ (مرحلہ-1)

$$y = 2x - 5$$

y کی قدر مساوات (2) میں درج کرنے پر (مرحلہ - 2)

$$3x + 2(2x - 5) = 11$$

SCERT TELANGANA

$$3x + 4x - 10 = 11$$
$$7x = 11 + 10 = 21$$
$$x = 21/7 = 3 \quad \text{(مرحلہ-3)}$$

$x = 3$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر (مرحلہ-4)

$$2(3) - y = 5$$
$$y = 6 - 5 = 1$$

x اور y کی قدریں مساوات (2) میں درج کرنے پر $3(3) + 2(1) = 9 + 6 = 11$

$x = 3$ اور $y = 1$ دونوں مساواتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

لہذا $x = 3$ اور $y = 1$ حل سٹ ہے۔

یہ کیجیے۔

ذیل میں دیے گئے مساوات کے جوڑ کو اندراجی طریقے سے حل کیجیے۔

1) $3x - 5y = -1$, $x - y = -1$

2) $x + 2y = -1$, $2x - 3y = 12$

3) $2x + 3y = 9$, $3x + 4y = 5$

4) $x + \frac{6}{y} = 6$, $3x - \frac{8}{y} = 5$

5) $0.2x + 0.3y = 13$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

6) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

4.3.2 : حذف کا طریقہ

ہم اس طریقے میں دونوں مساواتوں کے ایک متغیر کے عددی ضریب کو مساوی کر لیتے ہیں۔ پھر اس متغیر کو حذف (نکال) کر دیتے ہیں۔ جس سے ایک ہی متغیر والی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو حل کر کے دوسرے متغیر کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ اس طریقے کو سمجھنے کے لیے مرحلہ وار غور کریں گے۔

مرحلہ-1: دونوں مساوات کو $ax + by = c$ کی شکل میں لکھیے۔

مرحلہ-2: دونوں مساوات کے کسی ایک متغیر کے عددی ضریبوں کو موزوں اعداد سے ضرب دیتے ہوئے مساوی کیجیے۔

مرحلہ-3: جس متغیر کو خارج کرنا ہے اگر اس کی علامت دونوں مساوات میں مساوی ہو تب ان مساوات کو تفریق کیجیے اور اگر مختلف علامتیں ہو تب انہیں جمع کیجیے۔ جس سے ایک متغیر والی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مرحلہ-4: بچے ہوئے متغیر کی قدر معلوم کرنے کے لیے حاصل ہونی والی مساوات کو مختصر کیجیے۔

مرحلہ-5: اس متغیر کی قدر دی گئی کسی بھی ایک مساوات میں درج کر کے دوسرے متغیر کی قدر معلوم کیجیے۔

مثال-7: ذیل میں دیے گئے خطی مساوات کے جوڑ کو حذف کے طریقے سے حل کیجیے۔

$$3x + 2y = 11$$
$$2x + 3y = 4$$

SCERT TELANGANA

حل:

$$3x + 2y = 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$2x + 3y = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

دی گئی مساواتوں سے y کو حذف کرتے ہیں،ان میں y کے عددی ضریب 2 اور 3 ہیں' 2اور3 کا ذ۔ا۔م 6 ہے۔لہذا مساوات (1) کو 3 سے کو مساوات (2) کو 2 سے ضرب دے کر تفریق کرنے پر

$3 \times$ مساوات(1)	$9x + 6y = 33$
$2 \times$ مساوات(2)	$4x + \cancel{6y} = 8$
	$(-) \quad (-) \quad (-)$
	$5x = 25$

$$x = \frac{25}{5} = 5$$

$x = 5$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$3(5) + 2y = 11$$

$$2y = 11 - 15 = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

اس طرح حل $x=5$ اور $y=-2$ ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

ذیل میں دی گئی مساواتوں کے جوڑ کو حذف کرنے کے طریقے سے حل کیجیے۔

1. $8x + 5y = 9$, $3x + 2y = 4$
2. $2x + 3y = 8$, $4x + 6y = 7$
3. $3x + 4y = 25$, $5x - 6y = -9$

کوشش کیجیے

دیے گئے خطی مساوات کے جوڑ کو حل کیجیے

$$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$$
$$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$$

لہذا مطلوبہ حل $x = 5$ ، $y = -2$ ہے۔

آئیے چند مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال-8: صبیحہ 2000` نکالنے کے لیے ایک بینک جاتی ہے۔اس نے کیا شیئر (Cashier) سے کہا وہ اسے صرف 50` اور 100` کے نوٹ دے۔صبیحہ کو کل 25 نوٹ ملے۔بتلایئے کہ اسے کتنے 50` اور کتنے 100` کے نوٹ ملے۔

حل: فرض کرو کہ 50` کے نوٹوں کی تعداد = 'x' اور

100` کے نوٹوں کی تعداد = 'y'

تب $x + y = 25 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$ اور

$$50x + 100y = 2000 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

SCERT TELANGANA

اندراجی طریقے سے حل

مساوات (1) سے $x = 25 - y$

x کی قدر کو مساوات (2) میں درج کرنے پر $50(25 - y) + 100y = 2000$

$$1250 - 50y + 100y = 2000$$

$$50y = 2000 - 1250 = 750$$

$$y = \frac{750}{50} = 15$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

لہٰذا صبیحہ کو 50 ` کے 10 نوٹ اور 100 ` کے 15 نوٹ ملے۔

حذف کے طریقے سے حل

مساوات (1) اور (2) میں x کے عددی ضریب بالترتیب 1 اور 50 ہیں۔ لہٰذا

$$\begin{array}{lrcrcl}
(1)\ \text{مساوات} \times 50 & \cancel{50x} & + & 50y & = & 1250 \\
(2)\ \text{مساوات} \times 1 & \cancel{50x} & + & 100y & = & 2000 \\
 & (-) & & (-) & & (-) \\
\hline
 & & & -50y & = & -750
\end{array}$$

$$y = \frac{-750}{-50} = 15$$

y کی قدر مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$x + 15 = 25$$

$$x = 25 - 15 = 10$$

لہٰذا صبیحہ کو 50 ` کے 10 نوٹ اور 100 ` کے 15 نوٹ ملے۔

مثال-9: ایک مسابقتی امتحان میں ہر صحیح جواب کے لیے 3 نشانات اور ہر غلط جواب کے لیے 1 نشان کی کمی کی جاتی ہے۔ اس امتحان میں اکبر کو 40 نشانات حاصل ہوئے۔ اگر ہر صحیح جواب کے لیے 4 نشانات دیئے جاتے ہیں اور ہر غلط جواب کے لیے 2 نشانات کی کمی کیجاتی ہے تو اکبر کے حاصل کردہ نشانات 50 ہوتے ہیں امتحان میں کل سوالات کی تعداد کیا ہوگی معلوم کیجیے؟

حل: فرض کرو کہ صحیح جواب کی تعداد $= x$

اور غلط جواب کی تعداد $= y$

جب ہر صحیح جواب کے 3 نشانات دیے جائیں اور ہر غلط جواب کے لیے 1 نشان کم کردیا جائے۔ اکبر کو 40 نشانات حاصل ہوئے۔

$$3x - y = 40 \qquad (1)$$

اکبر کے حاصل کردہ نشانات 50 ہوتے اگر ہر صحیح جواب کے لیے 4 نشانات دیے جاتے اور غلط جواب کے لیے 2 نشانات کم کردیا جاتے

$$4x - 2y = 50 \qquad (2)$$

SCERT TELANGANA

اندراجی طریقہ

مساوات (1) سے $y = 3x - 40$

y کی قیمت مساوات (2) میں درج کرنے پر $4x - 2(3x - 40) = 50$

$$4x - 6x + 80 = 50$$

$$-2x = 50 - 80 = -30$$

$$x = \frac{-30}{-2} = 15$$

x کی قدر مساوات (1) میں درج کرنے پر $3(15) - y = 40$

$$45 - y = 40$$

$$y = 45 - 40 = 5$$

لہٰذا امتحان میں جملہ سوالات کی تعداد $= 15 + 5 = 20$

یہ کیجیے

مثال-9 کو حذف کے طریقے سے حل کیجیے۔

مثال-10: تسلیم نے اپنی بیٹی سے کہا کہ ''سات سال سے قبل' میری عمر تمہاری اس وقت کی عمر کا 7 گنا تھی اور اگلے 3 سال بعد میری عمر تمہاری عمر کا تین گنا ہوگی''۔ تسلیم اور اس کی بیٹی کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ تسلیم کی موجودہ عمر x سال اور اس کی بیٹی کی عمر y سال ہے۔

تب 7 سال قبل تسلیم کی عمر $(x-7)$ اور اسکی بیٹی کی عمر $(y-7)$ تھی۔

$$x - 7 = 7(y - 7)$$

$$x - 7 = 7y - 49$$

$$x - 7y + 42 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

تین سال بعد تسلیم کی عمر $x + 3$ سال اور اسکی بیٹی کی عمر $y + 3$ سال ہوگی۔

$$x + 3 = 3(y + 3)$$

$$x + 3 = 3y + 9$$

$$x - 3y - 6 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

اخراجی طریقہ

مساوات (1) $\cancel{x} - 7y = -42$

مساوات (2) $\cancel{x} - 3y = 6$

x کی علامتیں مشابہہ ہیں۔لہٰذا تفریق کریں $(-) \quad (+) \quad (-)$

$$-4y = -48$$

SCERT TELANGANA

$$y = \frac{-48}{-4} = 12$$

y کی قدر مساوات (2) میں درج کرنے پر

$$x - 3\,(12) - 6 = 0$$

$$x = 36 + 6 = 42$$

لہذا تسلیم کی موجودہ عمر 42 سال اور اس کی بیٹی کی عمر 12 سال ہے۔

یہ کیجیے

مثال-10 کو اندرا جی طریقے سے حل کیجیے۔

مثال-11: ایک ناشر ایک نئی کتاب کی طباعت کا منصوبہ بنا رہا ہے ایک کتاب کی چھپائی کی قیمت (نظر ثانی' ایڈیٹنگ' ٹائپنگ وغیرہ سب ملا کر) `320,000 اس کے علاوہ وہ مزید `31.25 کتاب کی تیاری کے لیے خرچ کرتا ہے۔ ایک کتاب کی ٹھوک قیمت (ناشر کو حاصل ہونے والی قیمت) `43.75 ہے۔ ناشر کو Break even کے لیے کتنے کتاب چھپوانے ہوں گے یعنی خرچ اور آمدنی دونوں مساوی ہو جائیں۔

> ایسا مقام جہاں پر قیمت خرید سے اتنی آمدنی ہو جتنی کہ اس شئے کی تیاری پر خرچ کی گئی ہو **(بریک ایون پوائنٹ)** کہلاتا ہے

حل: ناشر کی آمدنی جب خرچ کے مساوی ہو جائے گی تب Break even کرے گا۔ اگر چھپوائے گئے اور فروخت کیے گئے کتابوں کی تعداد x اور y (break even) نقطہ ہے تب ناشر کی آمدنی اور خرچ کے لیے مساوات

$$y = 320000 + 31.25x \quad \text{..................} \quad (1)$$

$$y = 43.75x \quad \text{..................} \quad (2)$$

مساوات (2) کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$43.75x = 320000 + 31.25x$$

$$12.5x = 320000$$

$$x = \frac{320000}{12.5} = 25600$$

break even کے لیے ناشر کو 25,600 کتابیں چھپوانی اور فروخت کرنی ہوں گی۔

مشق - 4.2

مندرجہ ذیل میں تمام سوالات کے لیے مساواتیں بنائیے اور ان کو حل کیجیے۔

1۔ دو اشخاص کے آمدنی کی نسبت 9:7 اور ان کے خرچ کی نسبت 4:3 ہے۔ اگر دونوں اشخاص فرداً `2000 مہینہ بچت کرتے ہوں تب انکی آمدنی معلوم کیجیے۔

2۔ ایک دو ہندسی عدد اور اس کے ہندسوں کو باہم تبدیل کرنے سے حاصل ہونے والے عدد کا مجموعہ 66 ہے اگر دونوں ہندسوں کا فرق '2' ہو تب عدد معلوم کیجیے۔ ایسے کتنے اعداد ہیں؟

SCERT TELANGANA

3۔ تمامی زاویوں میں، بڑا زاویہ چھوٹے زاویئے سے 18^{o} زیادہ ہے زاویئے معلوم کیجیے۔

4۔ حیدرآباد میں ٹیکسی کا کرایہ مختص ہے۔اوراس کے ساتھ طئے کردہ فاصلہ کا کرایہ ادا کرنا ہے۔10km کا فاصلہ طئے کرنے کے لیے 220` کرایہ ہوا۔ایک 15km سفر کرنے کے لیے 310` کرایہ ادا کیا گیا۔

(i) ٹیکسی کا مختص کردہ کرایہ اور فی کلومیٹر فاصلہ طئے کرنے کے لیے کرایہ معلوم کیجیے۔

(ii) ایک شخص کو 25km کا فاصلہ طئے کرنے کے لیے کتنی رقم ادا کرنی ہوگی۔

5۔ ایک کسر کے شمارکنندہ اور نسب نما دونوں میں 1 جمع کرنے پر حاصل ہونے والی کسر $\frac{4}{5}$ ہوگی۔اور اگر شمارکنندہ اور نسب نما سے 5 کو تفریق کریں تب کسر $\frac{1}{2}$ ہو جائے گی۔کسر معلوم کیجیے۔

6۔ ایک شاہراہ پر دو مقامات A اور B ایک دوسرے سے 100km کے فاصلہ پر ہیں۔ایک کار مقام A سے دوسری کار مقام B سے بیک وقت مختلف رفتاروں سے سفر کا آغاز کرتے ہیں۔اگر دونوں ایک ہی سمت میں سفر کریں تب 5 گھنٹے بعد ملتے ہیں اور اگر ایک دوسرے کی سمت سفر کرتے ہیں تب 1 گھنٹے بعد ملتے ہیں دونوں کاروں کی رفتار کیا ہوگی؟

7۔ دو زاویئے اتمامی ہیں بڑے زاویہ کی پیائش چھوٹے کی پیائش کے دوگنے سے 3 کم ہے دونوں زاویوں کی قدر معلوم کیجیے۔

8۔ ایک الجبرا کی کتاب کے کل 1382 صفحات ہیں۔اس کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔کتاب کے دوسرے حصے میں پہلے حصے سے 64 صفحات زیادہ ہیں۔کتاب کے ہر حصے میں کتنے صفحات ہیں

9۔ ایک کیمیائی اشیاء فروخت کرنے والے شخص کے پاس ہائیڈروکلورک ترشہ کے دو محلول ہی۔ایک 50% ارتکاز والا محلول اور دوسرا 80% ارتکاز والا محلول۔دونوں محلول کی کتنی مقدار کے ذریعہ 68% ارتکاز والا 100ml محلول حاصل ہوگا۔

10۔ فرض کرو کہ آپ کے پاس 12000` موجود ہیں۔آپ کو کچھ رقم 10% شرح سود مفرد سے اور ماباقی 15% شرح سے سود مفرد رقم مشغول کرنا ہے۔دونوں شرح میں کتنی رقم مشغول کرنا ہوگا کہ کل رقم پر 12% شرح سود مفرد حاصل ہو۔

4.4 مساواتیں جنہیں دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ایسی مساوات کے جوڑ کا حل معلوم کریں گے جو خطی نہیں لیکن انہیں موزوں اندراجات کے ذریعہ خطی بنایا جاسکتا ہو۔ایسے ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال -12: ذیل کی مساوات کے جوڑ کو حل کیجیے۔

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

حل: دیے گئے مساوات کے جوڑ کا مشاہدہ کیجیے یہ خطی مساواتیں نہیں (کیوں؟)

SCERT TELANGANA

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \qquad (2)$$

اگر ہم $p=\frac{1}{x}$ اور $q=\frac{1}{y}$ درج کریں ہمیں مندرجہ ذیل خطی مساوات کا جوڑ حاصل ہوگا۔

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

q کے عددی ضریب 3 اور 4 ہیں ان کا ذ۔ا۔م 12 ہے۔ اخراجی طریقے (حذفی طریقے) کے استعمال سے

مساوات (3) x4 $\quad 8p + \cancel{12q} = 52$

q کی علامت مختلف ہے لہذا دونوں مساواتوں کو جمع کریں

مساوات (4) × 3 $\quad 15p - \cancel{12q} = -6$

$$23p = 46$$

$$p=\frac{46}{23}=2$$

p کی قدر مساوات (3) میں درج کرنے پر

$$2(2) + 3q = 13$$

$$3q = 13 - 4 = 9$$

$$q=\frac{9}{3}=3$$

لیکن $\frac{1}{x}=p=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{y}=q=3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

مثال-13: آفرین اپنے مکان میں مزید 2 کمرے بنوانا چاہتی ہے۔ اس نے مزدوروں کے متعلق جانکاری حاصل کی۔ اس نے یہ پتہ لگایا کہ 6 آدمی اور 8 عورتیں اس کام کو 14 دن میں مکمل کریں گے۔ لیکن وہ اس کام کو 10 دن ہی میں تکمیل کروانا چاہتی ہے۔ جب آفرین نے مزید معلومات حاصل کیں تو اس نے جانا کہ 8 آدمی اور 12 عورتیں اس کام کو 10 دن میں مکمل کردیں گے۔ ایک آدمی یا عورت اکیلے ہی کام کرے تب اس کام کی تکمیل کے لیے کتنے دن درکار ہوں گے۔

حل: فرض کرو کہ ایک آدمی کے ذریعہ کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت $= x$ دن

SCERT TELANGANA

ایک آدمی کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $= \frac{1}{x}$

فرض کرو کہ ایک عورت کے ذریعہ کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت $= y$ دن

ایک عورت کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $= \frac{1}{y}$

اب 8 آدمی اور 12 عورتیں اس کام کو 10 دن میں تکمیل کرتے ہیں۔

تب 8 آدمی اور 12 عورتوں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $= \frac{1}{10}$ .... (1)

اور 8 آدمیوں کا ایک دن میں تکمیل کردہ کام $8 \times \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$

اسی طرح سے 12 عورتوں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $12 \times \frac{1}{y} = \frac{12}{y}$

8 آدمی اور 12 عورتیں کے ذریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $= \frac{8}{x} + \frac{12}{y}$ ....(2)

مساوات (1) اور (2) کا تقابل کرنے پر

$$\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = \frac{1}{10}$$

$$10\left(\frac{8}{x} + \frac{12}{y}\right) = 1$$

$$\frac{80}{x} + \frac{120}{y} = 1 \quad \text{(3)}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

اور دیا گیا ہے کہ 6 آدمی اور 8 عورتیں اس کام کو 14 دن میں تکمیل کریں گے۔

تب 6 آدمی اور 8 عورتوں کے زریعہ ایک دن میں تکمیل کردہ کام $= \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$

$$14\left(\frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 1$$

$$\left(\frac{84}{x} + \frac{112}{y}\right) = 1 \quad \text{(4)}\ldots\ldots$$

SCERT TELANGANA

مساوات (3) اور (4) کا مشاہدہ کیجیے کیا یہ خطی مساواتیں ہیں؟ انہیں ہم کس طرح حل کریں؟ ہم ان مساواتوں کو خطی مساوات میں تبدیل کرنے کے لیے $\frac{1}{x}=u$ اور $\frac{1}{y}=v$ درج کرتے ہیں۔

مساوات (3) سے $\Rightarrow$ $80u + 120v = 1$ .... (5)

مساوات (4) سے $\Rightarrow$ $84u + 112v = 1$ .... (6)

80 اور 84 کا ذ۔ا۔م 1680 ہے۔ اخراجی (حذافی) طریقے کے استعمال سے

مساوات $21\times(3)$ $(21 \times 80)u + (21 \times 120)v = 21$

مساوات $20\times(4)$ $(20 \times 84)u + (20 \times 112)v = 20$

$$\cancel{1680u}+2520v = 21$$

u کی مساوی علامتیں ہیں لہذا تفریق کرنے پر

$$\cancel{1680u}+2240v = 20$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

$$280v = 1$$

$$v=\frac{1}{280}$$

v کی قیمت مساوات (5) میں درج کرنے پر

$$80u+120\times\frac{1}{280}=1$$

$$80u=1-\frac{3}{7}=\frac{7-3}{7}=\frac{4}{7}$$

$$u = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7} \times \frac{1}{\underset{20}{\cancel{80}}} = \frac{1}{140}$$

$$\frac{1}{x} = u = \frac{1}{140} \Rightarrow x = 140$$

$$\frac{1}{y} = v = \frac{1}{280} \Rightarrow x = 280$$

لہذا ایک آدمی اکیلے اس کام کو 140 دن میں اور ایک عورت اس کام کو 280 دن میں مکمل کریں گے۔

مثال-14: ایک آدمی 370km سفر کرتا ہے۔ وہ اپنے سفر کا کچھ فاصلہ بذریعہ ریل اور کچھ بذریعہ کار طئے کرتا ہے اگر وہ 250km ریل کے ذریعہ اور مابقی کار کے ذریعہ طئے کرتا ہو تب اسے 4 گھنٹے لگتے ہیں۔ اگر وہ 130km ریل اور مابقی کار سے سفر کرے تب انہیں 18 منٹ زیادہ درکار ہوں گے۔ ریل کے رفتار اور کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ ریل کی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ اور کار کی رفتار y کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

اور ہم جانتے ہیں کہ وقت = $\dfrac{\text{طئے شدہ فاصلہ}}{\text{رفتار}}$

SCERT TELANGANA

پہلی صورت میں، ریل میں سفر کا وقت = $\frac{250}{x}$ گھنٹے

اور کار میں سفر کا وقت = $\frac{120}{y}$ گھنٹے

لہذا کل وقت = ریل کے ذریعہ سفر کا وقت + کار کے ذریعہ سفر کا وقت = $\frac{250}{x} + \frac{120}{y}$

لیکن سفر کا کل وقت 4 گھنٹے ہے لہذا

$$\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$$

$$\frac{125}{x} + \frac{60}{y} = 2 \qquad \ldots\ldots(1)$$

دوبارہ جب وہ 130km ریل سے اور ماباقی کار سے سفر کرتا ہے

اس شخص کا 130 کلومیٹر ریل کے ذریعہ سفر کا وقت = $\frac{130}{x}$ گھنٹے

اور کار میں 240km (370-130) کے سفر کا وقت = $\frac{240}{y}$ گھنٹے

لیکن دیا گیا ہے کہ سفر کا وقت 4 گھنٹہ 18 منٹ ہے یعنی $4\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{60}_{10}} = 4\frac{3}{10}$ گھنٹے

لہذا $\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

مساوات (1) اور (2) میں $\frac{1}{x} = a$ اور $\frac{1}{y} = b$ درج کرنے پر

$$125a + 60b = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$130a + 240b = 43/10 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

60 اور 240 کا ذ۔ا۔م 240 ہے اخراجی طریقے (حذفی طریقہ) استعمال سے

$4\times(1)$ مساوات $500a + \cancel{240b} = 8$

$1\times(4)$ مساوات $130a + \cancel{240b} = \frac{43}{10}$ b کی علامتیں مساوی ہیں لہذا تفریق کرنے پر

$\quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$$370a = 8 - \frac{43}{10} = \frac{80-43}{10} = \frac{37}{10}$$

SCERT TELANGANA

$$a = \frac{\cancel{37}}{10} \times \frac{1}{\cancel{370}_{10}} = \frac{1}{100}$$

$a = \frac{1}{100}$ کو مساوات (3) میں درج کرنے پر

$$\left(\cancel{125}^{5} \times \frac{1}{\cancel{100}_{4}}\right) + 60b = 2$$

$$60b = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8-5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{60}_{20}} = \frac{1}{80}$$

لہذا $b = \frac{1}{80}$ اور $a = \frac{1}{100}$

تب $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$ اور $\frac{1}{x} = \frac{1}{100}$

$\Rightarrow$ $y = 80 \text{km / hr}$ اور $x = 100 \text{km / hr}$

لہذا ریل کی رفتار 100 کلومیٹر فی گھنٹہ اور کار کی رفتار 80 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مشق - 4.3

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کو خطی مساواتوں کے جوڑ میں تبدیل کرتے ہوئے حل کیجیے

(i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$, $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(ii) $\frac{x+y}{xy} = 2$, $\frac{x-y}{xy} = 6$

(iii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$, $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iv) $6x + 3y = 6xy$, $2x + 4y = 5xy$

(v) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$, $\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$ (جہاں $x \neq 0, y \neq 0$)

(vi) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$, $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ جہاں $x \neq 0, y \neq 0$

SCERT TELANGANA

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2۔ مندرجہ ذیل سوالات کے لیے مساواتیں بنایئے اور ان کو حل کیجیے۔

(i) ایک کشتی بہاؤ کے مخالف سمت 30 کلومیٹر اور بہاؤ کی سمت 44 کلومیٹر 10 گھنٹے میں طئے کرتی ہے۔ 13 گھنٹوں میں وہ 40 کلومیٹر بہاؤ کی مخالف سمت اور 55 کلومیٹر بہاؤ کی سمت طئے کرتی ہے۔ ٹھہرے ہوئے پانی میں کشتی کی رفتار اور بہاؤ کی رفتار معلوم کیجیے۔

(ii) رحیم اپنے گھر جانے کے لیے 600 کلومیٹر کے فاصلہ میں کچھ ریل کے ذریعے اور کچھ کار کے ذریعہ طئے کرتا ہے۔ اگر وہ 120 کلومیٹر ریل کے ذریعہ اور مابقی کار کے ذریعہ طئے کرے تب اُسے 8 گھنٹے درکار ہوں گے۔ اگر وہ 200 کلومیٹر ریل کے ذریعہ اور مابقی کار کے ذریعے طئے کرے تب اُسے 20 منٹ زیادہ لگیں گے۔ ریل کی رفتار اور کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

(iii) 2 عورتیں اور 5 آدمی ایک ایمبر یڈری کا کام 4 دن میں مکمل کرتے ہیں جبکہ 3 عورتیں اور 6 آدمی اس کام کو 3 دن میں مکمل کرتے ہیں ایک آدمی یا ایک عورت کے ذریعہ کام کی تکمیل کے لیے درکار وقت معلوم کیجیے۔

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

(i) $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 4$

(ii) $\frac{x+1}{2} + \frac{y-1}{3} = 8$

$\frac{x-1}{3} + \frac{y+1}{2} = 9$

(iii) $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

(iv) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$

$\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$

(v) $\frac{ax}{b} - \frac{by}{a} = a+b$

$ax - by = 2ab$

(vi) $2^x + 3^y = 17$

$2^{x+2} - 3^{y+1} = 5$

SCERT TELANGANA

2۔ ایک تجربہ کے دوران جانوروں کو سخت پرہیز پر رکھا گیا۔ ہر جانور کو غذا کی دوسری اشیاء کے ساتھ 20 گرام پروٹین اور 6 گرام چکنائی دیا جاتا ہے۔ لیباریٹری ٹیکنیشین غذا کے دو آمیزے A اور B خریدتا ہے۔ آمیزہ A میں 10% پروٹین اور 6% چکنائی ہے اور آمیزہ B میں 20% پروٹین اور 2% چکنائی ہے۔ جانوروں کی غذا کے لیے دونوں آمیزوں کا کتنا وزن ملانا ہوگا؟

تجویز کردہ منصوبہ کام

روزمرہ زندگی کے واقعات پر مبنی دو متغیرات پر چند خطی مساوات تیار کیجیے اور گراف کے استعمال سے ان کے حل معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ دو مشابہہ متغیرات پر مبنی دو خطی مساواتیں، دو متغیرات ہر خطی مساوات کا جوڑ کہلاتی ہیں۔

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

جہاں a_1، a_2، b_1، b_2، c_1، c_2 حقیقی اعداد ہیں۔

2۔ دو متغیر پر خطی مساوات کے جوڑ کو مختلف طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

3۔ دو متغیر پر خطی مساوات کے جوڑ کے ترسیم میں دو خطوط ہوتے ہیں۔

(i) اگر یہ دو خطوط ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرتے ہوں تب یہ نقطہ ان خطوط کا حل کہلاتا ہے۔ ایسے مساوات کا جوڑ حقیقی مساوات کا جوڑ کہلاتا ہے۔

(ii) اگر دونوں خطوط ایک دوسرے پر منطبق ہوں تب ان خطوط کے لاتناہی کئی حل سٹ ہوتے ہیں یعنی خط کا ہر نقطہ ایک حل سٹ ہوتا ہے۔ اور ایسی مساوات کا جوڑ منحصر کہلاتا ہے۔

(iii) اگر یہ دونوں خطوط متوازی ہوں تب مساوات کے جوڑ کوئی حل سٹ نہیں ہوتا اور یہ مساوات کا جوڑ غیر ہم آہنگ کہلاتا ہے۔

4۔ دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کے حل سٹ معلوم کرنے کے لیے ہم درجہ ذیل طریقوں کا مشاہدہ کیا۔

(i) مثالی طریقہ Model Method

(ii) ترسیمی طریقہ Graphical Method

(iii) الجبری طریقے (Algebric Method)۔ اندراجی طریقہ اور حذف کا طریقہ

5۔ مساوات کے نظام کی نوعیت اور متغیرات کے عددی ضریب کے درمیان رشتہ ہوتا ہے۔

(i) اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ تب خطی مساوات کا جوڑ ہم آہنگ ہوتا ہے۔

(ii) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ تب خطی مساوات کا جوڑ غیر حقیقی ہوتا ہے۔

(iii) اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ تب خطی مساواتیں حقیقی اور منحصر مساوات ہیں۔

6۔ ایسے کئی صورتیں/حالات ہوتے ہیں جنہیں ریاضی میں دو مساوات کے ذریعہ ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جو کہ شروعات میں خطی مساوات نہیں ہوتے۔ لیکن ہم ان میں چند تبدیلیاں لاتے ہوئے انہیں خطی مساوات کا جوڑ بنا سکتے ہیں۔

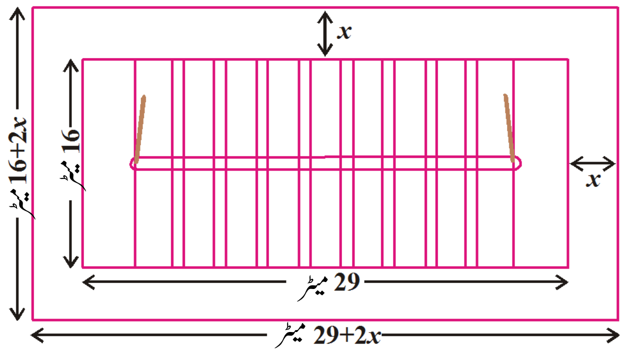
SCERT TELANGANA

باب 5

دودرجی مساواتیں
Quadratic Equations

5.1 تعارف

سرکاری مدرسہ فوقانیہ نسواں مکرم پورہ کی کھیل کود کی کمیٹی 29m×16m ابعاد کا ایک کھوکھو کورٹ تیار کرنا چاہتی ہے۔اس کے لیے مدرسہ میں 558 مربع میٹر رقبہ کا مستطیلی پلاٹ موجود ہے۔وہ شائقین کے لیے کورٹ کے اطراف مساوی چوڑائی کی جگہ چھوڑنا چاہتے ہیں شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کیا ہوگی؟ کیا یہ چوڑائی کافی ہوگی؟



فرض کیجیے کہ جگہ کی چوڑائی x میٹر ہے لہذا شکل کے بموجب پلاٹ کا طول 29+2x میٹر ہوگا۔

اور مستطیلی پلاٹ کا عرض = (16 + 2x) میٹر ہوگا

لہذا، مستطیلی پلاٹ کا رقبہ = عرض×طول

$= (29 + 2x)(16 + 2x)$

چوں کہ پلاٹ کا رقبہ = 558 مربع میٹر

$\therefore \quad (29 + 2x)(16 + 2x) = 558$

$\therefore \quad 4x^2 + 90x + 464 = 558$

$4x^2 + 90x - 94 = 0$ (2 سے تقسیم کرنے پر)

$2x^2 + 45x - 47 = 0$

$2x^2 + 45x - 47 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$

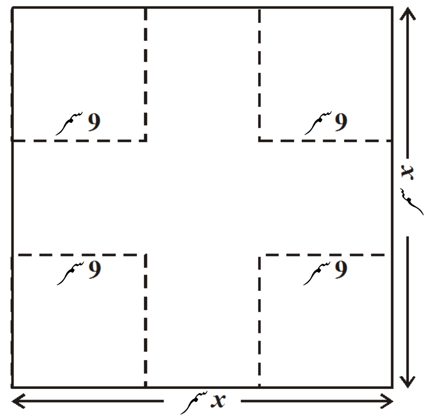
گزشتہ جماعت میں ہم نے x کی قدر معلوم کرنے کے لیے $ax + b = c$ شکل کی خطی مساوات کو حل کیا ہے اسی طرح مذکورہ بالا مساوات سے حاصل کردہ x کی قدر سے شائقین کے لیے جگہ کی ممکنہ چوڑائی حاصل ہوگی۔

کیا آپ اس طرح کے کئی اور مثالوں کا تصور کر سکتے ہیں جہاں ہمیں مذکورہ بالا مثال کی طرح مقداروں کو معلوم کرنے کے لیے اس طرح کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

آیئے ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں

عائشہ کے پاس ایک مربع دھاتی شیٹ ہے وہ اس شیٹ کے ہر کونے سے 9 سمر کے مربعوں کو الگ کرتی ہے۔شیٹ کے باقی حصے کو اوپر کی جانب موڑتے ہوئے شکل کے مطابق ایک کھلا ڈبہ بناتی ہے گیا ڈبے کی گنجائش 144 مکعب سمر ہے کیا ہم دھاتی شیٹ کے ابعاد معلوم کر سکتے ہیں۔

SCERT TELANGANA



فرض کیجیے کہ مربعی دھاتی شیٹ کے ضلع کی لمبائی x سمر ہے

تب ڈبے کے ابعاد $(x\text{-}18)$ سمر × $(x\text{-}18)$ سمر × 9 سمر ہیں

چونکہ ڈبے کا حجم 144 مکعب سمر ہے

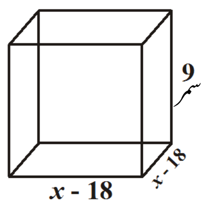
$$9\,(x-18)\,(x-18) = 144$$

$$(x-18)^2 = 16$$

$$x^2 - 36x + 308 = 0$$

لہٰذا دھاتی شیٹ کے ضلع کی لمبائی ' x ' ذیل کی مساوات کو مطمئن کرے گی

$$x^2 - 36x + 308 = 0 \qquad \text{..... (2)}$$



آیئے مساوات (1) اور (2) میں LHS کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

کیا یہ دو درجی کثیر رکنیاں ہیں؟

گذشتہ باب میں ہم $ax^2 + bx + c$ شکل کی کثیر رکنیوں کا مطالعہ کر چکے ہیں۔ (جہاں $a \neq 0$)

چوں کہ مذکورہ مساواتوں کے LHS میں دو درجی کثیر رکنیاں ہیں، یہ دو درجی مساواتیں کہلاتے ہیں

اس باب میں ہم دو درجی مساواتوں اور ان کے ریشوں کو معلوم کرنے کے طریقوں کا مطالعہ کریں گے

5.2 دو درجی مساواتیں

متغیر x میں ایک دو درجی مساوات، $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہوتی ہے جہاں a، b، c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ مثال کے طور پر $2x^2 + x - 300 = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح $2x^2 - 3x + 1 = 0$، $4x - 3x^2 + 2 = 0$ اور $1 - x^2 + 300 = 0$ بھی دو درجی مساوات ہیں۔

در اصل کوئی بھی $p(x)=0$ شکل کی مساوات، جہاں $p(x)$ دو درجہ کی ایک کثیر رکنی ہے دو درجی مساوات کہلاتی ہے۔ جب ہم $p(x)$ کے ارکان کو اس کے قوت نماوں کی گھٹتی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تو معیاری شکل حاصل ہوتی ہے یعنی $ax^2 + bx + c = 0$، $a \neq 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل کہلاتی ہے، اور $y = ax^2 + bx + c$ ایک دو درجی تفاعل کہلاتا ہے۔

کوشش کیجیے

جانچ کہ آیا ذیل کی مساواتیں دو درجی ہیں یا نہیں؟

(i) $x^2 - 6x - 4 = 0$ (ii) $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

(iii) $7x = 2x^2$ (iv) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \quad (x \neq 0)$

(v) $(2x + 1)(3x + 1) = 6(x - 1)(x - 2)$ (vi) $3y^2 = 192$

SCERT TELANGANA

دودرجی تفاعلات کے کئی استعمالات ہیں۔ان میں سے چند یہ ہیں

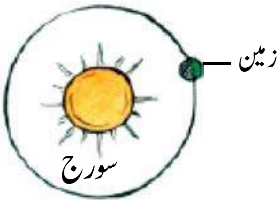
1۔ جب راکٹ کواوپر کی جانب داغا جاتا ہےتو راکٹ کی بلندی کوایک درجی تفاعل سے بیان کیا جاتا ہے۔

2۔ سٹیلائیٹ ڈشش کی شکلیں' ٹیلی اسکوپ کے انعکاسی آئینے' عینک کے عدسے اوراجرام فلکی کے مداروں کے شکلوں کی تعریف دودرجی مساواتوں سے بیان کی جاتی ہے۔

سٹیلائیٹ ڈش

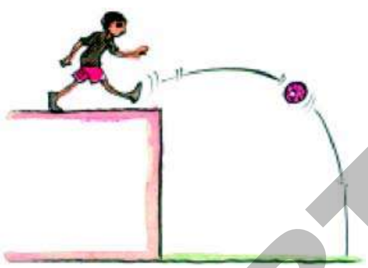
انعکاسی آئینہ

عینک کے عدسے



3۔ پروجیکٹل کے راستے کودودرجی تفاعل سے بیان کیا جاتا ہے۔

4۔ جب ایک گاڑی کو بریک لگائے جاتے ہیں تو وہ حالت سکون میں آنے تک کے فاصلہ کودودرجی مساوات کے استعمال سے محسوب کیا جاتا ہے



SCERT TELANGANA

مثال - 1: حسب ذیل صورت حال کوموزوں ریاضیاتی مساوات سے ظاہر کیجیے۔

(i) صہیب اور عاطف کے پاس جملہ 45 سنگ مرمر کی گولیاں ہیں ہر ایک نے 5' سنگ مرمر گولیوں کوکھوڈالا۔ان کی بچی ہوئی سنگ مرمر کی گولیوں کا حاصل ضرب 124 ہے ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان کے پاس پہلے کتنی سنگ مرمر کی گولیاں تھیں؟

(ii) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر 25 سمر ہے ہم جانتے ہیں کہ دواضلاع کی لمبائیوں کا فرق 5 سمر ہے۔ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان ضلعوں کے طول کیا ہیں؟

حل: (i) مان لیجیے کہ صہیب کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد x ہے۔

تب عاطف کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد $= 45 - x$ (کیوں؟)

صہیب کے پاس باقی سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد $= x - 5$

عاطف کے پاس باقی سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد $= (45 - x) - 5$

$= 40 - x$

لہٰذا ان کا حاصل ضرب $(x - 5)(40 - x) = 124$

$-x^2 + 45x - 200 = 124$

یعنی $-x^2 + 45x - 324 = 0$

منفی (-1) سے ضرب دینے پر $x^2 - 45x + 324 = 0$

لہٰذا صہیب کے پاس سنگ مرمر کی گولیوں کی تعداد 'x' دو درجی مساوات $x^2 - 45x + 324 = 0$ کو مطمئن کرتی ہے۔ جو سوال کے مطابق مطلوبہ مساوات ہے۔

(ii) مان لیجیے کہ چھوٹے ضلع کی لمبائی x سمر ہے تب

بڑے ضلع کی لمبائی $= x+5$ سمر

دی گئی وتر کی لمبائی $= 25$ سمر

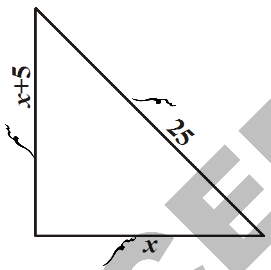
کسی مثلث قائمۃ الزاویہ کے لیے ہم جانتے ہیں کہ $(\text{وتر})^2 = (\text{ضلع})^2 + (\text{ضلع})^2$

لہٰذا $x^2 + (x + 5)^2 = (25)^2$

$x^2 + x^2 + 10x + 25 = 625$

$2x^2 + 10x - 600 = 0$

$x^2 + 5x - 300 = 0$



اس مساوات سے حاصل ہونے والی 'x' کی قدر دیئے ہوئے قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کی ممکنہ قدروں کو دے گی

مثال - 2: جانچیئے کیا حسب ذیل مساواتیں دو درجی مساواتیں ہیں۔

i. $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ii. $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

iii. $x(2x + 3) = x^2 + 1$ iv. $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

حل: (i) $LHS = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

یعنی $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ کو

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے

SCERT TELANGANA

یعنی $\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$. کی شکل میں ہے

لہذا دی گئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

(ii) یہاں $LHS = x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$

اور $RHS = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$$

$$x^2 + x + 8 - x^2 + 4 = 0$$

یعنی $x + 12 = 0$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں نہیں ہے، $a \neq 0$

لہذا دی گئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

(iii) یہاں $LHS = x (2x + 3) = 2x^2 + 3x$

لہذا $x (2x + 3) = x^2 + 1$ کو

اس طرح $2x^2 + 3x = x^2 + 1$ بھی لکھا جاسکتا ہے

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x^2 + 3x - 1 = 0$

یہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے۔

لہذا دی گئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

(iv) $LHS = (x + 2)^3 = (x + 2)^2 (x + 2)$

$$= (x^2 + 4x + 4) (x + 2)$$

$$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

اس لیے $(x + 2)^3(x + 2)^3 = x^3 - 4$ کو

اس طرح $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ کے طور بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$\Rightarrow 6x^2 + 12x + 12 = 0$ یا $x^2 + 2x + 2 = 0$

یہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے

لہذا دی گئی مساوات دودرجی مساوات ہے۔

تبصرہ: مثال (ii) ایک دودرجی مساوات معلوم ہوتی ہے لیکن یہ دودرجی مساوات نہیں ہے۔

اور پر مثال (iv) میں دی گئی مساوات بظاہر ایک مکعبی مساوات (تیسرے درجہ کی مساوات) معلوم ہوتی ہے نہ کہ دودرجی مساوات لیکن یہ دودرجی مساوات کی شکل تبدیلی ہوتی ہے کہ دی گئی مساوات دودرجی مساوات ہے یا نہیں فیصلہ کرنے سے پہلے اس کو مختصر کرنا ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

مشق - 5.1

1۔ جانچیے کہ آیا ذیل کی مساواتیں، دودرجی ہیں؟

i. $(x+1)^2 = 2(x-3)$ ii. $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

iii. $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ iv. $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

v. $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ vi. $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

vii. $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ viii. $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2۔ حسب ذیل صورت حال کو دودرجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے

(i) ایک مستطیلی پلاٹ کا رقبہ 528 مربع میٹر ہے پلاٹ کا طول اس کے عرض کے دوگنا سے ایک میٹر زیادہ ہے پلاٹ کا طول اور عرض معلوم کرنا ہے؟

(ii) دو سلسلہ وار مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنا ہے؟

(iii) صہیب کی ماں اس سے 26 سال بڑی ہے ان دونوں کی عمروں کا حاصل ضرب 3 سال بعد 360 سال ہوجائے گا ہمیں صہیب کی موجودہ عمر معلوم کرنا ہے؟

(iv) ایک ریل گاڑی 480 کلومیٹر کا فاصلہ یکساں رفتار سے طئے کرتی ہے اگر اس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم ہوجائے تو اسی فاصلے کو طئے کرنے کے لیے اس کو 3 گھنٹے زیادہ درکار ہوتا ہے میں ریل گاڑی کی رفتار معلوم کرنا ہے؟

5.3 اجزائے ضربی سے دودرجی مساوات کا حل

ہم روزمرہ زندگی کے بعض حالات کو ریاضیاتی طور پر نامعلوم متغیر x کی دودرجی مساوات کی شکل میں ظاہر کرنا سیکھ چکے ہیں اب ہمیں ' x ' کی قدر معلوم کرنا ہے۔

دودرجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ پر غور کیجیے۔ اگر ہم 'x' کو '1' سے تبدیل کریں تب ہم کو مساوات کا $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 = \text{RHS}$ حاصل ہوگا۔ چونکہ مساوات کو مطمئن کرتا ہے تب ہم کہیں گے کہ '1' دودرجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ کا ریشہ ہے۔

$\therefore\ x = 1$ 'دی ہوئی دودرجی مساوات کا حل ہے۔

بالفاظ دیگر سے '1' دودرجی کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 1$ کا صفر ہے۔

عموماً ایک حقیقی عدد دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا ریشہ کہلائے گا اگر $ax^2 + bx + c = 0$ ہو' ہم اس طرح بھی کہتے ہیں کہ $x=\alpha$ ایک دودرجی مساوات کا حل ہے یا پھر 'α' دودرجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے

نوٹ: دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دودرجی مساوات $a^2 + b + c = 0$ کے ریشے ایک ہی ہیں۔

ہم نے باب 3 میں یہ مشاہدہ کیا ہے کہ دودرجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہوسکتے ہیں لہذا کوئی دودرجی مساوات کے زیادہ سے زیادہ 2 ریشے ہوسکتے ہیں (کیوں؟)

SCERT TELANGANA

ہم نے جماعت نہم میں سیکھ چکے ہیں کہ کسی دودرجی کثیر رکنی کے درمیانی ارکان کو ٹکڑے کرتے ہوئے کس طرح اجزائے ضربی معلوم کیا جاتا ہے ہم ان معلومات کو دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں گے۔ آیئے غور کرتے ہیں

مثال - 3: مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے ریشے تحلیل جزوضربی سے معلوم کیجیے۔

حل: آیئے پہلے درمیانی رکن کی پھوڑی کرتے ہیں۔

یاد کیجیے کہ اگر $ax^2 + bx + c$ ایک دودرجی کثیر رکنی ہے تب درمیانی رکن کو ٹکڑے کرنے کے لیے ہمیں دو اعداد p اور q اس طرح معلوم کرنا چاہیے کہ $p+q=b$ اور $p\times q=a\times c$ لہٰذا $2x^2 - 5x + 3$ کے درمیانی رکن کی پھوڑی کیجیے ہمیں دو اعداد p اور q اس طرح معلوم کرنا ہوگا کہ $p+q=-5$ اور $p\times q=2\times3=6$ ۔

اس کے لیے ہم کو 6 کے تمام ممکنہ جزوضربیوں کی جوڑیوں کو لکھنا ہوگا وہ جو $(1, 6)$; $(-1, -6)$; $(2, 3)$; $(-2, -3)$ میں فہرست سے یہ واضح ہوتا ہے کہ جوڑی $(-2,-3)$ ہماری شرط $p + q = -5$ اور $p \times q = 6$ کو مطمئن کرتی ہے۔

درمیانی رکن '$-5x$' کو '$-2x - 3x$' کے طور پر بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\therefore \quad 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x-1) - 3(x-1) = (2x-3)(x-1)$$

اب $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو $(2x-3)(x-1) = 0$ کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔

لہٰذا $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے لیے x کی قدریں مساوی ہوتی ہیں۔ $(2x-3)(x-1) = 0$ کے لیے x کی قدروں کے

اس لیے $2x - 3 = 0$ یا $x - 1 = 0$

اب $2x - 3 = 0$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{3}{2}$ اور $x - 1 = 0$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 1$

لہٰذا $x = 1$ یا $x = \frac{3}{2}$ مساوات کے حل ہیں

بالفاظ دیگر مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے ریشے $\frac{3}{2}$ یا 1 ہیں۔

یہ کیجیے

ذیل کی مساواتوں کے ریشے اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $x^2-5x+6=0$

(i) $x^2+5x-6=0$ (iv) $x^2-5x-6=0$

کوشش کیجیے

تصدیق کیجیے کہ کیا 1 اور $\frac{3}{2}$ مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے ریشے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ ہم $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے ریشے $2x^2 - 5x + 3$ کو دو جزوضربی میں تحلیل کرتے ہوئے اور ہر ایک کو صفر کے مساوی کرتے ہوئے معلوم کیے ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال - 4: دو درجی مساوات $x \neq 0$ $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6}$ کے ریشے معلوم کیجیے؟ $x \neq 0$

حل: دی گئی دو درجی مساوات $x - \frac{1}{3x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0$

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$
$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ کے ریشے x کی وہ قدریں ہیں جن کے لیے $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ ہے۔

اس لیے $2x + 1 = 0$ یا $\therefore\ 3x - 2 = 0$

یعنی $x = -\frac{1}{2}$ یا $\Rightarrow\ x = \frac{2}{3}$

لہذا مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ کے ریشے $\frac{2}{3}$ اور $-\frac{1}{2}$ ہیں۔

ہم جانچ کرتے ہوئے ریشوں کی تصدیق کرتے ہیں $x = \frac{2}{3}$ اور $x = -\frac{1}{2}$ یہ $6x^2 - x - 2 = 0$ کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال - 5: شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کو معلوم کیجیے جس کے لیے سکشن 5.1 میں بحث کی گئی تھی۔

حل: سکشن 5.1 میں ہم معلوم کئے تھے کہ اگر شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی کو x میٹر ہو تب x مساوات $2x^2 + 45x - 47 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے تحلیل اجزائے ضربی کو استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$2x^2 - 2x + 47x - 47 = 0$$
$$2x(x - 1) + 47(x - 1) = 0$$

یعنی $(x - 1)\ (2x + 47) = 0$

لہذا دی ہوئی مساوات کے ریشے $x = 1$ یا $x = \frac{-47}{2}$ ہوں گے چوں کہ 'x' شائقین کے لیے جگہ کی چوڑائی ہے یہ منفی نہیں ہوسکتی

لہذا چوڑائی 1 میٹر ہے۔

مشق - 5.2

1۔ تحلیل اجزائے ضربی سے حسب ذیل دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7^2 + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(vi) $x(x + 4) = 12$

(vii) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(viii) $x - \frac{3}{x} = 2,\ (x \neq 0)$

(ix) $3(x - 4)^2 - 5(x - 4) = 12$

SCERT TELANGANA

2۔ دواعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 27 ،اور حاصل ضرب 182 ہے؟

3۔ دوسلسلہ وار مثبت صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 613 ہے؟

4۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدے سے 7 سمر کم ہے اگر وتر 13 سمر ہو تو باقی دو اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے۔

5۔ ایک گھریلو صنعت سے ایک دن میں مٹی کے برتنوں کی خاص تعداد تیار کی جاتی ہے ایک مخصوص دن یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک برتن کی لاگت (روپیوں میں) اس دن تیار کردہ برتنو کی تعداد کے دوگنا سے 3 زیادہ ہے اگر اس دن کی جملہ لاگت 90 ` ہو تو تیار کردہ برتنوں کی تعداد اور ہر ایک برتن کی قیمت معلوم کیجیے؟

6۔ ایک مستطیل کے ابعاد معلوم کیجیے جس کا احاطہ 28 میٹر اور رقبہ 40 مربع میٹر ہے۔

7۔ ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع سے 4 سمر زائد ہے اگر مثلث کا رقبہ 48 مربع سمر ہو تو قاعدہ اور ارتفاع معلوم کیجیے۔

8۔ دوٹرین ایک اسٹیشن سے ایک ہی وقت روآنہ ہوتی ہیں ایک ٹرین مغرب کی جانب اور دوسری ٹرین شمال کی جانب روآنہ ہوتی ہے پہلی ٹرین دوسری ٹرین کے مقابلے میں 5 کلومیٹر فی گھنٹہ کی زائد رفتار سے نکلتی ہے اگر دو گھنٹے بعد ان کے درمیان 50 کلومیٹر کا فاصلہ ہو تو ہر ایک ٹرین کی اوسط رفتار کیا ہوگی؟

9۔ ایک جماعت میں 60 طلباء ہیں جماعت کے ہر لڑکے نے کسی کام کے لیے لڑکیوں کی تعداد کے مساوی رقم پیش کی اور ہر لڑکی ،لڑکوں کی تعداد کے مساوی رقم دی۔ اگر مجموعی رقم 1600 ` حاصل ہوئی ہو تو بتائیے کہ جماعت میں لڑکوں کی تعداد کیا ہے؟

10۔ ایک موٹر بوٹ دریا کی مخالف سمت میں 24 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرتی ہے جب کہ پانی کی رفتار 3 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے موٹر بوٹ کی ایک چکر کے لیے 6 گھنٹے درکار ہیں۔ ساکن پانی میں اس کی رفتار معلوم کیجیے۔

5.4 تکمیل مربع سے دودرجی مساوات کا حل:

پچھلے سکشن میں ہم بذریعہ تحلیل جز وضربی دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں کیا یہ طریقہ مختلف تمام اقسام دو درجی کے مساواتوں کے لیے قابل اطلاق ہے

آیئے $x^2 + 4x - 4 = 0$ کو تحلیل جز وضربی کے طریقے سے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں

دی گئی مساوات $x^2 + 4x - 4 = 0$ کو تحلیل جز وضربی کے طریقے سے حل کرنے کے لیے ہم کو p اور q معلوم کرنا ہوتا ہے

اس طرح کہ $p + q = 4$ اور $p \times q = -4$۔

لیکن یہ ممکن نہیں ہے لہذا ہم تحلیل جز وضربی کے طریقے سے حل نہیں کر سکتے ہیں

اس لیے ہم کو ایک دوسرا طریقہ کا مطالعہ کرنا ہوگا

SCERT TELANGANA

ذیل کی صورت پر غور کیجیے۔

دوسال قبل عائشہ کی عمر (سالوں میں) اور اب سے چار سال بعد اس کی عمر کا حاصل ضرب، اس کی موجودہ عمر کے دوگنے سے 1 زیادہ ہے بتائیے کہ اس کی موجودہ عمر کیا ہے؟

اس کے جواب کے لیے مان لیجیے کہ عائشہ کی موجودہ عمر 'x' سال ہے دوسال قبل عمر $(x-2)$ سال اور چار سال بعد عمر $(x+4)$ سال تب ان دونوں کا حاصل ضرب $(x-2)(x+4)$ ہے

اس لیے $(x-2)(x+4) = 2x + 1$

یعنی $\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

یعنی $\therefore \quad x^2 - 9 = 0$

لہذا عائشہ کی موجودہ عمر دودرجی مساوات $x^2 - 9 = 0$ کو مطمئن کرتی ہے۔

ہم اس کو $x^2 = 9$ کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ جذر المربع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 3$ اور $x = -3$

چوں کہ عمر مثبت عدد ہونی چاہیے لہذا عائشہ کی موجودہ عمر 3 سال ہوگی۔

اب دوسری دو درجی مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ پر غور کریں گے۔ اس کو حل کرنے کے لیے اس کو ہم $(x+2)^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں

$$(x+2)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 9$$

اس لیے $\therefore \quad x + 2 = 3$ یا $x + 2 = -3$

یعنی $\therefore \quad x = 1$ یا $x = -5$

یعنی $(x+2)^2 - 9 = 0$ کے ریشے '1' اور -5 ہیں۔

مذکورہ بالا دونوں مثالوں میں وہ رکن جس میں 'x' ہے ایک مربع ہے۔ اور ہم جزر المربع لیتے ہوئے آسانی سے ریشے معلوم کر سکتے ہیں لیکن کیا ہوگا اگر ہمیں کہا جائے کہ مساوات $x^2 + 4x - 4 = 0$ کو حل کیجیے۔ اس کو تحلیل اجزائے ضربی سے بھی حل نہیں کیا جاسکتا ہے۔

لہذا اب ہم تکمیل مربع کے طریقے کو متعارف کریں گے۔ اس طریقے میں دودرجی مساوات کے بائیں بازو کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ یہ ایک کثیر رکنی کا کامل مربع بن جائے اور دائیں جانب مستقل رکن ہو۔

اس کا طریقہ عمل حسب ذیل ہے

$$x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4x = 4$$

$$x^2 + 2.x.2 = 4$$

اب LHS $a^2 + 2ab$ کی شکل میں ہے اگر ہم b^2 جمع کرتے ہیں تو $a^2 + 2ab + b^2$ ہوجاتا ہے جو ایک کامل مربع ہے

لہذا دونوں جانب $b^2 = 2^2 = 4$ جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$x^2 + 2.x.2 + 2^2 = 4 + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 8 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

SCERT TELANGANA

اب مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ پر غور کیجیے۔نوٹ کیجیے کہ x^2 کا عددی سر '1' نہیں ہے اس لیے ہم پوری مساوات کو 3 سے تقسیم کرتے ہیں' تا کہ x^2 کا عددی سر '1' بن جائے۔

$$\therefore \quad x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} = \frac{-2}{3}$$

دونوں جانب $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ جمع کرنے پر

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2.x.\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-2}{3} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{(12 \times -2) + (25 \times 1)}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{-24 + 25}{36}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

دونوں جانب جزرالمربع لینے پر

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$$

یعنی $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ یا $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore \quad x = 1$ یا $x = \frac{4}{6}$

$\Rightarrow \quad x = 1$ یا $x = \frac{2}{3}$

اس لیے دی گئی مساوات کے ریشے 1 اور $\frac{2}{3}$ ہیں

مذکورہ بالا مثالوں سے ہم تکمیل مربع کے لیے حسب ذیل الگورتھم اخذ کرسکتے ہیں۔

الگورتھم : مان لیجیے کہ $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات ہے

مرحلہ – 1: مساوات کے دونوں جانب 'a' سے تقسیم کرنے پر

SCERT TELANGANA

مرحلہ - 2 : مساوات کودوبارہ اس طرح ترتیب دیجیے کہ مستقل رکن c/a مساوات کی سیدھی جانب(RHS)و

مرحلہ - 3: LHS کو کامل مربع بنانے کے لیے دونوں جانب $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ جمع کیجیے۔

مرحلہ - 4: LHS کو ایک مربع کے طور پر لکھتے ہوئے RHS کو مختصر کیجیے۔

مرحلہ - 5: اس کو حل کیجیے۔

مثال - 6 : مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ تکمیل مربع سے حل کیجیے

حل: دیا گیا ہے کہ $5x^2 - 6x - 2 = 0$

اب ہم الگورتھم کو اختیار کرتے ہیں

مرحلہ - 1: $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (دونوں جانب 5 سے تقسیم کرنے پر)

مرحلہ - 2: $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$

مرحلہ - 3: $x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$ (دونوں جانب $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ جمع کرنے پر)

مرحلہ - 4: $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

مرحلہ - 5: $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}}$$

$$x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$x = \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \quad \text{یا} \quad x = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \quad \therefore$$

SCERT TELANGANA

مثال- 7: مساوات $4x^2 + 3x + 5 = 0$ کے ریش کامل مربع بنانے کے طریقے سے معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے

$$4x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-5}{4} + \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{-71}{64} < 0$$

لیکن $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$ منفی نہیں ہوسکتا' x' کی کسی بھی حقیقی قدر کے لیے (کیوں؟)

لہٰذا x کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہے جو مساوات کو مطمئن کر سکے

اس لیے اس مساوات کے حقیقی ریشے نہیں ہیں

یہ کیجیے

نیچے دی گئی دودرجی مساواتوں کو کامل مربع بناتے ہوئے حل کیجیے

(i) $x^2 - 10x + 9 = 0$ (ii) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(iii) $x^2 + 7x - 6 = 0$

ہم تکمیل مربع کے استعمال سے کئی مثالوں کو حل کئے ہیں آیئے اب اس طریقے کو معیاری دودرجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ '$(a \neq 0)$ کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

مرحلہ - 1: مساوات کو دونوں جانب a سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

مرحلہ - 2: $$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

SCERT TELANGANA

مرحلہ - 3: $x^2+\frac{b}{a}x+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ (دونوں بازو $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ جمع کرنے پر)

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2=-\frac{c}{a}+\left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

مرحلہ - 4: $\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

مرحلہ - 5: اگر $b^2-4ac\geq 0$ لیا گیا ہو تب دونوں جانب جزرالمربع لینے پر

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اگر $b^2-4ac\geq 0$ ہو تب مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے ریشے $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہوں گے۔

پس اگر $b^2-4ac\geq 0$ دودرجی مساوات $ax^2+bx+c=0$ کے ریشے $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہوں گے۔

دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کا یہ ضابطہ دودرجی ضابطہ کہلاتا ہے۔

آیئے دودرجی ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے چند اور مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال - 8: مشق 5.1 میں سوال نمبر 2(i) کو مذکورہ ضابطہ استعمال کرتے ہوئے حل کیجیے۔

حل: مان لیجیے کہ مستطیلی پلاٹ کا عرض = 'x' میٹر ہے۔

تب طول = (2x+1) میٹر ہے

چونکہ مستطیلی پلاٹ کا رقبہ = 528 مربع میٹر ہے

ہم لکھ سکتے ہیں کہ $x(2x+1)=528$

یعنی $\Rightarrow 2x^2+x-528=0$

یہ $ax^2+bx+c=0$ کی شکل میں ہے جہاں پر $a=2$ ، $b=1$ اور $c=-528$ ہیں۔

لہٰذا دودرجی ضابطہ سے ہمیں حل حاصل ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm 65}{4}$$

یعنی $x=\frac{-66}{4}$ یا $x=\frac{64}{4}$

یعنی $x=\frac{-33}{2}$ یا $\Rightarrow x=16$

چونکہ x منفی نہیں ہوسکتا لہذا پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر ہے چنانچہ پلاٹ کا طول 33 میٹر=(2x+1) ہے
آپ تصدیق کرلیں کہ یہ قدریں سوال کے شرائط کی تکمیل کرتے ہیں۔

سوچیے۔تبادلہ خیال کیجیے

ہمارے پاس ایک دودرجی مساوات کو حل کرنے کے تین طریقے ہیں۔ان طریقوں میں سے آپ کونسے طریقے کو استعمال کرنا چاہیں گے۔کیوں؟

مثال- 9: دوسلسلہ وار مثبت طاق اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 290 ہے۔

حل: مان لیجیے کہ پہلا مثبت طاق صحیح عدد 'x' اور دوسرا مثبت طاق صحیح عدد $(x+2)$ ہوگا۔سوال کے مطابق

$$x^2+(x+2)^2=290$$

یعنی $x^2+x^2+4x+4=290$

یعنی $2x^2+4x-286=0$

یعنی $x^2+2x-143=0$

جو کہ x میں ایک دودرجی مساوات ہے

دودرجی ضابط $\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+572}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{-2\pm 24}{2}$$

یعنی $x=11$ یا $x=-13$

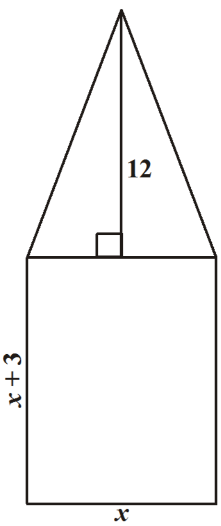
چوں کہ 'x' ایک مثبت طاق عدد ہے دیا گیا ہے لہذا $x\neq-13$

پس سلسلہ وار طاق صحیح اعداد 11 اور 13 $=11+2=(x+2)$ ہیں

تصدیق : $11^2+13^2=121+169=290$

مثال - 10: ایک مستطیلی چمن کی نقشہ کشی کرنا ہے جس کی چوڑائی اس کے طول سے 3 میٹر کم ہے اس کا رقبہ 4 مربع میٹر زائد ہے بہ نسبت ایک پارک کے رقبہ کے جو پہلے ہی تیار کیا گیا ہے جو ایک مساوی الساقین مثلث کی شکل میں ہے جس کا قاعدہ مستطیلی پارک کی چوڑائی کے برابر ہے اور ارتفاع 12 میٹر ہے (شکل 5.3 کو دیکھئے) اس کے طول اور عرض کو معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے کہ مستطیلی چمن کی چوڑائی 'x' میٹر ہے۔



لہٰذا اس کی لمبائی = $(x+3)$ میٹر

اس لیے مستطیلی کا رقبہ = $x\,(x+3)$ مربع میٹر

= (x^2+3x) مربع میٹر

اب مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ = x میٹر

اس لیے مساوی الساقین کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times x \times 12$

= $6x$ مربع میٹر

ہماری ضروریات کے مطابق

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

یعنی $\therefore\ x^2 - 3x - 4 = 0$

دو درجی ضابطہ کے استعمال سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ یا } -1$$

لیکن $x \neq -1$ (کیوں؟) لہٰذا $x=4$

لہٰذا مستطیلی چمن کا عرض = 4 میٹر

اور اس کا طول = $x + 3 = 4+3 = 7$ میٹر ہوگا

تصدیق : مستطیلی چمن کا رقبہ = 28 مربع میٹر

مثلثی پارک کا رقبہ = 24 مربع میٹر = (28-4) مربع میٹر

مثال - 11: دو درجی ضابطہ کے استعمال سے حسب ذیل دی گئی مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے اگر وجود رکھتے ہوں۔

(i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

حل: (i) $x^2 + 4x + 5 = 0$ یہاں $a = 1, b = 4, c = 5$ ہیں لہٰذا $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

چونکہ حقیقی اعداد کا مربع منفی نہیں ہوسکتا ہے اس لیے (ممیّز) $\sqrt{b^2 - 4ac}$ کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہوگی۔

اس لئے دی گئی دو درجی مساوات کے حقیقی ریشے نہیں ہیں۔

(ii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ یہاں $a = 2$ ، $b = -2\sqrt{2}$ ، $c = 5$

SCERT TELANGANA

لہذا $\therefore\ b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

اس لیے $\therefore\ x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

لہذا ریشے = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

مثال - 12: حسب ذیل مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

حل: (i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ مساوات کے دونوں جانب 'x' سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x^2 + 1 = 3x$$

یعنی $x^2 - 3x + 1 = 0$ جو کہ ایک دودرجی مساوات ہے

یہاں $a = 1, b = -3, c = 1$ ہیں

لہذا $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

لہذا $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\ \therefore$ (کیوں؟)

لہذا ریشے $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ اور $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$ ہیں

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2.$

چونکہ $x \neq 0, 2$ مساوات کو $x(x-2)$ سے ضرب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(x-2) - x = 3x\,(x-2)$$

$$-2 = 3x^2 - 6x$$

لہذا دی گئی مساوات کی مختصر شکل $3x^2 - 6x + 2 = 0$ ہے جو کہ ایک دودرجی مساوات ہے

یہاں $a=3, b=-6, c = 2$

لہذا $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

اس لیے $\therefore\ x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$

SCERT TELANGANA

لہذا ریشے $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ اور $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ ہیں

مثال - 13: ایک موٹر بوٹ جس کی رفتار ساکن پانی میں 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے اس کو 24 کلومیٹر کا فاصلہ نہر کے بہاؤ کے مخالف سمت میں طئے کرنے کے لیئے نہر کے بہاؤ کی سمت اسی مقام کو واپسی کے بہ نسبت ایک گھنٹہ زائد درکار رہے۔ نہر کی رفتار کیا ہوگی؟

حل: مان لیجیے کہ پانی کے بہاؤ کی رفتار فی گھنٹہ = x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے

اس لیے بہاؤ کی مخالف سمت موٹر بوٹ کی رفتار = $(18 - x)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

نہر کے بہاؤ کے سمت بوٹ کی رفتار = $(18 + x)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

پانی کے بہاؤ کی مخالف سمت درکار وقت = $\frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \frac{24}{18-x}$ گھنٹے

بہاؤ کی سمت درکار وقت = $\frac{24}{18+x}$ گھنٹے

سوال کے مطابق $\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$

یعنی $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

یعنی $\Rightarrow x^2 + 48x - 324 = 0$

دودرجی ضابطہ کے استعمال سے $x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$

$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6$ یا -54

چونکہ x نہر کے بہاؤ کی رفتار ہے یہ منفی نہیں ہوسکتی لہذا اہم ریشہ $x = -54$ کو نظر انداز کرتے ہیں

اس لیے $x=6$ سے نہر کی رفتار 6 کیلومیٹر فی گھنٹہ حاصل ہوتی ہے

مشق 5.3

1۔ حسب ذیل دودرجی مساواتوں کے ریشے تکمیل مربع سے معلوم کیجیے اگر ریشے وجود رکھتے ہوں

i. $2x^2 + x - 4 = 0$ ii. $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$

iii. $5x^2 - 7x - 6 = 0$ iv. $x^2 + 5 = -6x$

SCERT TELANGANA

2۔ سوال 1 میں دی گئی دودرجی مساواتوں کے ریشے دودرجی ضابط کو استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے۔

3۔ ذیل کی مساواتوں کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $x-\frac{1}{x}=3,\ x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-7}=\frac{11}{30},\ x\neq -4,7$

4۔ رحمٰن کی 3 سال پہلے کی عمر اور 5 سال بعد کی عمر کے مقلوب کا مجموعہ $\frac{1}{3}$ ہے اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

5۔ ایک کلاس ٹسٹ میں طالبہ عائشہ کے ریاضی اور انگریزی کے محصلہ نشانات 30 ہیں اگر وہ ریاضی میں 2 نشانات زیادہ اور انگریزی میں 3 نشانات کم حاصل کرتی ہو تو اس کے نشانات کا حاصل ضرب 210 ہے اس کے دو مضامین کے نشانات معلوم کیجیے؟

6۔ ایک مستطیلی کھیت کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے اگر اس کا بڑا ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہو تو اس کھیت کے ضلعوں کو معلوم کیجیے

7۔ دو اعداد کے مربعوں کا فرق 180 ہے چھوٹے عدد کا مربع' بڑے عدد کا 8 گنا زیادہ ہے دو اعداد معلوم کیجیے

8۔ ایک ٹرین 360 کلومیٹر فی گھنٹہ کی ہموار رفتار سے فاصلہ طئے کرتی ہے اگر رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو یہ سفر طئے کرنے کے لیے ایک گھنٹہ کم لیتی ۔ٹرین کی رفتار معلوم کیجیے۔

9۔ پانی کے دو نل ایک ٹانکی کو $9\frac{3}{8}$ گھنٹوں میں بھر سکتے ہیں بڑے قطر کا نل' چھوٹے قطر کے نل سے ٹانکی بھرنے کے لیے 10 گھنٹے کم وقت لیتا ہے۔ بتائیے کہ علیحدہ طور پر یہ نل ٹانکی کو کتنے گھنٹے میں بھرتے ہیں۔

10۔ ایک ایکسپریس ٹرین میسور تا بنگلور 132 کلومیٹر درمیانی فاصلہ طئے کرنے کے لیے پاسنجر ٹرین کے مقابلے 1 گھنٹہ کم لیتی ہے۔(درمیانی اسٹیشن پر توقف کے وقت کو نظر انداز کیجیے)اگر ایکسپریس ٹرین کی اوسط رفتار یا پاسنجر ٹرین سے 11 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہو تو دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجیے؟

11۔ دو مربعوں کے رقبوں کا مجموعہ 468 مربع میٹر ہے اگر ان کے احاطوں کا فرق 24 میٹر ہو تو ان دو مربعوں کے ضلعوں کو معلوم کیجیے

12۔ ایک گیند 12 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے ایک 17 میٹر بلند بلڈنگ سے انتصاباً اوپر پھینکا گیا۔'t' سکنڈ بعد گیند کی بلندی زمین سے $S=ut+\frac{1}{2}gt^2$ ہوجاتی ہے۔ جہاں $g=-10ms^{-2}$ تب گیند کا زمین تک پہنچنے کا وقت معلوم کیجئے۔

13۔ اگر ایک 'n' ضلعی کثیر رکنی میں $\frac{1}{2}n\,(n\text{-}3)$ وتر ہوں تو 65 وتروں والی ایک کثیر رکنی میں کتنے ضلعے ہوں گے؟ کیا کوئی کثیر ضلعی ہے جس کے 50 وتر ہوں؟

SCERT TELANGANA

5.5 ریشوں کی نوعیت

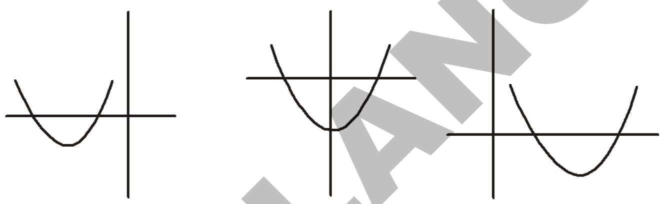
سابقہ سکشن میں ہم نے دیکھا کہ دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ آیئے اب ہم ان کی نوعیت کا فہم حاصل کرنے کی کوشش کرینگے۔

یاد رکھیے کہ صفر '0' وہ نقاط ہے جہاں کثیررکنی کی قدر صفر '0' ہوجاتی ہے۔ یا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دودرجی کثیررکنی کا منحنی x- محور کو قطع کرتی ہے اسی طرح دودرجی مساوات کے ریشے وہ نقاط ہیں جہاں منحنی x- محور کو قطع کرتی ہے۔

پہلی صورت: اگر $b^2 - 4ac > 0$

ہمیں دو مختلف حقیقی ریشے حاصل ہوتے ہیں $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ایسی صورت میں اگر دی گئی دودرجی مساوات کا گراف کھینچتے ہیں تو ہمیں یہ شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔

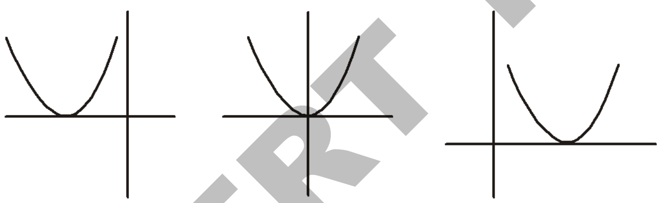


شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ دودرجی مساوات کے منحنی x- محور کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے

دوسری صورت: اگر $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b + 0}{2a}$$

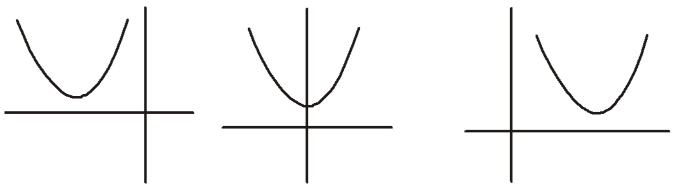
لہذا $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$



شکل سے ظاہر ہوتا ہے کہ دودرجی مساوات کی منحنی x- محور کو ایک ہی نقط پر مس کرتی ہے

تیسری صورت: اگر $b^2 - 4ac < 0$

ریشے حقیقی نہیں ہیں۔ ریشے خیالی ہیں



SCERT TELANGANA

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

اس صورت میں گراف نہ ہی x محور کو قطع کرتا ہے اور نہ ہی مس کرتا ہے لہذا کوئی حقیقی ریشے نہیں ہیں۔

چوں کہ $b^2 - 4ac$ تعین کرتا ہے کہ دودرجی مساوات $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے حقیقی ہیں یا نہیں۔

$b^2 - 4ac$ کو درجی مساوات کا ممیّز (D) کہتے ہیں۔

لہذا دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) دو ریشے حقیقی اور مختلف ہیں اگر $b^2 - 4ac > 0$

(ii) دو ریشے حقیقی اور مساوی ہیں اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی نہیں ہیں اگر $b^2 - 4ac < 0$

آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال - 14: دودرجی مساوات $2x^2 - 4x + 3 = 0$ کا ممیّز معلوم کیجیے۔ اور اس کے ریشوں کی نوعیت پر تبصرہ کیجیے۔

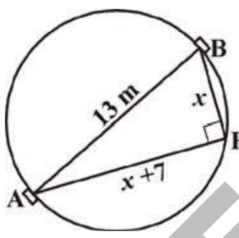
حل: دی گئی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے۔ جہاں $a = 2, b = -4, c = 3$

اس لیے ممیّز $b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3)$

$= 16 - 24 = -8 < 0$

لہذا دی گئی مساوات کے کوئی حقیقی ریشے نہیں ہیں۔

مثال - 15: ایک کھمبے کو 13 میٹر قطر کے دائرہ نما چمن کی باونڈری کے ایک نقطہ پر اس طرح انتصابی کھڑا کرنا ہے کہ اس کا فاصلہ قطر کے مخالف دونوں جانب باونڈری پر قائم گیٹس A اور B کے فاصلوں کا فرق 7 میٹر ہو کیا اس طرح انجام دینا ممکن ہے؟ اگر ممکن ہو تو بتلایئے کہ ان دونوں گیٹ سے کھمبے کو کس فاصلہ پر نصب کیا جائے۔



حل: آیئے پہلے شکل تشکیل دیتے ہیں

مان لیجیے کہ p کھمبے کا تعین مقام ہے

مان لیجیے کہ کھمبے کا فاصلہ گیٹ B سے x میٹر یعنی BP= x میٹر

اب کھمبے کا فاصلہ دونوں گیٹوں کے فاصلہ کا فرق = 7 میٹر = (BP - AP) یا (AP−BP)

اس لیے AP = $(x+7)$ میٹر

اب AB= 13 میٹر اور چونکہ AB قطر ہے

$\angle APB = 90^o$ (کیوں؟)

اس لیے فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے $AP^2 + PB^2 = AB^2$

یعنی $\Rightarrow (x + 7)^2 + x^2 = 132$

یعنی $\Rightarrow x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

یعنی $\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$

لہذا گیٹ B سے کھمبے کا فاصلہ x مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے

لہذا کھمبے کو نصب کرنا ممکن ہوگا اگر اسی مساوات کے ریشے حقیقی ہوں یہ دیکھنے کے لیے کہ ریشے حقیقی ہیں یا نہیں

آیئے اس کے ممیّز پر غور کرتے ہیں۔ ممیّز ہے

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 72 - 4 \times 1 \times (-60)$$

$$= 289 > 0$$

لہذا دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو ریشے حقیقی ہیں اور کھمبے کو دائروی چمن کے باونڈری پر نصب کرنا ممکن ہے

دو درجی ضابطہ کی مدد سے مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لیے $x = 5$ یا -12

چوں کہ 'x' کھمبے اور گیٹ B کا درمیانی فاصلہ ہے لہذا یہ مثبت ہونا چاہیے

اس لیے $x = -12$ کو نظر انداز کرنا ہوگا لہذا, $\therefore x = 5$

اس لیے دائروی چمن کی باونڈری پر کھمبا گیٹ B سے 5 میٹر اور گیٹ A سے 12 میٹر فاصلہ کی دوری پر نصب کیا جائے گا۔

کوشش کیجیے

1۔ کسی دو درجی مساوات کو حل کرنے کی کوشش سے پہلے اس کے ممیّز کی قدر محسوب کرنے کے فوائد بیان کیجیے اس کی قدر کی کیا اہمیت ہے؟

2۔ ایسی تین دو درجی مساواتیں لکھیے جن میں ایک کے دو حقیقی حل ہوں ایک کا حقیقی حل نہ ہو اور ایک کا بے کم صرف ایک ہی حل ہو۔

مثال- 16: مساوات $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ کا ممیّز معلوم کیجیے اور بتائیے کہ ریشوں کی نوعیت معلوم کیجیے؟ اگر یہ حقیقی ہوں تو ان کو محسوب کیجیے۔

حل: یہاں $a=3$ ، $b=-2$ اور $c=\frac{1}{3}$

اس لیے ممیّز $\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

لہذا دی گئی دو درجی مساوات کے دو مساوی ریشے ہیں۔

یعنی ریشے $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{2}{6}, \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ہیں۔

SCERT TELANGANA

مشق 5.4

1۔ حسب ذیل دو درجی مساوات کے ریشوں کی نوعیت معلوم کیجیے؟ اگر حقیقی ریشے وجود رکھتے ہیں تو انہیں محسوب کیجیے

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2۔ حسب ذیل ہر ایک دو درجی مساوات میں K کی قدر اس طرح معلوم کیجیے کہ ان کے ریشے مساوی ہوں؟

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$ $(k \neq 0)$

3۔ کیا یہ ممکن ہے کہ ایک ایسا مستطیلی آم کا باغ کی اگایا جائے جس کا طول اس کے عرض کا دوگنا ہے اور رقبہ 800 مربع میٹر ہے؟ اگر ایسا ہو تو اس کا طول اور عرض معلوم کیجیے۔

4۔ دو دوستوں کی عمر کا مجموعہ 20 سال ہے۔ 4 سال پہلے ان کی عمر کا حاصل ضرب 48 تھا۔ کیا ایسا ممکن ہے اگر آپ کا جواب ہاں ہو تو ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

5۔ کیا یہ ممکن ہے کہ ایک ایسا مستطیلی چمن بنایا جائے جس کا احاطہ 80 میٹر اور رقبہ 400 مربع میٹر ہو؟ اگر ممکن ہو تو طول اور عرض معلوم کیجیے، نتیجہ کی تصدیق کیجیے۔

مشق (اختیاری)

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ ایک مستوی پر چند نقاط کو نشان زدہ کیا گیا ہے ان میں کوئی تین ہم خط نہیں ہیں۔ خطی قطعوں سے ہر ایک نقطہ کو باقی تمام نقاط سے جوڑا گیا۔ اگر خطی قطعوں کی تعداد 10 ہو تب نقاط کی تعداد معلوم کیجیے؟

2۔ ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل ضرب 8 ہے جب عدد میں 18 جمع کیا جائے تو ہندسے اپنا مقام بدل لیتے ہیں عدد کو معلوم کیجیے؟

3۔ 8 میٹر لمبے ایک برقی تار کو 2 ٹکڑوں میں کاٹا گیا ہر ٹکڑے کو موڑ کر ایک مربع کی شکل دی گئی تار کو کس جگہ سے کٹ کرنا چاہیے تاکہ ان دونوں مربعوں کے رقبوں کا مجموعہ 2 مربع میٹر ہو؟

(اشارہ: $\left[x + y = 8, \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2\right]$

4۔ صہیب اور عاطف کسی مکان کی بیرونی دیواروں کو 6 دن میں آہک پاشی کرتے ہیں صہیب اکیلا یہ کام عاطف سے 5 دن پہلے کرتا ہے تو بتاؤ کہ صہیب کتنے دن میں اس کام کو مکمل کرے گا؟

5۔ بتلائیے کہ دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ کے ریشوں کا مجموعہ $\frac{-b}{a}$ ہے۔

SCERT TELANGANA

6۔ ثابت کیجیے کہ دودرجی مساوات $a \neq 0$ $ax^2 + bx + c = 0$ کا حاصل ضرب $\frac{c}{a}$ ہے؟

7۔ اگر کسر اور مقلوب کا مجموعہ $2\frac{16}{21}$ ہو تو کسر معلوم کیجیے؟

تجویز کردہ منصوبہ کام

دودرجی مساوات $(a \neq 0)$ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کے کوئی دو یا تین دودرجی مساوات تیں مختلف صورتحال جیسے $\alpha>0$ $\alpha<0$، $b=0$ کے لیے، لیجیے اور ان کو ترسیمی طریقے سے حل کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ متغیر 'x' میں دودرجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں a,b,c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$.

2۔ ایک حقیقی عدد 'α' دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا ریشہ کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ہو۔ دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے یکساں ہوتے ہیں؟

3۔ اگر $ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ کو دو خطی اجزاء کے حاصل ضرب کے طور پر اجزائے ضربی میں تحویل کرتے ہیں تب دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے ہر جز ضربی کو صفر '0' کے مساوی کرتے ہوئے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

4۔ ایک دودرجی مساوات کو تکمیل مربع کے طریقے سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔

5۔ دودرجی ضابطہ: دودرجی مساوات $(a \neq 0)$ ،$ax^2+bx+c=0$ کے ریشے $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, سے حاصل کئے جاتے ہیں

جبکہ $b^2 - 4ac \geq 0$

6۔ دودرجی مساوات $(a \neq 0)$ $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) دو ریشے حقیقی اور مختلف ہیں اگر $b^2 - 4ac > 0$

(ii) دو ریشے حقیقی اور مساوی ہیں اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) دو ریشے غیر حقیقی ہیں اگر $b^2 - 4ac < 0$

SCERT TELANGANA

باب
6

تصاعد
Progressions

6.1 تمہید:

آپ نے قدرت کی کئی اشیاء میں ایک مخصوص ترتیب یا نمونے کا مشاہدہ کیا ہوگا۔ جیسے کہ سورج مکھی کی پنکھڑی شہد کی مکھیوں کا چھتہ، مکئی کے بھٹے میں بیج، اناس کے پیچ دار اور صنوبر کے پھل وغیرہ۔

مذکورہ بالا ہر مثال میں کیا آپ نے ایک مخصوص ترتیب کو پایا ہے؟ قدرتی طور پر پائے جانے والی یہ مخصوص ترتیب تصاعد نہیں ہے۔ ایک جیسی نظر آنے والی سورج مکھی کی پنکھڑیاں مساوی دوری/ فاصلے پر ہوتی ہیں۔ شہد کی مکھیوں کے چھتہ میں مسدس نما (چھ رخی) سورخ متشاکل ہوتے ہیں۔ اسی طرح آپ مکئی اور اناس میں قدرتی ترتیب پاتے ہیں۔

روزمرہ زندگی کے کئی مواقع پر ہم ترتیب کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ چند مثالیں یہ ہیں۔

(i) $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6$ ..... کی قدروں میں آخری ہندسے (اکائی کا ہندسہ) کی فہرست

4, 6, 4, 6, 4, 6, ... ہے۔

(ii) ماریہ بینک کے مسابقتی امتحان کی تیاری کر رہی ہے۔ اس ضمن میں ترتیب، سلسلوں پر مسائل حل کر رہی ہے۔ اس میں سے ایک سوال اس طرح تھا ''ذیل کے اعداد کی ترتیب میں اگلے دو رکن معلوم کیجیے''

1, 2, 4, 8, 10, 20, 22 ....

(iii) اکرم نے ملازمت کے لیے درخواست دی۔ وہ ماہانہ 8000 ` تنخواہ اور سالانہ 500 ` تدریجی اضافہ (Increment) کے ساتھ تقرر پاتا ہے۔ تب اسکی ماہانہ تنخواہ (روپیوں میں) پہلے، دوسرے/تیسرے..........سال کے لیے ترتیب وار 8000, 8500, 9000 ..... ہوگی۔

(iv) ایک سیڑھی (زینہ) کے ڈنڈے کا طول نیچے سے اوپر کی جانب ہموار 2 سمر کم ہوتا جارہا ہے۔ اگر سیڑھی کے نچلے ڈنڈے کا طول 45 سمر ہو تب نیچے سے پہلا، دوسرا، تیسرا۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔آٹھواں ڈنڈا ترتیب وار 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31 ہوگا۔

مذکورہ بالا اعداد کی ترتیب میں کیا آپ نے کسی خاص ترتیب کا مشاہدہ کیا ہے؟

مثال (i) میں دو اعداد 4 اور 6 یکے بعد دیگرے دہرائے جارہے ہیں۔

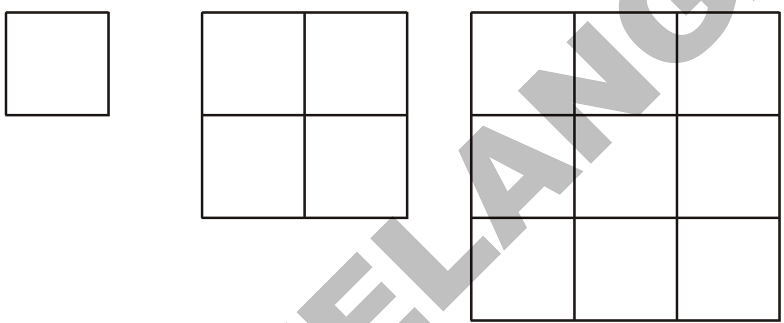
SCERT TELANGANA

مثال (ii) میں ترتیب معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔ مثال (iii) اور (iv) میں اعداد کے درمیان رشتوں کا مشاہدہ کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ ہمیشہ اس میں اضافہ ہوتا جارہا ہے۔ دی گئی فہرست .... ,8000, 8500, 9000 کے پیش رو رکن میں 500 جمع کرنے سے اگلا رکن حاصل ہورہا ہے۔

اسی طرح ..... ,45, 43, 41 میں ہر پیش رو رکن میں ''2-'' جمع کرنے پر پس رو رکن حاصل ہورہا ہے۔ اب ہم مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں جس میں اعداد کی ترتیب میں مسلسل اضافہ ہوتے رہتا ہے۔

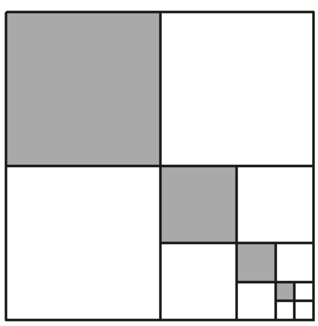
a) ایک سیونگ اسکیم (Saving Scheme) میں رقم میں ہر 3 سال میں $\frac{5}{4}$ گنا اضافہ ہوتی ہے۔ اس اسکیم میں 8000` کا سرمایہ لگانے پر 3، 6، 9 اور 12 سال بعد حاصل ہونے والی جملہ رقم ترتیب وار، 1000,12500,15625,19531.25 ہوگی۔

b) ......1,2,3 اکائی ضلع والے مربع میں اکائی مربع کی تعداد ترتیب وار .... ,$1^2, 2^2, 3^2$ ہے



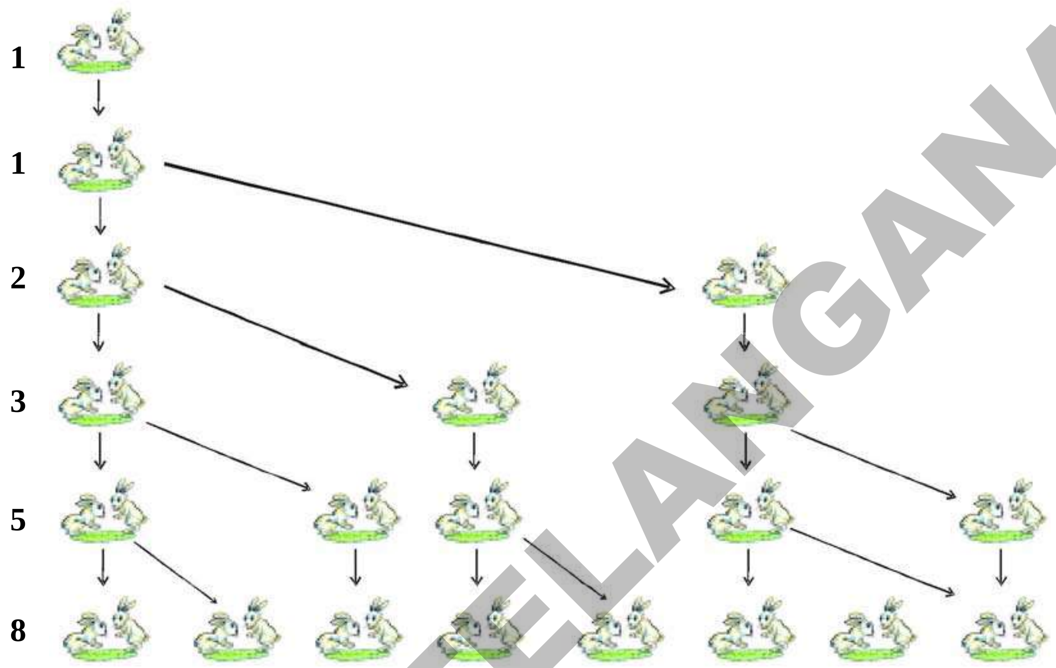
c) آفرین نے بیٹی کے یوم پیدائش کے موقع پر -/1000` (بیٹی کی رقم چھپانے والے) بکسے میں رکھے۔ اگر ہر سال اس بکسے میں -/500` اضافہ کرتے ہوئے جمع کرنے پر پہلی، دوسری، تیسری اور چوتھی سالگرہ پر رقم ترتیب وار ,1000, 1500, 2000 ..... ,2500 ہوگی۔

d) ذیل کی شکل میں سایہ دار مربعوں کے حصوں کی قدر کو کسر کی شکل میں ترتیب وار .... ,$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$ سے ظاہر کیا گیا



e) مان لیجیے کہ ایک خرگوش کی جوڑی دوسرے مہینے سے ہر مہینہ ایک نیا جوڑا پیدا کرتی ہے۔اس طرح نیا جوڑا بھی دوسرے مہینے سے ہر مہینہ ایک نیا جوڑا پیدا کرتا ہے۔ پہلے مہینے میں صرف ایک جوڑی ہے اور فرض کیجیے کہ کوئی بھی جوڑا مرا نہیں۔ پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں اور چھٹویں۔۔۔۔۔۔مہینے میں خرگوش کے جوڑوں کی تعداد بالترتیب۔

1, 1, 2, 3, 5, 8



اوپر کی مثالوں میں ہم چند ترتیبوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔بعض صورتوں میں ایک رکن اس کے پیش رو رکن میں ایک متعین عدد/مستقل عدد جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور بعض صورتوں میں ہر رکن کو ایک مستقل رکن سے ضرب دینے پر اگلا رکن حاصل ہوتا ہے جبکہ بعض میں متواتر اعداد کے مربعے لیے جاتے ہیں وغیرہ

اس باب میں ہم ہر رکن پیش رو رکن میں ایک مستقل رکن کو جمع کرنے پر حاصل ہونے والی ترتیب اور ہر رکن کو ایک مستقل رکن سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والی ترتیب، انکا n واں رکن اور n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنا وغیرہ سے متعلق گفتگو کریں گے۔

تاریخ: 400 سال قبل بابل کی باسی (عراق کا اک قدیم شہر) حسابی تصاعد اور جیومٹریہ تصاعد سے واقفیت رکھتے تھے اس کے کئی شواہد ملتے ہیں۔ بوتھینس (570 عیسوی) کے مطابق قدیم یونانی مصنف تصاعد سے واقف تھے۔ ہندوستان کے قدیم ریاضی داں آریہ بھٹ (470 عیسوی) نے پہلی مرتبہ پہلے طبعی اعداد کے مربعوں اور مکعبوں کے مجموعے کا ضابطہ متعارف کیا جس کو اس نے اپنی مشہور تصنیف آریہ بھٹیم (499 عیسوی) میں قلم بند کیا۔علاوہ ازیں اس نے حسابی تصاعد میں P رکن سے n ویں رکن تک ارکان کے مجموعے کو معلوم کرنے کا ضابطہ بھی پیش کیا ہے۔ برہم گپت (598 عیسوی) ماہاویرّ (850 عیسوی) اور بھاسکرا (1114-1185 عیسوی) جیسے ریاضی دانوں نے پہلے طبعی اعداد کے مربعوں و معکبوں کے مجموعے پر تحقیقات کی ہیں۔

SCERT TELANGANA

6.2 حسابی تصاعد (Arthmetic Progression):

حسب ذیل اعداد کی فہرست کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) 1, 2, 3, 4, . . . (ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) – 3, –2, –1, 0, . . . (iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

فہرست کے ہر عدد کو رکن کہتے ہیں۔

دیئے گئے ارکان کی اساس پر کیا آپ اگلے ارکان لکھ سکتے ہیں؟ اگر آپ کا جواب ''ہاں'' ہو تب آپ کیسے لکھو گے؟

شاید آپ ترتیب کے اصول کی بنیاد پر لکھ سکیں گے۔ آیئے اس اصول کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

(i) میں ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اپنے پیش رو رکن سے 1 زیادہ ہے۔

(ii) میں ہر رکن اپنے پیش رو رکن سے 30 کم ہے۔

(iii) میں ہر رکن پیش رو رکن میں 1 جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(iv) میں تمام رکن 3 ہیں۔ یعنی ہر رکن' اپنے پیش رو رکن میں '0' جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(v) میں ہر رکن' اپنے پیش رو رکن میں '0.5-' جمع کرنے (یعنی 0.5 نکالنے) سے حاصل ہوتا ہے۔

اوپر دیئے گئے تمام اعداد کی فہرست میں' ہر فہرست کا ہر رکن اسکے پیش رو رکن میں ایک متعین/مستقل عدد جمع کرنے یا تفریق کرنے سے حاصل ہو رہا ہے۔ ایسے اعداد کا سلسلہ یا فہرست ہی حسابی تصاعد کہلاتی ہے۔

کوشش کیجیے

(i) حسب ذیل میں کون سا سلسلہ حسابی تصاعد ہے؟ اور کیوں؟

(a) 2, 3, 5, 7, 8, 10, 15, ... (b) 2, 5, 7, 10, 12, 15, ...

(c) -1, -3, -5, -7, ...

(ii) کوئی 3 حسابی تصاعد لکھیے؟

6.2.1 حسابی تصاعد کیا ہے؟

مذکورہ بالا مثالوں کے مشاہدہ سے پتہ چلتا ہے کہ ''اعداد کے سلسلہ/فہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو' اس کے پیش رو عدد میں ایک معین عدد (مستقل عدد) جمع کرنے سے حاصل ہونے والا سلسلہ حسابی تصاعد کہلاتا ہے''۔

جمع کیا جانے والا متعین عدد ''فرق مشترک'' کہلاتا ہے۔ یاد رہے کہ یہ مثبت' منفی یا صفر بھی ہوسکتا ہے۔

ایک حسابی تصاعد کے پہلے رکن کو a_1' دوسرے رکن کو a_2'.......... n ویں رکن کو a_n اور فرق مشترک d تصور کرنے پر' حسابی تصاعد کا سلسلہ $a_1, a_2, a_3, . . ., a_n$ ہوگا۔

لہٰذا $d = a_2 – a_1 = a_3 – a_2 = . . . = a_n – a_{n-1}$

SCERT TELANGANA

آ یئے حسابی تصاعد کی مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

a) کسی اسکول کے دعائیہ اجتماع میں قطار میں کھڑے ہوئے طلبہ کی بلندیاں (سنٹی میٹر میں) اس طرح سے ہیں

147 , 148, 149, . . ., 157

b) ایک شہر کے ماہ جنوری کے ایک ہفتہ میں ریکارڈ کیا گیا اقل ترین درجہ حرارت صعودی ترتیب میں

– 3.1, – 3.0, – 2.9, – 2.8, – 2.7, – 2.6, – 2.5 ہے

c) 1000 ` کے قرض کو 5% کے حساب سے ہر مہینہ ادا کرنے پر باقی ادا کی جانے والی رقم

950, 900, 850, 800, . . ., 50

d) ایک اسکول میں اول تا 12 ویں جماعت (I to XII) زائد نشانات حاصل کرنے والے طالب علم کو دیے جانے والے نقد انعام بالترتیب

200, 250, 300, 350, . . ., 750

e) دس مہینوں تک ہر مہینہ اگر 50 روپے کے حساب سے بچت کریں تو ہر مہینہ کی بچت

50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500 ہوگی

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1. کیا مذکورہ بالا کی ہر فہرست حسابی تصاعد ہے۔ ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔
2. مذکورہ بالا کی ہر فہرست کے لیے فرق مشترک معلوم کیجیے؟ سوچ کر بتایئے کہ فرق مشترک کب مثبت ہوتا ہے؟
3. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک اقل ترین مثبت عدد ہو۔
4. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک اعظم ترین مثبت عدد ہو۔
5. ایک ایسا حسابی تصاعد لکھئے جس کا فرق مشترک منفی ہو۔

حسابی تصاعد کی عام شکل: حسابی تصاعد کو حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, . . .$

یہ حسابی تصاعد کی عام شکل کہلاتی ہے۔ جہاں پر پہلا رکن 'a' اور d فرق مشترک ہے۔

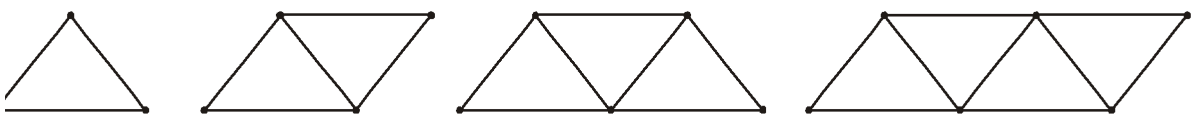
مثال کے طور پر .... ,1, 2, 3, 4, 5 میں

پہلا رکن 1 ہے اور فرق مشترک بھی 1 ہے۔

اسی طرح ..... 2, 4, 6, 8, 10 میں پہلا رکن اور فرق مشترک کیا ہوگا؟

مشغلہ

(i) حسب ذیل شکلوں کو تیلیوں کی مدد سے بنایئے۔



(ii) ہر شکل کے لیے درکار تیلیوں کی تعداد کو ترتیب وار لکھئے۔

(iii) کیا آپ اعداد کی فہرست میں فرق مشترک معلوم کر سکتے ہیں؟

(iv) کیا اعداد کی ہر فہرست ایک حسابی تصاعد کا سلسلہ ہے؟

6.2.2 حسابی تصاعد کی حدود

مشاہدہ کیجیے کہ 6.2.1 کے تحت دی گئی (a) تا (e) مثالوں میں دی گئی فہرست میں اعداد کی تعداد محدود ہے۔ ایسے حسابی تصاعد محدود حسابی تصاعد کہلاتے ہیں۔ علاوہ ازیں آپ نے یہ بھی مشاہدہ کیا ہوگا کہ اس فہرست میں آخری رکن بھی موجود ہوتا ہے لیکن 6.2 کے تحت (i) تا (v) فہرست میں اعداد کی تعداد لامحدود ہے۔ ایسے حسابی تصاعد لامحدود حسابی تصاعد کہلاتے ہیں۔ ان میں آخری رکن موجود نہیں ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

محدود حسابی تصاعد کی 3 مثالیں اور لامحدود حسابی تصاعد کی 3 مثالیں لکھئے۔

ایک حسابی تصاعد سے متعلق جانکاری کے لیے ہمیں کن اقل ترین معلومات سے آگہی ضروری ہے؟ کیا یہ کافی ہوگا کہ تصاعد کا پہلا رکن معلوم ہو؟ یا کیا یہ کافی ہوگا کہ اس کا فرق مشترک معلوم ہو؟

ہم دیکھتے ہیں کہ دونوں ہمارے لیے ضروری ہیں۔ یعنی پہلا رکن a اور فرق مشترک d۔ یہ دو مقداریں کافی ہوں گی کسی بھی حسابی تصاعد کی تکمیل کے لیے۔

مثال کے طور پر پہلے رکن a کی قدر 6 اور فرق مشترک d کی قدر 3 ہو تب حسابی تصاعد کا سلسلہ ہوگا

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

اور پہلے رکن a کی قدر 6 اور فرق مشترک d کی قدر -3 ہو تب حسابی تصاعد ہوگا۔

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

اسی طرح اگر

$a = -7$ اور $d = -2$ تب حسابی تصاعد $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$ اور $d = 0.1$ تب حسابی تصاعد $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$ اور $d = 1\frac{1}{2}$ تب حسابی تصاعد $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots\ldots$

$a = 2$ اور $d = 0$ تب حسابی تصاعد $2, 2, 2, 2, \ldots$

لہٰذا 'a' اور d کی قدر معلوم ہو تب ہم حسابی تصاعد لکھ سکتے ہیں۔

آئیے ایک اور طریقہ سے کوشش کرتے ہیں۔ اگر اعداد کا سلسلہ یا اعداد کی فہرست دی جائے تب وہ کیا حسابی تصاعد میں ہے یا نہیں؟ کس طرح معلوم کریں گے۔

مثال کے طور پر اعداد کی فہرست $6, 9, 12, 15, \ldots,$

SCERT TELANGANA

پہلے ہم متواتر اعداد یا متواتر رکن کا فرق جانیں گے۔ فہرست کے مطابق

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

یعنی ہم دیکھتے ہیں کہ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \ldots\ldots = 3$

یہاں ہر صورت میں دو متواتر اعداد کا فرق 3 ہے لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک حسابی تصاعد ہے۔ جس کا پہلا رکن 6 اور فرق مشترک 3 ہے۔

اعداد کی فہرست $6, 3, 0, -3, \ldots$ کے لیے

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = -3$$

یعنی یہ بھی ایک حسابی تصاعد ہے، جس کا پہلا رکن 6 اور فرق مشترک 3- ہے۔

لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کوئی دو متواتر اعداد کا فرق اگر مستقل رکن ہو تب وہ حسابی تصاعد ہے۔

یعنی عام طور پر حسابی تصاعد $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$d = a_{k+1} - a_k \qquad (k \in N; k \geq 1)$$

یہاں a_{k+1} اور a_k ترتیب وار $(k+1)$ واں اور k واں رکن ہے۔

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ فہرست کا مشاہدہ کیجیے۔ اس میں دو متواتر ارکان کا فرق مشترک ایک جیسا (مستقل) نہیں ہے۔ لہذا یہ حسابی تصاعد نہیں ہوگا۔

نوٹ: $6, 3, 0, -3, \ldots\ldots$ حسابی تصاعد میں d کی قدر معلوم کرنے کے لیے ہم 3 سے 6 تفریق کیا ہے نہ کہ 6 سے 3۔ یعنی $(k+1)$ واں رکن چھوٹا ہونے پر بھی k واں رکن تفریق کرنا چاہیے۔ علاوہ ازیں 'd' کی قدر معلوم کرنے کے لیے $a_2 - a_1, a_3 - a_2 \ldots\ldots$ ان تمام کا فرق معلوم کرنا ضروری نہیں۔ ان میں سے صرف کسی ایک کی قدر معلوم کر لینا کافی ہو جائے گا۔

یہ کیجیے

(1) کوئی ایک حسابی تصاعد کو لیجیے۔

(2) حسابی تصاعد کے ہر رکن میں ایک متعین عدد جمع کیجیے۔ اور حاصل ہونے والے نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(3) اسی طرح حسابی تصاعد کے ہر رکن سے ایک معین عدد تفریق کیجیے اور حاصل ہونے والے نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(4) حسابی تصاعد کے ہر رکن کو ایک معین عدد سے ضرب و تقسیم کیجیے اور نتیجہ کو فہرست کی شکل میں لکھئے۔

(5) اس طرح حاصل ہونے والی نئی فہرست کیا حسابی تصاعد ہوگی۔ جانچ کیجیے۔

(6) بتائیے کہ آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

SCERT TELANGANA

آیئے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال-1: حسابی تصاعد .... $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}$ میں پہلا رکن a اور فرق مشترک d معلوم کیجیے۔ اور اس حسابی تصاعد کا 7 واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں پر $a = \frac{1}{4}$ اور $d = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}$

ہم جانتے ہیں کہ دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے اس لیے یکے بعد دیگرے آنے والے دو ارکان کا فرق 'd' ہوگا۔

لہذا حسابی تصاعد کا ساتواں رکن $\frac{-5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-11}{4}$ ہوگا۔

مثال-2: دیے گئے اعداد میں کون سے حسابی تصاعد میں ہیں؟ اگر ان اعداد کی ترتیب حسابی تصاعد میں ہو تب اگلے دو رکن معلوم کیجیے۔

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . . (iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .

(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . . (v) $x, 2x, 3x, 4x$ ......

حل: (i) یہاں پر $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ کی قدر ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد ہے۔ اس کا فرق مشترک d=6 ہے۔

تب سلسلہ کے اگلے دو رکن $22 + 6 = 28$ اور $28 + 6 = 34$ ہوں گے۔

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ کی قدر ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے، اس کا فرق مشترک d=-2 ہے۔

تب سلسلے کے اگلے دو رکن ہوں گے۔

$(-5) + (-2) = -7$ اور $-7 + (-2) = -9$

SCERT TELANGANA

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

چونکہ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ اس لیے دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

یہاں پر $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

لہٰذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں نہیں ہوگا۔

(v) $a_2 - a_1 = 2x - x = x$

$a_3 - a_2 = 3x - 2x = x$

$a_4 - a_3 = 4x - 3x = x$

یعنی $a_{k+1} - a_k$ ہر مرتبہ مساوی یا مستقل ہے۔

لہٰذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہوگا۔

سلسلے کے اگلے دو رکن $4x + x = 5x$ اور $5x + x = 6x$ ہوں گے۔

مشق 6.1

1۔ حسب ذیل صورت میں حاصل والے اعداد کی فہرست کیا حسابی تصاعد ہوگی؟ کیوں؟

(i) اگر ایک کرایہ کی گاڑی (Taxi) کو پہلے کلومیٹر کے سفر پر 20 `' اور اس کے بعد ہر کلومیٹر کے اضافہ پر 8 ` کے حساب سے کرایہ ادا کیا جائے۔ تو ہر کیلومیٹر پر ادا کی جانے والی رقم

(ii) ایک خلائی پمپ کے سیلنڈر میں موجود ہوا سے $\frac{1}{4}$ حصہ خارج کر دیا گیا تب ہر دفعہ سلنڈر میں باقی رہنے والی ہوا کا حجم

(iii) ایک کنواں کھودنے کے لیے پہلے ایک میٹر کھدوائی پر 150 `' اس کے بعد ہر میٹر کے اضافہ پر 50 ` ادا کرنا ہے تب ہر میٹر کھدوائی کے لیے ادا کی جانے والی رقم

(iv) ایک بنک میں 10000 ` رقم کو سالانہ 8% سود مرکب سے جمع کیا جائے تب ہر سال کے اختتام پر کھاتے (Account) میں موجود رقم معلوم کیجیے؟

2۔ ذیل کے ہر ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن (a) اور فرق مشترک (d) دیا گیا ہے تب سلسلے کے پہلے چار ارکان معلوم کیجیے؟

(i) $a = 10, d = 10$ (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, d = -0.25$

SCERT TELANGANA

3۔ ذیل کے ہر ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور فرق مشترک معلوم کیجیے؟

(i) 3, 1, – 1, – 3, . . .   (ii) – 5, – 1, 3, 7, . . .

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, . . .

4۔ حسب ذیل میں کون سے سلسلے حسابی تصاعد میں ہیں؟ اگر یہ حسابی تصاعد میں ہوں تب فرق مشترک (d) معلوم کیجیے اور سلسلے کے اگلے 3 ارکان لکھیے۔

(i) 2, 4, 8, 16, . . .   (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) – 1.2, – 3.2, – 5.2, – 7.2, . . .   (iv) – 10, – 6, – 2, 2, . . .

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, . . .

(vii) 0, – 4, – 8, –12, . . .   (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) 1, 3, 9, 27, . . .   (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

6.3 حسابی تصاعد کا n واں رکن

6.1 کے تحت مثال کو لیتے ہیں۔ اکرم نے ملازمت کے لیے درخواست دی۔ وہ ماہانہ `8000 تنخواہ اور سالانہ `500 تدریجی اضافہ کے ساتھ تقرر پاتا ہے۔ تب بتایئے کہ تقرر کے 5 سال بعد اس کی تنخواہ کیا ہوگی؟

اس سوال کے حل سے پہلے ہم تقرر کے 2 سال بعد اسکی تنخواہ معلوم کرتے ہیں۔

`8500 = `(8000+500) تنخواہ ہوگی۔

ٹھیک اسی طرح تیسرے، چوتھے اور پانچویں سال مصلحہ تنخواہ میں `500 اضافہ یا زیادتی کے ذریعہ معلوم کرسکتے ہیں

لہٰذا تیسرے سال اکرم کی تنخواہ = `(8500+500)

= `(8000+500+500)

= `(8000+2×500)

= `(8500+(3-1)×500) (تیسرے سال پر)

= `9000

چوتھے سال پر تنخواہ = `(9000+500)

= `(8000+500+500+500)

SCERT TELANGANA

= ` (8000 + 3 × 500)

= ` [8000 + (4 – 1) × 500] (چوتھے سال پر)

= ` 9500

پانچویں سال پر تنخواہ = ` (9500 + 500)

= ` (8000+500+500+500 + 500)

= ` (8000 + 4 × 500)

= ` [8000 + (5 – 1) × 500] (پانچویں سال پر)

= ` 10000

مذکورہ بالا اعداد کی فہرست سے ہم ایک ترتیب کا مشاہدہ کرتے ہیں جو اس طرح ہے۔

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

یہ اعداد کا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے۔

مذکورہ بالا ترتیب کی بنیاد پر کیا ہم چھٹویں (6ویں) اور 15ویں سال پر ماہانہ تنخواہ معلوم کر سکتے ہیں؟ اگر وہ 25 سال تک برسرِ خدمت مان لیا جائے تب 25ویں سال پر تنخواہ کیا ہوگی؟ یہاں پر ہم گذشتہ ماہ کی تنخواہ میں 500` جمع کرنے پر موجودہ ماہ کی تنخواہ معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا ہم اس طریقے کار کو اور بھی مختصر کر سکتے ہیں؟ آیئے دیکھتے ہیں۔ مذکورہ بالا طریقے کار سے ہمیں ماہانہ تنخواہ معلوم کرنے کا اندازہ ہو چکا ہے۔

15ویں سال پر تنخواہ = 14ویں سال پر تنخواہ + `500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{\substack{\text{13 times} \\ \text{13 مرتبہ}}}\right] + ₹500$$

= ` [8000 + 14 × 500]

= ` [8000 + (15 – 1) × 500] = `15000

یعنی = پہلی تنخواہ + (15-1)× سالانہ تدریجی اضافہ

ٹھیک اسی طرح 25 سال بعد تنخواہ یہ ہوگی۔

` [8000 + (25 – 1) × 500] = `20000

= پہلی تنخواہ + (25-1)× سالانہ تدریجی اضافہ

اس مثال کے ذریعہ ہم نے 15واں رکن یا 25واں رکن معلوم کرنے کا طریقہ سیکھا ہے۔ اس طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے ایک حسابی تصاعد کا n واں رکن معلوم کریں گے۔

مان لیتے ہیں کہ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ حسابی تصاعد میں ہیں اس سلسلہ کا پہلا رکن a_1 (a) اور فرق مشترک d ہے۔

دوسرا رکن $a_2 = a + d = a + (2 – 1)\, d$

SCERT TELANGANA

تیسرا رکن $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (3 - 1)\, d$

چوتھا رکن $a_4 = a_2 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (4 - 1)\, d$

. . . .

. . . .

مذکورہ بالا ترتیب کی بنیاد پر n واں رکن $a + (n - 1)\, d$ کہہ سکتے ہیں۔

یعنی ایک حسابی تصاعد جس کا پہلا رکن a اور فرق مشترک d ہو تب n واں رکن $a_n = a + (n - 1)\, d$ ہوگا۔

a_n کو حسابی تصاعد کا عام رکن (General term) بھی کہتے ہیں۔

اگر کسی حسابی تصاعد میں m ارکان ہوں تب a_m آخری رکن کو ظاہر کرتا ہے۔ بسا اوقات اس کو 'l' سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

حسابی تصاعد کے ارکان معلوم کرنا: اوپر کے ضابطے کی مدد سے ہم حسابی تصاعد کے مختلف ارکان کو معلوم کر سکتے ہیں۔

آیئے چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال-3: حسابی تصاعد کے سلسلہ $5, 1, -3, -7 \ldots$ کا 10 واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a = 5$ ‘ $d = 1 - 5 = -4$ ‘ اور $n = 10$ ہے

ہم جانتے ہیں کہ $a_n = a + (n - 1)\, d$

$$a_{10} = 5 + (10 - 1)(-4) = 5 - 36 = -31$$

لہٰذا دیے گئے حسابی تصاعد کا 10 واں رکن 31- ہے۔

مثال-4: حسابی تصاعد $21, 18, 15, \ldots$ کا کون سا رکن 81- ہوگا؟ کیا کوئی رکن '0' ہوگا؟ اپنے جواب کی وجوہات بتلایئے۔

حل: یہاں $a = 21$ ‘ $d = 18 - 12 = -3$ اور اگر $a_n = 81$ تب n کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

چونکہ $a_n = a + (n - 1)\, d$

$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

$$\therefore\ n = 35$$

لہٰذا حسابی تصاعد کا 35 واں رکن 81- ہوگا۔

علاوہ ازیں $a_n = 0$ کے لیے 'n' کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

$$3(n - 1) = 21$$

$$n = 8$$

لہٰذا حسابی تصاعد کا 8 واں رکن 0 (صفر) ہوگا۔

SCERT TELANGANA

مثال-5: ایک حسابی تصاعد معلوم کیجیے اگر اس کا تیسرا رکن 5 اور 7 واں رکن 9 ہو۔

حل: یہاں

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

اور

$$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر

$a = 3, d = 1$ حاصل ہوگا۔

لہذا مطلوبہ حسابی تصاعد کا سلسلہ . . . ,3, 4, 5, 6, 7 ہے۔

مثال-6: اعداد . . . ,5, 11, 17, 23 کی فہرست میں 301 ہوگا یا نہیں؟ جانچ کیجیے۔

حل: یہاں

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6,\ a_3 - a_3 = 17 - 11 = 6,\ a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

چونکہ $(a_{k+1} - a_k)$ مساوی ہے $k = 1, 2, 3,$ کے لیے۔ لہذا دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد ہے۔

اب اس حسابی تصاعد کے سلسلہ میں $a = 5$ اور $d = 6$ ہے۔

ہم فرض کریں گے کہ اس A.P کا nواں رکن 301 ہے ہمیں یہ دیکھنا ہوگا کہ $a_n = 301$ کے لیے کیا کوئی n وجود رکھتا ہے۔

ہم جانتے ہیں $a_n = a + (n - 1)\, d$

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

یا $301 = 6n - 1$

$$\therefore\ n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

لیکن ''n'' مثبت صحیح عدد ہونا چاہیے۔ (کیوں؟)

لہذا 301 دیے گئے اعداد کی فہرست میں نہیں ہے۔

مثال-7: 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کتنے ہوں گے؟

حل: 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی فہرست یہ ہے۔

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

کیا یہ حسابی تصاعد ہے؟ ہاں۔ یہاں $a = 12$، $d = 3$ اور $a_n = 99$

ہم جانتے ہیں $a_n = a + (n - 1)\, d$

SCERT TELANGANA

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$
$$87 = (n - 1) \times 3$$
$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$
$$n = 29 + 1 = 30$$

لہذا 3 سے تقسیم پذیر دو ہندسی اعداد کی تعداد 30 ہے۔

مثال-8: حسابی تصاعد $10, 7, 4, \ldots, -62$ کا آخری سے 11 واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a = 10$ ، $d = 7 - 10 = -3$ ، $l = -62$

تب $l = a + (n - 1)\,d$

سلسلے کے آخری سے 11 واں رکن معلوم کرنے سے پہلے ہمیں سلسلے کے تمام ارکان کی تعداد معلوم کرنی ہوگی۔

لہذا $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

$$-72 = (n - 1)(-3)$$
$$n - 1 = 24$$
$$n = 25$$

یعنی حسابی تصاعد کے سلسلہ میں جملہ 25 ارکان ہوتے ہیں۔

آخر سے 11 واں رکن کا مطلب شروعات سے سلسلے کا 15 واں رکن ہوگا (یاد رکھیے کہ یہ 14 واں رکن نہیں ہوگا۔ کیوں؟)

$$\therefore a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$$

لہذا سلسلے کے آخر سے 11 واں رکن -32 ہوگا۔

نوٹ: آخر سے 11 واں رکن ابتداء سے بھی 11 واں رکن ہوگا جس کا پہلا رکن -62 اور فرق مشترک 3 ہو۔

مثال-9: سالانہ 8% شرح سود سے ₹ 1000 سرمایہ کے لیے سالانہ سود مفرد محسوب کیجیے؟ کیا یہ سود حسابی تصاعد میں ہے؟ اگر یہ حسابی تصاعد میں ہو تب 30 سال کے اختتام پر سود معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ سود مفرد معلوم کرنے کا ضابطہ یہ ہے۔

سود مفرد $= \dfrac{P \times R \times T}{100}$

لہذا پہلے سال کے اختتام پر سود $= ₹\,\dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\,80$

دوسرے سال کے اختتام پر سود $= ₹\,\dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\,160$

SCERT TELANGANA

$$\frac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ` 240$$ = ` تیسرے سال کے اختتام پر سود

اسی طرح چوتھے، پانچویں،۔۔۔۔سال کے اختتام پر سود محسوب کیا جاسکتا ہے۔یعنی پہلے، دوسرے، تیسرے۔۔۔۔سال کے اختتام پر سود (روپیوں میں) ترتیب وار $80, 160, 240, \ldots$

اوپر کے اعداد کی فہرست حسابی تصاعد کو ظاہر کرتی ہے کیونکہ متواتر ارکان کا فرق مشترک 80 ہے۔

یہاں $a = 80$ اور $d = 80$

لہذا 30 سال کے اختتام پر سود معلوم کرنے کے لیے ہمیں a_{30} کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

$$\therefore\ a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

30 سال کے اختتام پر سود کی رقم 2400` ہوگی۔

مثال-10: ایک پھولوں کی کیاری کی پہلی قطار میں 23 گلاب کے پودے، دوسری قطار میں 21، تیسری قطار میں 19 وغیرہ ہیں۔آخری قطار میں 5 گلاب کے پودے ہیں تو بتلائیے کہ پھولوں کی کیاری میں جملہ کتنی قطاریں ہیں۔

حل: پہلی، دوسری، تیسری، .... قطار میں گلاب کے پودوں کی تعداد ترتیب وار

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

یہ ایک حسابی تصاعد ہے (کیوں؟)

فرض کیجیے کہ کیاری میں جملہ قطاروں کی تعداد 'n' ہے

تب $a = 23,\ d = 21 - 23 = -2$ اور $a_n = 5$

$$a_n = a + (n - 1)\,d$$

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

$$-18 = (n - 1)(-2)$$

$$n = 10$$

لہذا پھولوں کی کیاری میں قطاروں کی تعداد 10 ہے۔

مشق 6.2

1۔ ایک حسابی تصاعد میں پہلا رکن a، فرق مشترک d اور n واں رکن a_n ہو تو تب ذیل کی جدول کو مکمل کیجیے۔

S. No.	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0

SCERT TELANGANA

(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2) محسوب کیجیے۔

i) حسابی تصاعد ...... 10, 7, 4 کا 30 واں رکن

ii) حسابی تصاعد $-3, \frac{-1}{2}, 2, ...$ کا 11واں رکن

3) حسب ذیل حسابی تصاعد متعلقہ رکن معلوم کیجیے۔

i) اگر $a_1 = 2$، $a_3 = 26$ ہوتب a_2 معلوم کیجیے۔

ii) اگر $a_2 = 13$ ، $a_4 = 3$ ہوتب a_1، a_3 معلوم کیجیے۔

iii) اگر $a_1 = 5$، $a_4 = 9\frac{1}{2}$ ہوتب a_2، a_3 معلوم کیجیے۔

iv) اگر $a_1 = -4$، $a_6 = 6$ ہوتب a_2، a_3، a_4، a_5 معلوم کیجیے۔

v) اگر $a_2 = 38$، $a_6 = -22$ ہوتب a_1، a_3، a_4، a_5 معلوم کیجیے۔

4) حسابی تصاعد . . . ,3, 8, 13, 18 کا کون سا رکن 78 ہوگا؟

5) ذیل کے حسابی تصاعد میں ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$

6) حسابی تصاعد . . . 11, 8, 5, 2 میں کیا 150 تصاعد کا رکن ہوگا؟ جانچ کیجیے؟

7) اگر ایک حسابی تصاعد کا 11واں رکن 38 اور 16واں رکن 73 ہوتب 31واں رکن معلوم کیجیے۔

8) اگر ایک حسابی تصاعد کا تیسرا، 9واں رکن ترتیب وار 4 اور 8- ہوتب بتلائیے کہ اس کا کون سا رکن صفر (0) ہوگا۔

9) اگر ایک حسابی تصاعد کا 17واں رکن، 10ویں رکن سے 7 زیادہ ہے تب فرق مشترک معلوم کیجیے۔

10) دو حسابی تصاعد کا مشترک فرق مساوی ہے۔ اگر 100ویں رکن کا فرق 100 ہوتب 1000ویں رکن کا فرق مشترک کیا ہوگا؟

11) 7 سے تقسیم پذیر تین ہندسی اعداد کتنے ہوں گے؟

12) 10 اور 250 کے درمیان 4 کے اضعاف کتنے معلوم کیجیے۔

13) اگر دو حسابی تصاعد . . . ,63, 65, 67 اور . . . ,3, 10, 17 کا n واں رکن مساوی ہے تب 'n' کی قدر معلوم کیجیے۔

14) ایک ایسا حسابی تصاعد معلوم کیجیے جس کا تیسرا رکن 16 ہو۔ جبکہ اس کا 7واں رکن 5ویں رکن سے 12 زیادہ ہو۔

15) حسابی تصاعد 253 ,. . . ,3, 8, 13 کا آخر سے 20واں رکن معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

16) ایک حسابی تصاعد کے چوتھے اور 8 ویں رکن کا مجموعہ 24 ہے اور 6 ویں اور 10 ویں رکن کا مجموعہ 44 ہو تو تصاعد کے پہلے تین ارکان معلوم کیجیے۔

17) ارشد 1995ء میں ملازمت سے جڑ گیا جس وقت اس کی سالانہ تنخواہ 5000 ` تھی۔ اگر سالانہ 200 ` کے حساب سے تنخواہ میں اضافہ ہو تب کس سال ارشد کی تنخواہ 7000 ` ہوگی۔

6.4 حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ

تمہید کے تحت 6.1 میں دی گئی صورت کا دوبارہ مشاہدہ کرتے ہیں۔ آفرین اپنی بیٹی کی پہلی سالگرہ پر 1000 `، دوسری سالگرہ پر 1500 `، تیسری سالگرہ پر 2000 `۔۔۔ ایک بکسے میں جمع کرتی ہے تو بتایئے کہ 21 ویں سالگرہ پر آفرین کی بیٹی کی جمع شدہ رقم کتنی ہوگی؟

یہاں پہلی، دوسری، تیسری۔۔۔ سالگرہ پر بکسے میں جمع کی گئی رقم بالترتیب ...... 1000، 1500، 2000 ہے اس طرح یہ سلسلہ 21 ویں سالگرہ تک چلتا رہا۔ 21 ویں سالگرہ کے موقع پر بکسے میں جمع شدہ رقم کو محسوب کرنا ہو تو اوپر کی فہرست میں 21 دفعہ ارکان ترتیب وار / سلسلہ وار لکھ کر ان تمام کا مجموعہ معلوم کرنا ہوگا۔

اس طرح کے عمل سے نہ صرف وقت ضائع ہوتا ہے بلکہ کچھ حد تک یہ کام مشکل بھی ہے کیا ہم اختصاری طریقے سے اسکو حل کر سکتے ہیں۔

6.4.1 کس طرح گاس (Gauss) نے ارکان کا مجموعہ محسوب کیا۔

معروف جرمن ریاضی داں گاس نے 10 سال کی عمر میں جس مسئلہ کو حل کیا ہے اس پر ہم بھی غور کریں گے۔ 10 سال کی عمر میں جب اس سے پوچھا گیا کہ ''1 تا 100 مثبت اعداد کا مجموعہ کیا ہوگا؟ تب اس نے جواب دیا کہ 5050 ہوگا۔

Carl Fredrich Gauss
(1777-1855) مشہور
جرمن ریاضی داں

کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ اس نے کس طرح حل کر کے جواب دیا ہوگا؟

اس نے مسئلہ کے حل کو اس طرح لکھا

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

اس نے اعداد کی ترتیب کو ذیل کی طرح لکھا

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

اس نے ان دونوں سلسلہ کو یوں جمع کیا

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101$ (100 مرتبہ) (تصدیق کیجیے اور مباحثہ کیجیے)

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

$\therefore$ مجموعہ $= 5050$

SCERT TELANGANA

6.4.2 حسابی تصاعد کے n ارکان کا مجموعہ

ہم بھی $a, a + d, a + 2d, \ldots$ سلسلے کے nارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے اسی طریقہ کار کو اپنائیں گے۔

حسابی تصاعد کا nواں رکن $a + (n - 1)d$ ہے

اوپر کے سلسلے میں پہلے nارکان کے مجموعہ کو S_n مان لینے پر

$$\therefore S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + a + (n-1)d$$

ترتیب بدل کر لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$S_n = (a+(n-1)d) + (a+(n-2)d + \ldots + a$$

ارکان کو ترتیب وار جمع کرنے پر

(nمرتبہ) $[\, 2a + (n-1)d\,) + (2a + (n-1)d\,) + \ldots + (2a + (n-1)d\,)]$ جمع کرنے پر

$$n = [2a + (n-1)d\,]$$

$$\therefore Sn = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[\text{پہلا رکن} + n\text{واں رکن}] = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

اگر ایک حسابی تصاعد کا صرف پہلا رکن، اور آخری رکن دیا جائے اور فرق مشترک معلوم نہ ہو تب

ضابطے $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ جہاں l آخری رکن ہے کی مدد سے S_n کو آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

آفرین کی بیٹی کی رقم

اب ہم تمہید کے تحت 6.1 میں دی گئی مثال (c) پر دوبارہ غور کریں۔ آفرین کی بیٹی کی پہلی، دوسری، تیسری، چوتھی۔۔۔۔ سالگرہ پر بکسے میں رکھی گئی رقم ترتیب وار $1000, 1500, 2000, 2500, \ldots,$ یعنی حسابی تصاعد کے پہلے 21 ارکان کا مجموعہ

یہاں $a = 1000$، $d = 500$ اور $n = 21$

ضابطے کی مدد سے $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$

$$S_n = \frac{21}{2}[2 \times 1000 + (21-1) \times 500]$$

$$= \frac{21}{2}[2000 + 10000]$$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{21}{2}[12000] = 126000$$

21 ویں سالگرہ کے بعد بکسے میں جمع شدہ رقم = `1,26,000

ہم S کی جگہ S_n استعمال کریں گے تاکہ پتہ چلے کہ کتنے ارکان کا مجموعہ معلوم کیا جا رہا ہے۔ پہلے 20 ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے S_{20} سے ظاہر کریں گے۔ حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے استعمال ہونے والے ضابطے میں چار متغیرات ہیں۔ وہ S_n، a، d اور n ہیں ان میں سے اگر تین متغیرات کی قدر معلوم ہو تب ہم چوتھی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

ہدایت: ایک حسابی تصاعد میں پہلے n ارکان کے مجموعے سے پہلے (n-1) ارکان کے مجموعے کو تفریق پر اس سلسلہ کا n واں رکن حاصل ہوگا۔

یعنی $a_n = S_n - S_{n-1}$

یہ کیجیے

حسب ذیل حسابی تصاعد میں ظاہر کیے گئے ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

(i) 16, 11, 6 .....; 23 ارکان تک

(ii) -0.5, -1.0, -1.5, ...; 10 ارکان تک

(iii) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ .... 10 ارکان تک

آیئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال-11: اگر ایک حسابی تصاعد کا پہلا رکن 10 اور 14 ارکان کا مجموعہ 1050 ہو تب 20 واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $S_n = 1050$، $n=14$ اور $a=10$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[2a+13d] = 140+91d$$

$$910 = 91d$$

$$d = 10$$

$$a_{20} = 10 + (20-1)\,10 = 200$$

مثال-12: 24, 21, 18, . . . حسابی تصاعد کے کتنے ارکان کا مجموعہ 78 ہوگا؟

حل: یہاں $a = 24$، $d = 21 - 24 = -3$ اور $S_n = 78$۔ ہم کو 'n' کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$78 = \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

SCERT TELANGANA

$$n^2 - 17n + 52 = 0$$

$$(n-4)(n-13) = 0$$

$n = 4$ یا 13

'n' کی دونوں قدریں قابل قبول ہیں یعنی دونوں کوشمار کیا جائے گا۔لہٰذا ارکان کی تعداد 4یا13 ہوگی۔

تبصرہ

1۔ یہاں پر4ارکان کا مجموعہ = 13 ارکان کا مجموعہ = 78

2۔ اس سلسلے میں5ویں رکن سے13ویں رکن کا مجموعہ صفر(0) ہوگا۔کیونکہ'a' کی قدر مثبت ہے جبکہ فرق مشترک (d) منفی میں ہے۔ اس لیے چندارکان مثبت اور چندارکان منفی ہوں گے جس کے نتیجہ میں مثبت ومنفی ارکان ایک دوسرے کی تعدیل کرتے ہیں اور صفر حاصل ہوتا ہے۔

مثال-13: حسب ذیل کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

i) پہلے1000طبعی اعداد   ii) پہلے n طبعی اعداد

حل: i) فرض کیجیے کہ $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

ضابطے کی مدد سے $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

لہٰذا پہلے 1000 طبعی اعداد کا مجموعہ 500500

ii) فرض کیجیے کہ $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

یہاں $a=1$ اور آخری رکن $(l)=n$

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ یا $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ ہوگا۔

مثال-14: پہلے24ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے جبکہ سلسلہ کاnواں رکن $a_n = 3 + 2n$ دیا گیا ہے۔

حل: $a_n = 3 + 2n$

$a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

....

SCERT TELANGANA

اس طرح اعداد کی فہرست 5, 7, 9, 11, . . .

یہاں $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$

لہذا یہ ایک حسابی تصاعد ہے کیونکہ اس کا فرق مشترک d=2 ہے۔

S_{24} معلوم کرنے کے لیے $n = 24$، $a = 5$ اور $d = 2$ لیا جائے۔

$$\therefore\ S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12(10 + 46) = 672$$

لہذا پہلے 24 ارکان کا مجموعہ 672 ہے۔

مثال-15: ایک ٹیلی ویژن تیار کرنے والی کمپنی نے تیسرے سال میں 600 ٹیلی ویژن کے سیٹس اور 7 ویں سال میں 700 سیٹس تیار کیے۔ مان لیجیے کہ ہر سال ٹیلی ویژن کی تعداد میں ایک متعین عدد کا اضافہ ہو تب

i) پہلے سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس ii) 10 ویں سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس

iii) پہلے 7 سال میں تیار کیے گئے تمام سیٹس کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل: i) چونکہ ہر سال تیار کیے جانے والے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد میں ایک مستقل مقدار (متعین عدد) میں اضافہ ہو رہا ہے۔ اس لیے پہلے، دوسرے، تیسرے۔۔۔ سال ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد ایک حسابی تصاعد بناتی ہے۔

فرض کیجیے کہ n ویں سال میں تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سٹس کی تعداد a_n ہے

تب $a_3 = 600$ اور $a_7 = 700$

$$a + 2d = 600 \qquad (1)$$

اور $$a + 6d = 700 \qquad (2)$$

مذکورہ بالا مساواتوں کو حل کرنے پر d=25 اور a = 550 حاصل ہوگا۔

لہذا پہلے سال تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سٹس کی تعداد 550 ہوگی۔

ii) اب $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

یعنی 10 ویں سال تیار کیے گئے ٹیلی ویژن سیٹس کی تعداد 775 ہوگی۔

iii) $$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

پہلے 7 سال تیار کیے گئے تمام سیٹس کا مجموعہ 4375 ہوگا۔

SCERT TELANGANA

مشق 6.3

1۔ حسب ذیل حسابی تصاعد میں ظاہر کیے گئے ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 ارکان تک (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 ارکان تک

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 ارکان تک (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, 11 ارکان تک

2۔ ذیل کے سوالات حل کیجیے

(i) $7+10\frac{1}{2}+14+........+84$ (ii) $34+32+30+....+10$ (iii) $-5+(-8)+(-11)+...+(-230)$

3۔ حسابی تصاعد (AP) میں دیا گیا ہے۔

i) $a=5$، $d=3$ اور $a_n=50$ ہو تب n اور S_n کی قدر معلوم کیجیے۔

ii) $a=7$، $a_{13}=35$ ہو تب d اور S_{13} کی قدر معلوم کیجیے۔

iii) $a_{12}=37$ اور $d=3$ ہو تب a اور S_{12} کی قدر معلوم کیجیے۔

iv) $a_3=15$ اور $S_{10}=125$ ہو تب d اور a_{10} کی قدر معلوم کیجیے۔

v) $a=2$، $d=8$ اور $S_n=90$ ہو تب n اور a_n کی قدر معلوم کیجیے۔

vi) $a_n=4$، $d=2$ اور $S_n=-14$ ہو تب n اور a کی قدر معلوم کیجیے۔

vii) $l=28$، S=144 اور ارکان 9 ہوں تب a کی قدر معلوم کیجیے۔

4۔ ایک حسابی تصاعد کا پہلا اور آخری رکن بالترتیب 17 اور 350 ہے۔ اگر فرق مشترک 9 ہو تب ارکان کی تعداد اور ارکان کا مجموعہ کو معلوم کیجیے۔

5۔ ایک حسابی تصاعد کا دوسرا اور تیسرا رکن بالترتیب 14 اور 18 ہے تب 51 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

6۔ ایک حسابی تصاعد کے پہلے 7 ارکان کا مجموعہ 49 اور 17 ارکان کا مجموعہ 289 ہے تب پہلے n ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

7۔ بتلائیے کہ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ حسابی تصاعد ہے جہاں پر a_n کی تعریف اس طرح ہے۔

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 – 5n$

علاوہ ازیں ہر صورت میں پہلے 15 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک حسابی تصاعد کے n ارکان کا مجموعہ $4n – n^2$ ہے تب پہلا رکن کیا ہوگا۔ یاد رکھئے کہ S_1 کی قدر ہی پہلا رکن ہے پہلے دو ارکان کا مجموعہ کیا ہوگا؟ دوسرا رکن کیا ہوگا؟ اسی طرح تیسرا، 10 واں اور n واں رکن معلوم کیجیے

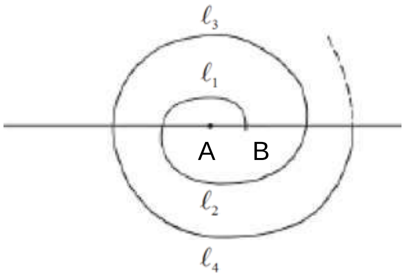
9۔ 6 سے تقسیم پذیر پہلے 40 مثبت اعداد کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک اسکول کے مضمون واری امتحان میں بہترین مظاہرہ کرنے والوں کو جملہ منظور شدہ رقم 700 روپیوں سے 7 انعامات دینا طئے پایا۔ اگر ہر انعام کی قیمت اس سے پہلے انعام کی قیمت سے 20` کم ہو تب ہر انعام کی قیمت معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

11۔ ایک اسکول کے احاطہ میں ماحول کے تحفظ کے تحت طلباء کا پودے لگانا طئے پایا تا کہ فضائی آلودگی کو دور کیا جاسکے۔ ہر سیکشن سے طلباء کی تعداد کی مناسبت سے مساوی پودے لگانا طئے پایا۔ جماعت اول کے ایک سیکشن کے طلباء 1 پودا، جماعت دوم کے سیکشن کے طلباء 2 پودے لگائیں گے۔ اس طرح 12 ویں جماعت تک پودے لگانا قرار پایا۔ اگر ہر جماعت میں 3 سیکشن ہوں تب لگائے گئے پودوں کی تعداد معلوم کیجیے؟

12۔ متواتر نیم دائروں کی مدد سے ایک پیچ دار (Spiral) تیار کیا گیا۔ نیم دائروں کے مراکز A سے شروع ہو کر A، B میں تبدیل ہوتے گئے (جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے)۔ یعنی پہلے نیم دائرہ کا مرکز A، دوسرے نیم دائرہ کا مرکز B، تیسرے نیم دائرے کا مرکز A ۔۔۔۔ اور نیم دائروں کا نصف قطر بالترتیب 0.5 سمر، 1.0 سمر، 1.5 سمر، 2.0 سمر ۔۔۔ اس طرح جملہ 13 نیم دائرے ہوں گے تب پیچ دار (Spiral) کا طول معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)



[اشارہ: متواتر نیم دائروں کے طول $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ اور متعلقہ مراکز بالترتیب A, B, A, B, . . ., ہیں]

13۔ 200 لکڑی کے کندوں کو ذیل کی ترتیب کے مطابق رکھا گیا۔ سب سے آخری (نچلی) قطار میں 20 لکڑی کے کندے ہیں۔ اس پر 19 کندوں کو، پھر اس پر 18 کندے ۔۔۔۔ ترتیب دیے گئے۔ جملہ 200 کندوں کو اس طریقے سے ترتیب دینے کے لیے کتنی قطاریں درکار ہوں گی؟ اور سب سے اوپری قطار میں کتنے کندے ہوں گے معلوم کیجیے؟

14۔ گینداور بالٹی کھیل میں، کھیل کے ابتداء میں ایک بالٹی جس کی 5 میٹر دوری پر ایک گیند رکھی گئی۔ اور دیگر گیندیں ایک خط مستقیم پر پہلی گیند سے 3 میٹر فاصلے پر رکھی گئیں (جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے) ایک خط مستقیم پر جملہ 10 گیند ہیں۔

ایک کھلاڑی ابتدائی بالٹی کے مقام سے کھیل شروع کرتا ہے۔ بالٹی سے قریب تر رکھی ہوئی گیند کو اٹھا کر واپس دوڑتا ہوا گیند کو بالٹی میں ڈالتا ہے۔ دوبارہ دوسری گیند کی طرف دوڑتا ہے، اور اس گیند کو بھی بالٹی میں ڈالتا ہے۔ اس طرح اس کھیل کو جاری رکھتا ہے تب تک کہ تمام گیند بالٹی میں نہ ڈال دی جائیں۔ کھیل کی تکمیل پر کھلاڑی کا طئے کردہ فاصلہ کیا ہوگا؟

[اشارہ: پہلی، اور دوسری گیند لے کر آنے کے لیے کھلاڑی کا طئے کردہ فاصلہ (میٹر میں) $(3 + 5) \times 2 + 5 \times 2$] ہوگا۔

SCERT TELANGANA

6.5 جیومٹریہ تصاعد (Geometric Progression)

ذیل کے اعداد کی فہرست یا سلسلے کا مشاہدہ کیجیے۔

(i) 30, 90, 270, 810 .....   (ii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$.....

(iii) 30, 24, 19.2, 15.36, 12.288

کیا ہم فہرست یا سلسلے کا اگلا رکن لکھ سکتے ہیں؟

i) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو رکن 3 سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

ii) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو $\frac{1}{4}$ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

iii) کا ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو 0.8 سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

اوپر کی ہر فہرست میں ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو ایک متعین یا مستقل عدد سے ضرب دینے پر حاصل ہو رہا ہے۔ اس طرح کے اعداد کی فہرست یا سلسلے کو جیومٹریہ تصاعد کہتے ہیں۔ اس متعین یا مستقل عدد کو مشترک نسبت 'r' کہتے ہیں۔ یعنی مذکورہ بالا مثالیں (i)، (ii) اور (iii) میں مشترک نسبت بالترتیب 3، $\frac{1}{4}$ اور 0.8 ہے۔

فرض کرو کہ جیومٹریہ تصاعد کے پہلے رکن کو 'a' اور مشترک نسبت کو 'r' ظاہر کیا گیا ہے، دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے جیومٹریہ تصاعد کے اصول کے مطابق پہلے رکن 'a' کو مشترک نسبت r سے ضرب دینا ہوگا۔

∴ دوسرا رکن $= ar$

اسی طرح تیسرا رکن $= ar \cdot r = ar^2$

لہذا ..... a, ar, ar^2 جیومٹریہ تصاعد کی عام شکل ہے۔

اوپر دیے گئے جیومٹریہ تصاعد میں کسی بھی رکن (سوائے پہلے رکن کے) اور اس کے پیش رو رکن کی نسبت 'r' ہے۔

یعنی $\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar} = ... = r$

اگر ہم ایک جیومٹریہ تصاعد کے پہلے رکن کو a_1، دوسرے رکن کو a_2 ---- n ویں رکن کو a_n سے ظاہر کرتے ہیں۔

تب $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

لہذا... $a_1, a_2, a_3 .... a_n$ جیومٹریہ تصاعد کہلائے گا اگر ہر رکن غیر صفر ہو اور

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

جہاں پر 'n' ایک طبعی عدد ہے اور $n \geq 2$

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

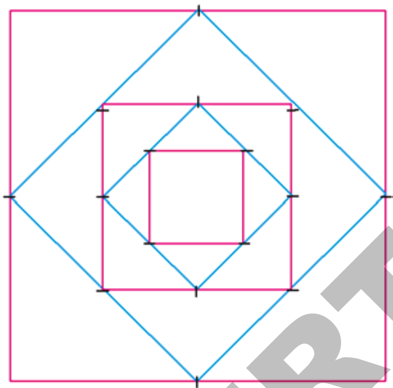
حسب ذیل میں کون سے جیومٹریہ تصاعد میں نہیں ہیں معلوم کیجیے۔

1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 1, 4, 9, 16, ...
3. 1, -1, 1, -1, ...
4. -4, -20, -100, -500, ...

جیومٹریہ تصاعد کی مزید مثالیں:

i) ایک فرد اپنے چار دوستوں کو خط لکھتا ہے اور ہر دوست سے یہ کہتا ہے کہ وہ اس خط کی نقل اتار کر مزید 4 افراد تک پہنچائے اور یہی اصول یا ہدایت کو اپناتے ہوئے اس سلسلے کو برقرار رکھے۔ اگر مان لیا جائے کہ یہ سلسلہ اسی طرح برقرار رہا تب پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے۔۔۔سلسلہ میں خطوط کی تعداد بالترتیب .... 1, 4, 16, 256 ہیں

ii) سالانہ 10% شرح سود مرکب کے حساب سے 500` رقم کو ایک بنک میں جمع کیا گیا جمع کی گئی رقم پہلے، دوسرے، تیسرے۔۔ سال کے اختتام پر روپیوں ترتیب وار ...... 550, 605, 665.5 ہے



iii) متصلہ شکل میں دیئے گئے طریقے پر پہلے مربع کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے پر دوسرا مربع حاصل ہوا۔ دوسرے مربع کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے پر تیسرا مربع حاصل ہوا۔ اسی طرح لامتناہی سلسلہ دہرایا گیا۔ اگر پہلے مربع کے ضلع کا طول 16 سمر ہو تب پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے۔۔ مربعوں کا رقبہ بالترتیب

256, 128, 64, 32, ... ہوں گے

iv) ایک گھڑی کے رقاص کے پہلے اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول 18 سمر ہے۔ اس کے بعد ہر اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول اس کے پیش رو اہتزازی حرکت سے بننے والے قوس کے طول کا 0.9 گنا ہے۔

تب پہلے، دوسرے، تیسرے، چوتھے۔۔۔۔ اہتزاز پر بننے والے قوس کا طول بالترتیب

18,16.2,14.58,13.122........

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1. کیا مذکورہ بالا کی فہرست/سلسلہ جیومٹریہ تصاعد میں کیوں ہوگا وضاحت کیجیے۔
2. جیومٹریہ تصاعد کے ہونے کے لیے ضروری اصول/نکات کیا ہونے چاہییں۔

SCERT TELANGANA

آیئے اب معلوم کریں گے کہ کس طرح جیومٹریہ تصاعد (G.P) تشکیل پاتا ہے جبکہ اس کا پہلا رکن a' اور مشترک نسبت 'r' دیا گیا ہے۔
اور یہ بھی سیکھیں گے کہ دیے گئے اعداد کی فہرست کیا جیومٹریہ تصاعد میں ہے یا نہیں اسکا فیصلہ کیسے کریں گے۔

مثال-16: اگر پہلا رکن $a = 3$ اور مشترک نسبت $r = 2$ ہے تب جیومٹریہ تصاعد لکھئے؟

حل: چونکہ پہلا رکن 'a' ہے اس لیے اسکو با آسانی لکھا جا سکتا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ جیومٹریہ تصاعد کا رکن اس کے پیش رکن کو مشترک نسبت (r) سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے یعنی دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لیے ہمیں پہلے رکن $a = 3$ کو مشترک نسبت $r = 2$ سے ضرب دینا ہوگا۔

دوسرا رکن $= ar = 3 \times 2 = 6$

اسی طرح تیسرا رکن = دوسرا رکن × مشترک نسبت

$= 6 \times 2 = 12$

اسی عمل کو دہرانے پر حاصل ہونے والا جیومٹریہ تصاعد 3,6,12,24

مثال-17: اگر $a=256$ اور $r=\frac{-1}{2}$ ہو تب جیومٹریہ تصاعد لکھئے؟

حل: جیومٹریہ تصاعد کی عام شکل $= a, ar, ar^2, ar^3, \ldots..$

$$= 256, 256\left(\frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}\right)^2, 256\left(\frac{-1}{2}\right)^3$$

$= 256, -128, 64, -32, \ldots\ldots$

مثال-18: جیومٹریہ تصاعد $25, -5, 1, \frac{-1}{5}$ کی مشترک نسبت معلوم کیجیے؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ اگر جیومٹریہ تصاعد کا پہلا' دوسرا' تیسرا۔۔۔رکن بالترتیب $a_1, a_2, a_3 \ldots.$ ہو تب مشترک نسبت

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots..$$

یہاں $a_1 = 25$ ' $a_2 = -5$ اور $a_3 = \frac{-1}{5}$

اس لیے مشترک نسبت $r = \frac{-5}{25} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$

مثال-19: حسب ذیل اعداد کی فہرست میں کونسے جیومٹریہ تصاعد میں ہے؟

(i) $3, 6, 12, \ldots..$ (ii) $64, -32, 16,$

(iii) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

SCERT TELANGANA

حل: (i) ہم جانتے ہیں کہ ..... $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ اس وقت جیومٹریہ تصاعد میں ہوں گے جب کہ اس کا ہر رکن غیر صفر ہو اور

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

یہاں پر تمام ارکان غیر صفر ہیں علاوہ ازیں

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

اور $\frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 2$$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومٹریہ تصاعد میں ہے اس کی مشترک نسبت 2 ہے۔

(ii) تمام ارکان غیر صفر ہیں۔

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-32}{64} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{16}{-32} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{2}$$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومٹریہ تصاعد میں ہے۔ اس کی مشترک نسبت $\frac{-1}{2}$ ہے

(iii) تمام ارکان غیر صفر ہیں۔

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{64}} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{32}} = 4$$

یہاں $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$

لہذا دیئے گئے اعداد کی فہرست جیومٹریہ تصاعد میں نہیں ہے۔

SCERT TELANGANA

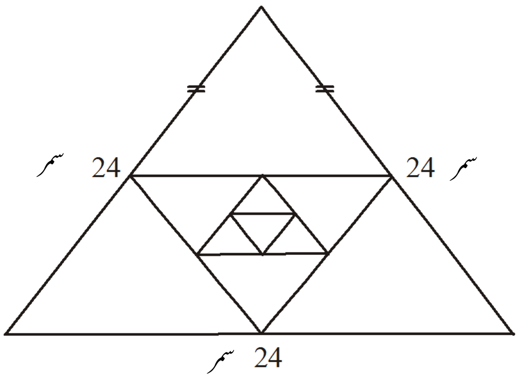
مشق 6.4

1۔ حسب ذیل کی صورت میں اعداد کی فہرست جیومٹریہ تصاعد میں ہوگی؟

(i) شرمیلا کی پہلے سال کی تنخواہ 5,00,000` ہے اس کے بعد ہر سال، تنخواہ کا 10% اضافہ ہوگا۔

(ii) 30 سیڑھی رکھنے والے ایک پل کے سب سے نچلی سیڑھی کی تعمیر کے لیے 100 اینٹ درکار ہیں۔ ہر اوپری سیڑھی کی تعمیر کے لیے اس کی نچلی سیڑھی کی تعمیر کے لیے درکار اینٹوں سے 2 اینٹیں کم لگتے ہیں۔ تب ہر سیڑھی کے لیے درکار اینٹ کی تعداد کیا ہوگی؟

(iii) 24 سمر والے مساوی الاضلاع مثلث کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے سے دوسرا مثلث، اس کے ضلعوں کے وسطی نقاط کو جوڑنے سے تیسرا مثلث حاصل ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ لامتناہی جاری رہے گا تو ہر مثلث کا احاطہ



2۔ جیومٹریہ تصاعد کا پہلا رکن 'a'، مشترک نسبت 'r' ذیل میں دی گئی ہے تب اس کے پہلے تین ارکان لکھیے۔

(i) $a = 4; \quad r = 3$ (ii) $a = \sqrt{5}; \quad r = \frac{1}{5}$

(iii) $a = 81; \quad r = \frac{-1}{3}$ (iv) $a = \frac{1}{64}; \quad r = 2$

3۔ حسب ذیل میں کون سے سلسلہ جیومٹریہ تصاعد میں ہیں؟ اگر یہ جیومٹریہ تصاعد میں ہیں تو اگلے تین ارکان لکھیے۔

(i) 4, 8, 16 ..... (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{12}.....$

(iii) 5, 55, 555, ... (iv) -2, -6, -18 .....

(v) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}.....$ (vi) $3, -3^2, 3^3, ...$

(vii) $x, 1, \frac{1}{x}, ..., (x \neq 0)$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, 4\sqrt{2}.....$

(ix) 0.4, 0.04, 0.004, ...

4۔ اگر $x, x + 2, x + 6$ ایک جیومٹریہ تصاعد کے تین متواتر ارکان ہوں تو 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

6.6 جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن

آیئے ایک مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ماحول میں بیکٹیر یا ہر گھنٹے میں 3 گنا ہوتے ہیں اگر پہلے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد 30 ہوتب چوتھے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد معلوم کیجیے۔

اس سوال کے حل کے لیے سب سے پہلے ہم دوسرے گھنٹے میں موجود بیکٹر یا کی تعداد معلوم کریں گے۔

چونکہ ہر گھنٹہ بیکٹر یا کی تعداد میں 3 گنا اضافہ ہوگا اس لیے

دوسرے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد = 3 × پہلے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد

$= 3 \times 30 = 30 \times 3^1$

$= 30 \times 3^{(2-1)}$

$= 90$

تیسرے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد = 3 × دوسرے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد

$= 3 \times 90 \quad = 30 \times (3\times3)$

$= 30 \times 3^2 \quad = 30 \times 3^{(3-1)}$

$= 270$

چوتھے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد = 3 × تیسرے گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد

$= 3 \times 270 \quad = 30 \times (3\times3\times3)$

$= 30 \times 3^3 \quad = 30 \times 3^{(4-1)}$

$= 810$

مشاہدہ کیجیے کہ حاصل ہونے والے اعداد اس طرح ہیں۔.... ,30, 90, 270, 810

یہ اعداد جیومٹریہ تصاعد ہیں (کیوں؟)

اوپر کی ترتیب کی مدد سے کیا ہم 20 گھنٹوں میں بیکٹر یا کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں؟

مندرجہ بالا طریقے میں ہر گھنٹے میں بیکٹر یا کی تعداد معلوم کرنے کے دوران آپ کو کچھ تصور آیا ہوگا

اس بالا طریقے کی مدد سے پر ہم بآسانی 20 گھنٹے میں پائے جانے والے بیکٹر یا کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

$$= 30\times\underbrace{(3\times3\times\ldots\times3)}_{\text{19 terms}}$$

$$= 30 \times 3^{19} \qquad = 30 \times 3^{(20-1)}$$

اس مثال کے ذریعہ ہم بآسانی 25 واں، 35 واں اور n واں رکن بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے کہ a_1, a_2, a_3 ..... ایک جیومٹریہ تصاعد ہے جس کا پہلا رکن 'a_1' اور مشترک نسبت (r) ہے تب

دوسرا رکن $a_2 = ar = ar^{(2-1)}$

تیسرا رکن $a_3 = a_2 \times r = (ar) \times r = ar^2 = ar^{(3-1)}$

چوتھا رکن $a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3 = ar^{(4-1)}$

....

....

اوپر کی ترتیب کا مشاہدہ کرنے پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ $a_n = a.r^{n-1}$ n واں رکن

یعنی پہلا رکن 'a' اور مشترک نسبت r رکھنے والے جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن $a_n = ar^{n-1}$ ہوگا

آیئے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال-20: جیومٹریہ تصاعد .... $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}$ کا 20واں اور n واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a = \frac{5}{2}$ اور $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\therefore a_{20} = ar^{20-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2^{10}}$$

اور
$$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}$$

مثال-21: جیومٹریہ تصاعد .... $2, 2\sqrt{2}, 4$ کا کون سا رکن 128 ہوگا؟

حل: یہاں $a = 2$ اور $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

فرض کرو کہ جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن 128 ہے تب

$$a_n = ar^{n-1} = 128$$

$$2.(\sqrt{2})^{n-1} = 128$$

$$(\sqrt{2})^{n-1} = 64$$

$$(2)^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$$

SCERT TELANGANA

$$\Rightarrow \frac{n-1}{2} = 6$$

$$\therefore \; n = 13$$

لہٰذا جیومیٹریہ تصاعد کا تیرواں رکن 128 ہوگا۔

مثال-22: ایک جیومٹریہ تصاعد کا تیسرا رکن 24 اور 6واں رکن 192 ہو تب 10واں رکن معلوم کیجیے۔

حل: یہاں $a_3 = ar^2 = 24 \quad ...(1)$

$$a_6 = ar^5 = 192 \quad ....(2)$$

مساوات (2) کو (1) سے تقسیم کرنے پر، $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{192}{24}$ حاصل ہوگا۔

$$\Rightarrow r^3 = 8 = 2^3$$

$$r = 2$$

r کی قدر کو مساوات (1) میں درج کرنے پر a=6 حاصل ہوگا۔

$$\therefore \; a_{10} = ar^9 = 6(2)^9 = 3072$$

مشق 6.5

1۔ ذیل میں دیے گئے ہر جیومٹریہ تصاعد کے مشترک نسبت r، اور nواں رکن (a_n) معلوم کیجیے۔

(i) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8} ....$ (ii) 2, -6, 18, -54

(iii) -1, -3, -9, -18 .... (iv) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25} ....$

2۔ جیومٹریہ تصاعد ..... ,5, 25, 125 کا 10واں اور nواں رکن معلوم کیجیے۔

3۔ حسب ذیل جیومٹریہ تصاعد کے ظاہر کردہ رکن معلوم کیجیے۔

(i) $a_1 = 9$ اور $r = \frac{1}{3}$؛ ہو تب a_7 کی قدر معلوم کیجیے (ii) $a_1 = -12$ اور $r = \frac{1}{3}$؛ تب a_6 کی قدر معلوم کیجیے

4۔ i) جیومٹریہ تصاعد ..... ,2, 8, 32 کا کون سا رکن 512 ہوگا؟

ii) جیومٹریہ تصاعد $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$ کا کون سا رکن 729 ہوگا؟

iii) جیومٹریہ تصاعد $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} .....$ کا کون سا رکن $\frac{1}{2187}$ ہوگا؟

SCERT TELANGANA

5۔ اگر ایک جیومٹریہ تصاعد کا 8واں رکن 192 اور مشترک نسبت 2 ہو تب 12 واں رکن معلوم کیجیے؟

6۔ ایک جیومٹریہ تصاعد کا چوتھا رکن $\frac{2}{3}$ اور 7واں رکن $\frac{16}{81}$ ہو تب جیومٹریہ تصاعد معلوم کیجیے؟

7۔ جیومٹریہ تصاعد ....,162,54,18 اور $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}$.... کے n ویں ارکان مساوی ہوں تب n کی قدر معلوم کیجیے؟

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

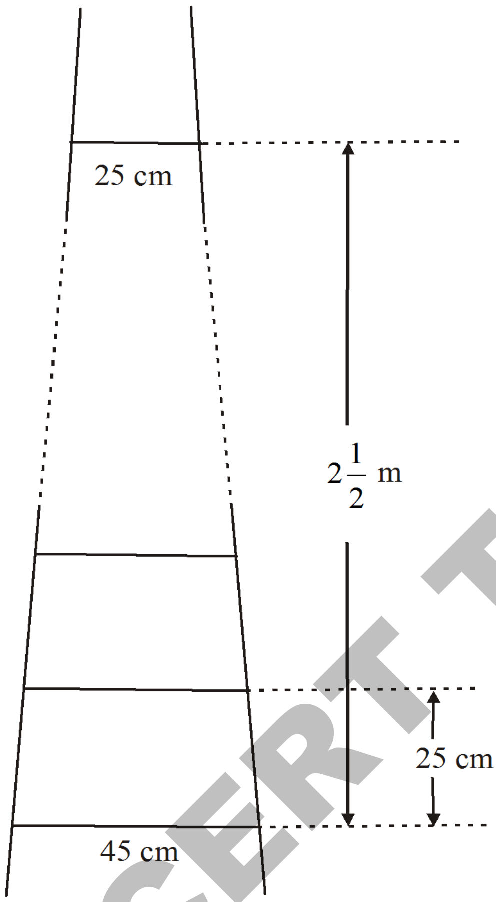
1۔ حسابی تصاعد . . . ,121, 117, 113 کا کون سا رکن پہلا منفی رکن ہوگا؟

(اشارہ: $a_n<0$ کے لیے n معلوم کیجیے)

2۔ ایک حسابی تصاعد کے تیسرے اور 7 ویں رکن کا مجموعہ 6 ہے اور ان کا حاصل ضرب 8 ہو تب پہلے 16 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے؟

3۔ ایک سیڑھی کے 25 ڈنڈے ہیں سیڑھی کے ڈنڈوں کے طول میں نیچے سے اوپری جانب بتدریج کمی واقع ہورہی ہے۔ اگر نیچے سے پہلی سیڑھی کا طول 45 سمر اور اوپر سے پہلی سیڑھی کا طول 25 سمر ہے اور ان دونوں کا درمیانی فاصلہ $2\frac{1}{2}$ میٹر ہو تب ڈنڈے بنانے کے لیے درکار لکڑی کا طول معلوم کیجیے؟

(اشارہ: $\frac{250}{25}+1$ = ڈنڈوں کی تعداد)



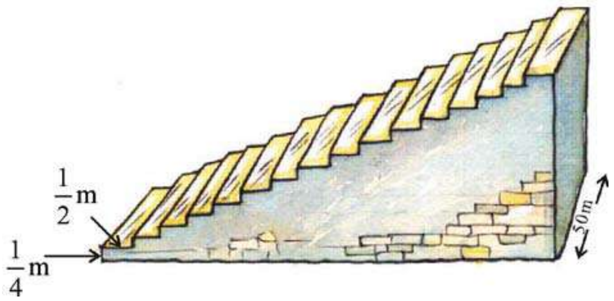
4۔ چند دکانات ایک ہی قطار میں موجود ہیں۔ ان کو 1 تا 49 اعداد مختص کیے گئے ہیں۔ اگر ان میں سے کسی ایک دکان کو 'x' تصور کرنے پر x کی قدر اس طرح معلوم کیجیے کہ 'x' سے پہلے دکانات کی تعداد بعد کی دکانات کی تعداد کے مساوی ہو۔

(اشارہ: $S_{x-1} = S_{49} - S_x$)

5۔ ذیل کی شکل کے مانند ایک فٹ بال میدان میں 15 سیڑھیوں پر مشتمل ایک بالا خانہ (terrace) ہے۔ اس کی ہر سیڑھی کا طول 50 میٹر اور چوڑائی $2\frac{1}{2}$ میٹر ہے۔ پہلی سیڑھی زمین سے $\frac{1}{4}$ میٹر اونچائی پر اور ہر سیڑھی اس سے پہلے والی سیڑھی کے $\frac{1}{4}$ میٹر اونچائی پر ہے تب سیڑھیوں سے گھرے ہوئے بالا خانہ کی تعمیر کے لیے درکار کانکریٹ کا حجم معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

(اشارہ: $50\,m^3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ = پہلی سیڑھی بنانے کے لیے درکار کانکریٹ کا حجم)



6۔ ایک کام کو مکمل کرنے کے لیے 150 مزدور لگائے گئے۔ لیکن دوسرے دن 4 مزدور غیر حاضر رہے۔ تیسرے دن بھی 4 مزدور غیر حاضر رہے اسی طرح مزدور روزانہ غیر حاضر ہوتے رہے جس کے نتیجہ میں متعینہ ایام سے 8 دن زائد کام چلا تو بتائیے کہ کام مکمل ہونے کے لیے جملہ کتنے دن لگے۔

(اشارہ: ابتداء میں کام مکمل ہونے کے لیے درکار دن کو 'x' تصور کرنے پر)

$$150x = \frac{x+8}{2}[2\times150+(x+8-1)(-4)]$$

(جواب: $x=17 \Rightarrow x+8=17+8=25$)

7۔ ایک مشین کی قیمت 5,00,000 ` ہے۔ پہلے سال اس کی قیمت میں 15% کمی، دوسرے سال $13\frac{1}{2}$%، تیسرے سال 12%۔۔۔ کمی واقع ہوئی۔ اگر یہ کمی اسی طرح سال در سال واقع ہوتی گئی تب 10 سال کے اختتام پر اس کی قیمت کیا ہوگی جبکہ دیئے گئے تمام فیصد ابتدائی قیمت پر محسوب کئے گئے۔

(اشارہ: 10 ارکان..........$=15+13\frac{1}{2}+12+$ جملہ قیمت میں کمی

$$S_n = \frac{10}{2}[30-13.5] = 82.5\%$$

$\therefore$ 10 سال بعد قیمت $=100-82.5=17.5$ یعنی (5,00,000 کا 17.5% یعنی)

SCERT TELANGANA

تجویز کردہ منصوبہ کام

1۔ گرڈ پیپر کے استعمال سے تصدیق کیجیے کہ دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد میں ہے یا نہیں۔

2۔ گرڈ پیپر کے استعمال سے حسابی تصاعد کا n واں رکن معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ اعداد کے سلسلے/فہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو اس کے پیش رو عدد میں ایک معین عدد جمع کرنے سے حاصل ہونے والے سلسلہ کو حسابی تصاعد کہتے ہیں۔ جمع کیے جانے والے معین عدد (d) کو فرق مشترک کہتے ہیں۔

حسابی تصاعد کے ارکان $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ ہیں۔

2۔ اعداد کی فہرست میں اگر فرق $a_1, a_2, a_3, \ldots$ کی قدریں مساوی ہوں یعنی $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$، $a_{k+1} - a_k$ کی قدر مساوی ہو (k کی مختلف قدروں کے لیے) تب دی گئی فہرست حسابی تصاعد ہے۔

3۔ حسابی تصاعد کا پہلا رکن a ‘فرق مشترک d ہو تب n واں رکن (عام رکن) $a_n = a + (n-1)d$ ہوگا۔

4۔ حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

5۔ اگر لامتناہی حسابی تصاعد کا آخری رکن 'l' ہو (یعنی n واں رکن) تب n ارکان کا مجموعہ $S = \frac{n}{2}(a + l)$

6۔ اعداد کی فہرست/سلسلے میں پائے جانے والے اعداد سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد' اس کے پیش رو عدد کو ایک معین عدد (r) سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والا سلسلہ جیومٹریہ تصاعد کہلاتا ہے۔ اور اس معین عدد کو مشترک نسبت کہتے ہیں؟

7۔ ایک جیومٹریہ تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک نسبت r ہو تب جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن

$$a^n = a.r^{n-1}$$

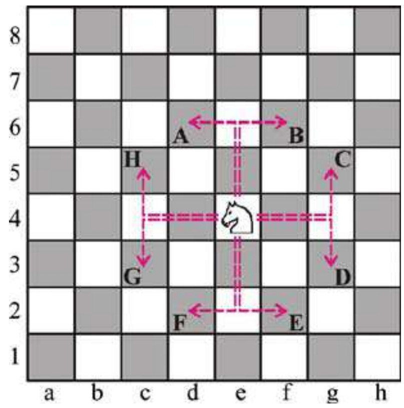
SCERT TELANGANA

باب
7

تحلیلی جیومٹری
Coordinate Geometry

7.1 تمہید:۔

آپ جانتے ہیں شطرنج کے کھیل میں گھوڑے کی چال 'L' کی طرح ہوتی ہے۔ یعنی ڈھائی قدم (جیسا شکل میں بتایا گیا ہے)۔ یہ دوسرے مہروں پر سے بھی جست لگاتا ہے۔اونٹ کی چال ترچھی (وتر نما) ہوتی ہے اور یہ ایک وقت کئی قدم آگے بڑھ سکتا ہے جبکہ اس کے آگے خالی ہوں۔



دوسرے مہرے کس طرح کی چال چلتے ہیں اُن پر غور کیجیے۔گھوڑے اور اونٹ کے علاوہ دوسرے مہروں کی چال کو شطرنج کی بساط پر دکھایا گیا ہے فرض کیجیے کہ گھوڑا مبداء(0,0) پر واقع ہے۔ یہ چاروں سمتوں میں جن کو شکل میں نقاط کے خطوط سے ظاہر کیا گیا ہے اپنی چال چل سکتا ہے۔گھوڑے کی حرکت سے حاصل نقاط سے مختلف مختصات معلوم کیجیے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

یہ کیجیے

(i) دی گئی شکل کی مدد سے نقاط A,B,C,D,E,F,G,H کے مختصات لکھیے۔

(ii) گھوڑے کی کل 8 مختلف سمت میں ہر ایک چال کا فاصلہ معلوم کیجیے۔مبداء سے نقاط A،B،C،D،E،F اور H کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

(iii) دو نقاط H اور C کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔دو نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ بھی معلوم کیجیے۔

7.2 دو نقاط کے درمیان فاصلہ:

دو نقاط (2,0) اور (6,0) x- محور پر واقع ہیں جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ 4 اکائیاں ہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں کہ x- محور پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ ان کے x-مختصات کا فرق ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

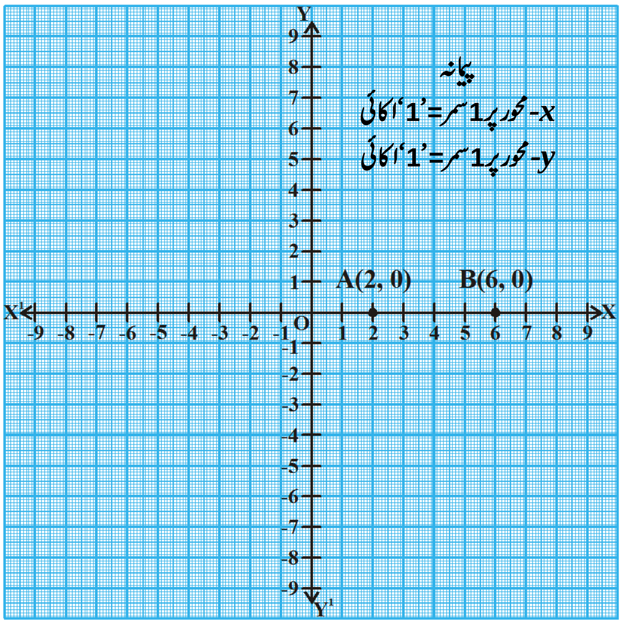
نقاط $(-2,0)$ اور $(-6,0)$ کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

ان نقاط کے x-مختصات کا فرق

$(-6)-(-2) = -4$ (منفی قدر)

فاصلہ کو ہم کسی بھی صورت میں منفی سے ظاہر نہیں کرتے۔

اس کے لیے ہم کو فرق کی مطلق قدر لینی چاہیے۔



اس طرح فاصلہ $= |(-6) - (-2)| = |-4| = 4$ اکائیاں

اس طرح عموماً نقاط $A(x,o)$، $B(x_2,o)$ جو x-محور پر واقع

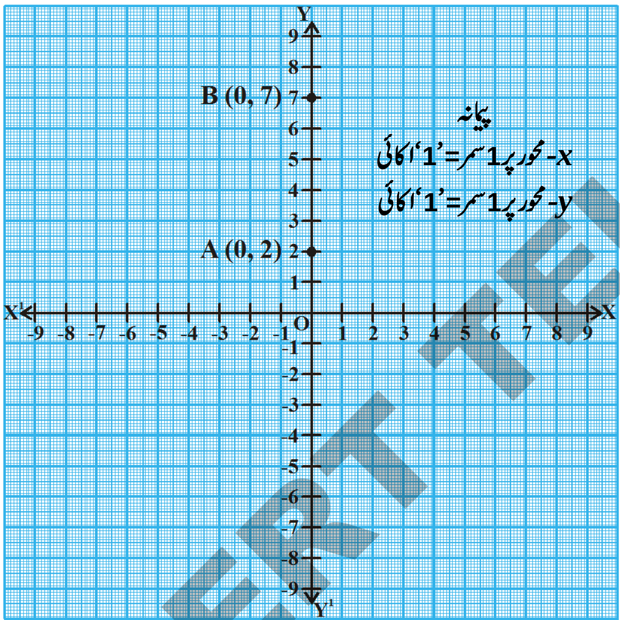
کا درمیانی فاصلہ $|x_2-x_1|$ ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر دو نقاط y- محور پر واقع ہوں تب ان نقاط کا درمیانی فاصلہ y- مختصات کا فرق ہوگا۔

$\therefore$ دو نقاط (o,y_1)، (o,y_2) کا درمیانی فاصلہ $|y_2-y_1|$ ہوگا۔

مثال کے طور پر دو نقاط $A(o,2)$ اور $B(0,7)$ ہیں۔

تب، ان کا درمیانی فاصلہ $= |7-2| = 5$ اکائیاں۔



SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

(i) نقاط $(-4, 0), (2, 0), (6, 0), (-8, 0)$ مختصات کی مستوی پر کہاں واقع ہیں۔

(ii) نقاط $(-4, 0)$ اور $(6, 0)$ کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

کوشش کیجیے

(i) نقاط $(0, -3), (0, -8), (0, 6), (0, 4)$ مختصات کی مستوی پر کہاں پر واقع ہیں؟

(ii) نقاط $(0,-3)$ اور $(0,-8)$ کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟ تصدیق کیجیے کہ مختصات کی مستوی میں Y- محور پر واقع نقاط کا درمیانی فاصلہ $|y_2 - y_1|$ ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

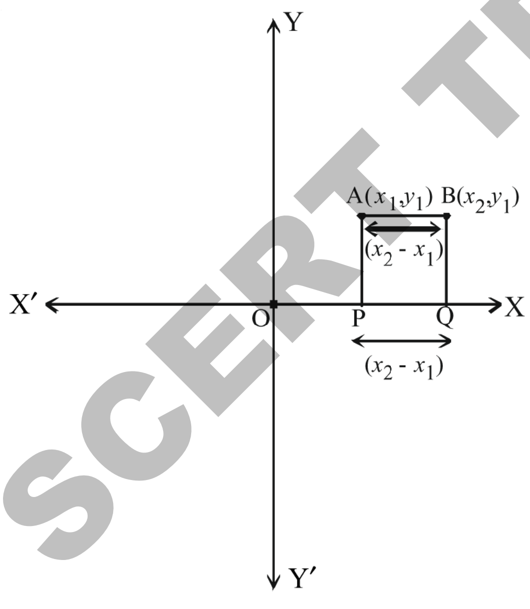
آپ دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ کس طرح معلوم کریں گے جب کہ ان نقاط کے x یا y مختصات مساوی ہیں لیکن صفر نہیں۔

7.3 محوروں کے متوازی خطوط پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ

نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_1)$ پر غور کیجیے کیوں کہ y- مختصات مساوی ہوں۔ یہ نقاط x- محور کے متوازی خط پر واقع ہیں۔

x- محور پر AP اور BQ دو عمود کھینچے گئے ہیں۔

شکل پر کا مشاہدہ کیجیے۔ APQB مستطیل ہے۔



تب $AB = PQ$

$PQ = |x_2 - x_1|$ (یعنی x- مختصات کے فرق) کی (مطلق قدر)

اسی طرح، دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_1, y_2)$ کو ملانے والی خط y- محور کے متوازی ہے تب ان دو نقاط کا درمیانی فاصلہ $|y_2 - y_1|$ ہوگا (یعنی y- مختصات کا فرق)۔

SCERT TELANGANA

مثال-1: نقاط A (4,0) اور B (8, 0) کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

حل: 4 اکائیاں $= |8 - 4| = |x_2 - x_1| = x$- مختصات کے فرق کی مطلق قدر

مثال-2: A(8, 3) اور B(-4, 3) دو نقاط ہیں۔ان کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں پر x_1 اور x_2 دو مختلف ربعوں میں واقع ہیں جبکہ ان کا 'y' مختص مساوی ہے۔

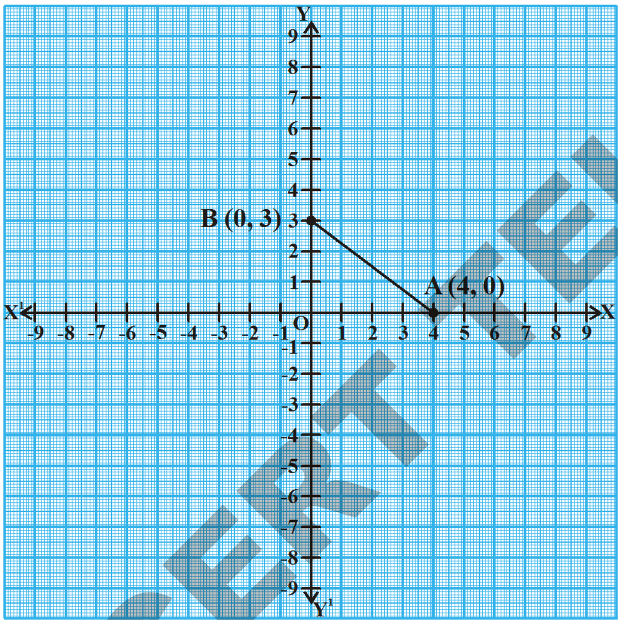
12 اکائیاں $= |-12| = |-4 - 8| = |x_2 - x_1| = AB$ فاصلہ

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

i. (3, 8), (6, 8) ii. (-4,-3), (-8,-3) iii. (3, 4), (3, 8) (iv) (-5, -8), (-5, -12)

فرض کرو کہ A اور B بالترتیب نقاط (4, 0) اور (0, 3) ہیں اور 'O' مبداء ہے۔ ΔAOB ایک قائم الزاویہ ہے۔



شکل سے

OA = 4 اکائیاں (x- مختص)

OB = 3 اکائیاں (y- مختص)

تب AB کا درمیانی فاصلہ = ؟

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$ اکائیاں

اس طرح AB کا درمیانی فاصلہ = 5 اکائیاں

یہ کیجیے

مندرجہ ذیل میں دیئے گئے نقاط کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) A = (2, 0) اور B(0, 4) (ii) P(0, 5) اور Q(12, 0)

کوشش کیجیے

مبدا 'O' اور نقطہ A(7,4) کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

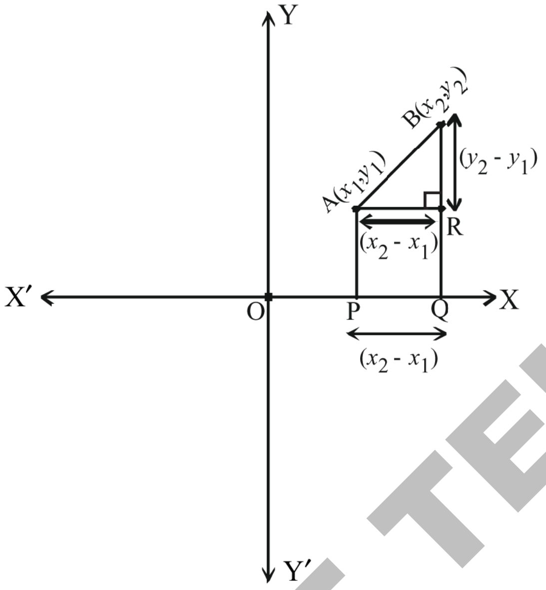
SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ رحیم کہتا ہے کہ مبداء $O(0,0)$ سے نقطہ $P(x_1,y_1)$ کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{x^2+y^2}$ ہے کیا آپ رحیم کی بات پر متفق ہیں یا نہیں؟ کیوں؟

2۔ رحیم AB کے درمیانی فاصلہ کا ضابطہ اس طرح لکھتا ہے۔ $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ کیوں؟

7.4 X - Y مستوی میں کوئی دو نقاط کا درمیانی فاصلہ



فرض کرو کہ $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2,y_2)$ مستوی میں واقع خط پر کے دو نقاط ہیں جیسا کہ شکل سے ظاہر کیا گیا ہے۔

X- محور پر AP اور BQ دو عمود کھینچیے۔

ایک عمود AR نقطہ 'A' سے BQ پر اس طرح گرایئے کہ وہ 'R' تک جا ملے۔

تب $OP = x_1$, $OQ = x_2$

اس طرح $PQ = OQ - OP$

$= x_2 - x_1$

شکل $APQR$ کا مشاہدہ کیجیے جو ایک مستطیل ہے۔

اس لیے $PQ = AR = x_2 - x_1$

$QB = y_2,\ QR = y_1$

اس لیے $BR = QB - QR = y_2 - y_1$

مثلث ΔARB (قائم الزاویہ مثلث)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (مسئلہ فیثاغورث کی رُو سے)

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

یعنی $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

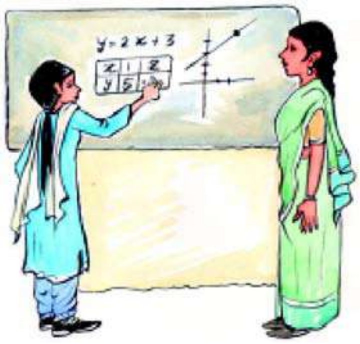
اس طرح نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

اس کو دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال-3: آیئے نقاط A(4, 2) اور B(8, 6) کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں۔



حل: ان نقاط کا (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے تقابل کیجیے۔

$$x_1 = 4,\ \ x_2 = 8, y_1 = 3, y_2 = 6$$

ضابطہ کی رو سے

$$AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ کا درمیانی فاصلہ

$$= \sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} =$$ 5 اکائیاں

یہ کیجیے

دیئے گئے نقاط کے جوڑ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) (7, 8) اور (-2, 3) (ii) (-8, 6) اور (2, 0)

کوشش کیجیے

دو نقاط A(1, -3) اور B(-4, 4) کا درمیانی فاصلہ اعشاریہ کے دو مقام تک معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ صفی دو نقاط T(5, 2) اور R(-4, -1) کا درمیانی فاصلہ قریب ترین اشاریہ تک 9.5 اکائیاں محسوب کیا؟

اب آپ نقاط P (4, 1) اور Q(-5, -2) کا فاصلہ معلوم کیجیے۔ کیا آپ کا جواب صفی کے جواب کے مساوی ہے؟

آیئے مزید چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال-4: بتایئے کہ نقاط A (4, 2), B (7, 5), C (9, 7) ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

حل: آیئے AB، BC اور AC کا فاصلہ معلوم کریں۔

فاصلہ کا ضابطہ کی رو سے $= d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

SCERT TELANGANA

اس طرح $AB=\sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

$=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$ اکائیاں

$BC=\sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ اکائیاں

$AC=\sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2}=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$

$=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$ اکائیاں

اب

$AB+BC=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}=AC$

$\therefore$ تین نقاط (4, 2), (7, 5) اور (9, 7) ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہیں۔

(ایک خط پر واقع ہونے والے نقاط کو "ہم خط نقاط" (Collinear points) کہتے ہیں۔)

مثال-5: کیا نقاط (3, 2), (-2, -3) اور (2, 3) ایک مثلث بناتے ہیں؟

حل: آیئے فاصلہ کے ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے PQ,QR,RP کا فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ جہاں پر P(3, 2)، Q(-2, -3) اور R(2, 3) ہیں۔

$PQ=\sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$ = 7.07 کا ئیاں=

$QR=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{(4)^2+(6)^2}=\sqrt{52}=7.21$ = اکائیاں (تقریباً)

$PR=\sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}=1.41$ = 1.41 اکائیاں (تقریباً)

اگر کسی دو فاصلوں کا مجموعہ تیسرے فاصلے سے زیادہ ہوتا ہو تب دیئے گئے نقاط P، Q، R ایک مختلف الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

مثال-6: بتایئے کہ دیئے گئے نقاط (1, 7), (4, 2), (-1,-1) اور (-4, 4) ایک مربع کے راس ہیں۔

حل: فرض کرو کہ A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1), D(-4, 4) دیئے گئے نقاط ہیں۔

دیئے گئے نقاط ایک مربع ABCD کے راس ہیں ثابت کرنے کے لیے ہمیں مربع کی خصوصیات استعمال کرنا ہوگا کہ تمام ضلعوں کا طول مساوی ہوتے ہیں اور ان کے وتر کے طول بھی مساوی ہوتے ہیں۔

اس طرح اضلاع ہوں گے۔

$AB=\sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ اکائیاں

$BC=\sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ اکائیاں

$CD=\sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$ اکائیاں

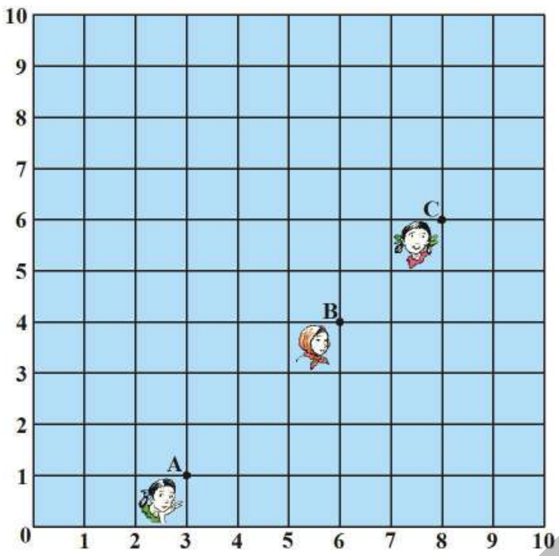
SCERT TELANGANA

$$DA = \sqrt{(-4-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$ اکائیاں

وتر $$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$ اکائیاں

وتر $$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

اسی طرح $AB = BC = CD = DA$ اور $AC = BD$ اس طرح چار ضلعی کے تمام اضلاع کے طول مساوی ہیں اور ان کے وتر AC، BD کے طول بھی آپس میں مساوی ہیں۔ اسی لیے ABCD ایک مربع ہے۔



مثال-7: متصلہ شکل میں ایک جماعت میں بینچ کی ترتیب دکھائی گئی ہے۔ ثانیہ، آفرین، ثمرین، بالترتیب A(3, 1)، B(6, 4) اور C(8, 6) پر بیٹھے ہیں۔

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ وہ ایک ہی خط میں ہیں۔

آپ کے جوابات کی وجوہات بیان کیجیے۔

حل: دو نقاط کے درمیان کا فاصلہ معلوم کرنے کے ضابطے کو استعمال کرنے پر

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$ اکائیاں

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ اکائیاں

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$ اکائیاں

اس طرح $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ نقاط A، B، C ہم خط ہیں۔

اسی لیے وہ تینوں ایک ہی خط پر بیٹھے ہیں۔

مثال-8: x اور y کے درمیان رشتہ محسوب کیجیے۔ اس طرح کہ نقطہ (x,y) دیئے گئے نقاط (7,1) اور (3,5) سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ نقطہ $P(x, y)$ نقاط $A(7, 1)$ اور $B(3, 5)$ سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

سوال کی رو سے $AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2$

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 - 2y + 1) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25)$$

$$(x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50) - (x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34) = 0$$

SCERT TELANGANA

$$-8x + 8y = -16$$

جو مطلوبہ رشتہ ہے $x - y = 2$

مثال - 9: y- محور پر ایک نقطہ معلوم کیجیے جو دیئے گئے دو نقاط $A(6, 5)$ اور $B(-4, 3)$ سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ y- محور پر نقطہ (o,y) کی شکل ہوگا۔ فرض کیجیے کہ نقطہ $P(o,y)$ نقاط A اور B سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

تب $PA = \sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2}$

$$PB = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-4)^2}$$

$$PA^2 = PB^2$$

اس طرح $(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$

$$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

$$4y = 36$$

$$y = 9$$

اس طرح مطلوبہ نقطہ $(0, 9)$ ہے۔

آیئے ہم اس کی جانچ کریں گے۔

$$AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

اس طرح نقطہ $(0,9)$ نقاط $(6,5)$ اور $(4,3)$ سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے۔

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) $(2, 3)$ اور $(4, 1)$ (ii) $(-5, 7)$ اور $(-1, 3)$

(iii) $(-2, -3)$ اور $(3, 2)$ (iv) (a, b) اور $(-a, -b)$

2۔ نقاط $(0,0)$ اور $(36,15)$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

3۔ جانچ کیجیے آیا نقاط $(1, 5)$، $(2, 3)$ اور $(-2, -1)$ ہم خط ہیں یا نہیں۔

4۔ جانچ کیجیے کہ آیا نقاط $(5, -2)$ $(6, 4)$ اور $(7, -2)$ مساوی الالساقین مثلث کے راس ہیں یا نہیں۔

5۔ بتلایئے کہ نقاط $A(a,0)$ $B(-a,0)$ $C(0, a\sqrt{3})$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

SCERT TELANGANA

6۔ ثابت کیجیے کہ نقاط (-7, -3)، (5, 10)، (15, 8) اور (3, -5) متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

7۔ بتلایئے کہ نقاط (-4, -7)، (-1, 2)، (8, 5) اور (5, -4) ترتیب وار لینے پر معین کے راس ہیں؟ اور اس کا رقبہ معلوم کیجیے؟

اشارہ = معین کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times$ (وتروں کا حاصل ضرب)

8۔ مندرجہ ذیل کے نقاط سے بننے والے چار ضلعی شکل کا نام دیجیے۔ اگر کوئی ہوا پنے جواب کیلئے وجوہات بیان کیجیے؟

(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0) (ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-5, 1)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

9۔ x- محور پر واقع نقطہ معلوم کیجیے جو نقاط (2, -5) اور (-2, 9) سے مساوی فاصلہ پر ہے؟

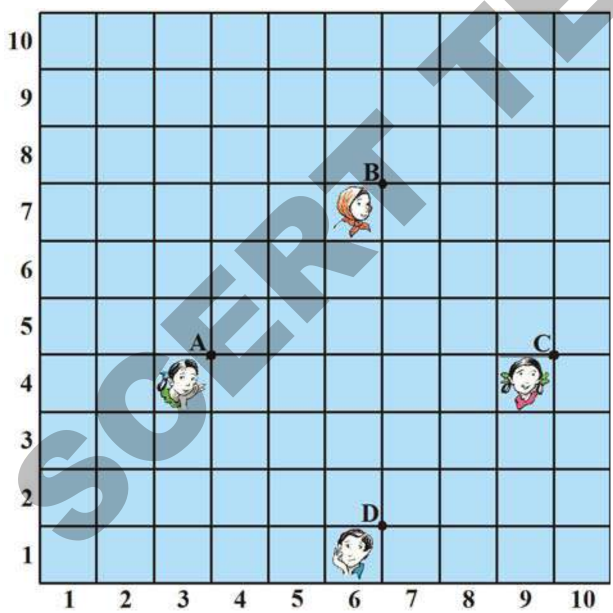
10۔ x کی قدر معلوم کیجیے جبکہ نقاط (x, 7) اور (1, 15) کا درمیانی فاصلہ 10 اکائیاں ہیں؟

11۔ y کی قدر معلوم کیجیے جب کہ نقاط P(2, -3) اور Q(10, y) کا درمیانی فاصلہ 10 اکائیاں ہے۔

12۔ دائرے کا نصف قطر معلوم کیجیے جس کا مرکز (3, 2) ہے اور وہ نقطہ (-5, 6) سے گزرتا ہے؟

13۔ کیا آپ نقاط (1, 5)، (5, 8) اور (13, 14) سے ایک مثلث بنا سکتے ہو؟ وجوہات بیان کیجیے؟

14۔ x اور y کے درمیان رشتہ محسوب کیجیے اس طرح کہ نقطہ P(x,y) نقاط (-2,8) اور (-3, -5) سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے؟

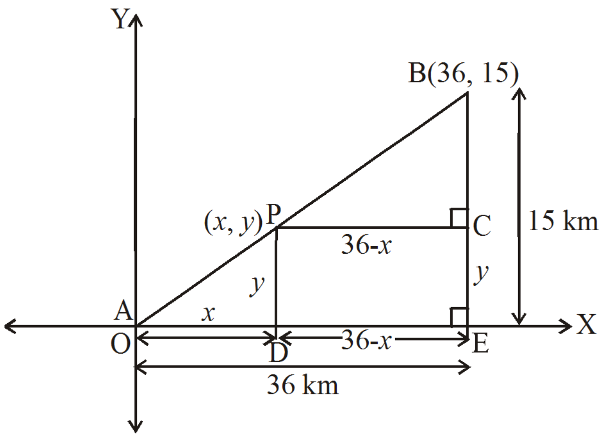


15۔ ایک کمرے جماعت میں چار دوست شکل میں بتلایئے گئے نقاط A، B، C اور D پر بیٹھے ہوئے ہیں۔ نصرت اور نور جہاں کمرے جماعت میں بیٹھے دوستوں کا مشاہدہ کرتے ہوئے ایک دوسرے سے تبادلہ خیال کرتے ہیں۔ نصرت، نور جہاں سے کہتی ہے کہ ”کیا آپ سوچتی ہیں کہ یہ نقاط ABCD ایک مربع بناتے ہیں؟“ نور جہاں اس بیان سے اتفاق نہیں کرتی ہے۔ دو نقاط کا درمیانی فاصلہ کے ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے بتلایئے کہ ان دونوں میں کون صحیح ہے؟

16۔ x اور y کے درمیان رشتہ محسوب کیجیے اس طرح کہ نقطہ (x,y) نقاط (7,1) اور (3,5) سے مساوی فاصلہ پر واقع ہے؟

SCERT TELANGANA

7.5۔ نسبت میں تقسیم کرنے کا ضابطہ (SECTION FORMULA):



فرض کیجیے کہ ایک ٹیلیفون کمپنی ایک ریلے ٹاور 'P' کو دو نقاط A اور B کے درمیان اس طرح نصب کرنا چاہتی ہے کہ ٹاور اور نقطہ B کا درمیانی فاصلہ، ٹاور اور نقطہ A تک کے فاصلہ کا دگنا ہے۔ اگر 'P'، A اور B کے درمیان واقع ہو تب نقطہ 'P'، AB کو 1:2 میں تقسیم کرتا ہے۔ (شکل دیکھیے) اگر نقطہ A کو مبداء 'O' پر لیا جائے اور ایک کلومیٹر کو ایک اکائی دونوں محوروں پر لی جائے تب نقطہ B (36,15) پر ہوگا۔ ٹاور کا مقام معلوم کرنے کے لیے ہم کو 'P' کے مختصات معلوم کرنا ہوگا۔ ہم ان مختصات کو کس طرح معلوم کریں گے۔

فرض کرو کہ 'P' کے مختصات (x, y) ہیں۔ نقطہ P اور B سے x محور پر عمود کھینچیں، فرض کرو کہ یہ نقطہ D اور E ہیں۔ ایک عمود PC، BE پر کھینچیں، تب مشابہ مثلثات کی AAA خاصیت کے تحت جس کے بارے میں آپ پچھلی جماعت میں پڑھ چکے ہیں۔ ΔPOD اور ΔBPC مشابہہ مثلثات ہیں۔

$$\therefore \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

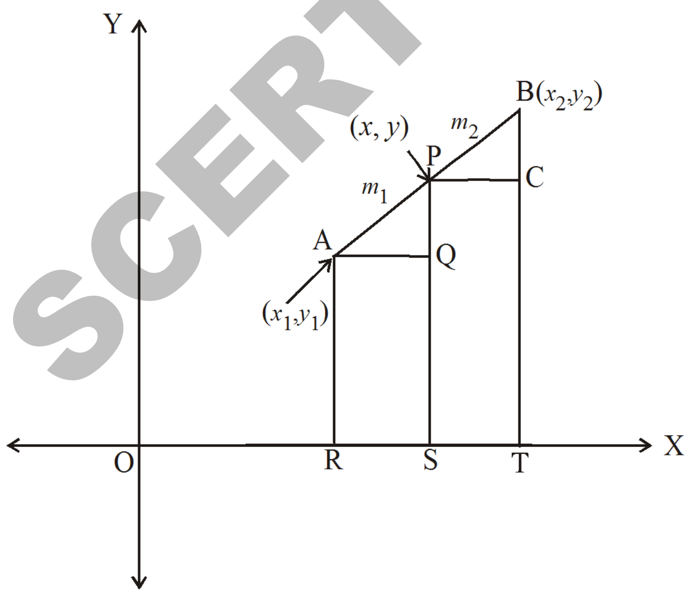
اس لیے
$$\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$$

$$2x = (36 - x) \quad \text{اور} \quad 2y = 15 - y$$

$$3x = 36 \quad \text{اور} \quad 3y = 15$$

$$x = 12 \quad \text{اور} \quad y = 5$$

اس طرح مساوات سے 'P' کے مختصات $x = 12$ اور $y = 5$ ہوتے ہیں۔



آپ P(12, 5) کے مختصات کو درج کرتے ہوئے دی گئی شرط کی جانچ کر سکتے ہیں۔ یعنی OP:PB=1:2

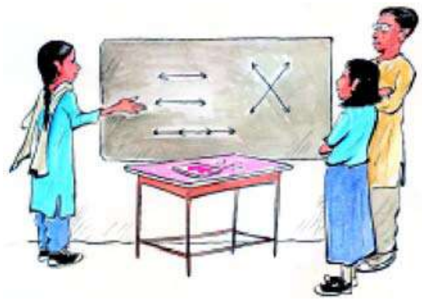
فرض کیجیے کہ کوئی دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خط کو نقطہ $P(x, y)$ داخلاً $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

اس لیے $\frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ ....(i) (شکل میں دیکھیے)

x- محور پر AR، PS اور BT عمود کھینچیے۔

SCERT TELANGANA

AQ اور PC، x- محور پر متوازی کھینچئے۔ مشابہت کے AA معیار کے تحت



$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

اس طرح $$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad ....(2)$$

اب $$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ان تمام قدروں کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \left[\because \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2}\ \text{مساوات (1) سے}\right]$$

اس طرح $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ لینے پر $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$ حاصل ہوتا ہے

اسی طرح، $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ لینے پر $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے $P(x, y)$ کے مختصات جو خطی قطعہ AB کو داخلاً $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جبکہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہوں۔

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \quad ....(3)$$

اس کو نسبت میں تقسیم کا ضابطہ (Section formula) کہتے ہیں۔

اس ضابطہ کو Y- محور پر نقاط A، P اور B سے عمود کھینچتے ہوئے مندرجہ بالا کی طرح اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر نقطہ P، AB کو K:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تب P، کے مختصات

$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right)$. ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

مخصوص مرحلہ (Special Case):

خطی قطعہ کا وسطی نقطہ خطی قطعہ کو 1:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس لیے نقطہ P کے مختصات جو نقاط $A(x_1,y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

$$\left(\frac{1.x_1+1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1+1.y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

آیئے چند مثالیں نسبت میں تقسیم کے ضابطہ Section Formula کو استعمال کرتے ہوئے حل کریں گے۔

مثال-10: نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (4,-3) اور (8,5) کو ملانے والے خط کو 3:1 کی نسبت میں داخلاً تقسیم کرتا ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ $P(x, y)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔ نسبت میں تقسیم کا ضابطہ کی مدد سے

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = \frac{24+4}{4} = \frac{28}{4} = 7,$$

$$y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = \frac{15-3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

جو ایک مطلوبہ نقطہ ہے $P(x, y) = (7, 3)$

مثال-11: نقاط (3, 0) اور (-1, 4) کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے؟

حل: فرض کرو کہ نقطہ $M(x, y)$ ، نقاط (x_1,y_1) ، اور (x_2,y_2) کو ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ ہے۔

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ نقاط (3, 0) اور (-1, 4) کے ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ

$$M(x, y) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = (1, 2)$$

یہ کیجیے

1۔ نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (3, 5) اور (8, 10) کو ملانے والے خط کو 2:3 کی نسبت میں داخلاً تقسیم کرتا ہے۔

2۔ نقاط (2, 7) اور (12, -7) کو ملانے والی خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے؟

SCERT TELANGANA

7.6 خط کے نقاط تثلیث Trisectional points of a line:

خطی قطعہ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط خط کے نقاط تثلیث کہلاتے ہیں۔

مثال-12: نقاط A(2, -2) اور B(-7, 4) کو ملانے والے خط کے نقطہ تثلیث معلوم کیجیے؟

حل: فرض کرو کہ نقاط P اور Q' خط AB کے نقاط تثلیث ہیں۔

یعنی AP=PQ=QB (شکل پر غور کیجیے)

اس طرح نقطہ 'P' AB کو داخلاً 1:2 کی نسبت تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح P کے مختصات ہیں۔ نسبت میں تقسیم کرنے والا ضابطہ استعمال کرنے سے

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right)$$

یعنی $\left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$

اب نقطہ 'Q' خط AB کو بھی داخلاً 2:1 میں تقسیم کرتا ہے اس طرح 'Q' کے مختصات ہیں۔

$$= \left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right)$$

یعنی $\left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$

اس طرح نقطہ تثلیث کے مختصات P(-1, 0) اور Q(-4, 2) ہیں۔

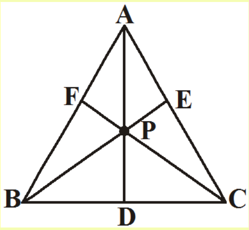
یہ کیجیے

1) نقاط (2, 6) اور (-4, 8) کو ملانے والی خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟

2) نقاط (-3, -5) اور (-6, -8) کو ملانے والی خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے



فرض کیجیے کہ A(4, 2)، B(6,5) اور C(1,4) سے مثلث ΔABC کے راس ہیں۔

1) نقطہ A سے خط BC پر کھینچا گیا وسطانیہ نقطہ D پر قطع کرتا ہے تب نقطہ D کے مختصات معلوم کیجیے؟

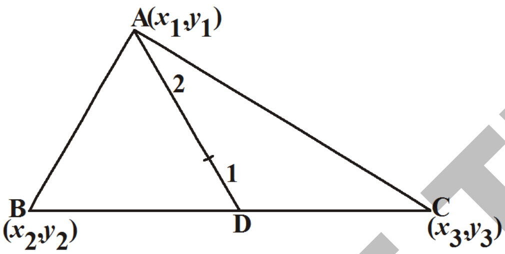
2) خط AD پر نقطہ P کے مختصات معلوم کیجیے جبکہ AP:PD=2:1 ہے۔

3) خطی قطعہ BE کو 2:1 تقسیم کرنے والا اور خطی قطعہ CF کو بھی 2:1 میں قطع کرنے والے نقاط کے مختصات معلوم کیجیے۔

4) آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔

تصدیق کیجیے جو وسطانیہ کو 2:1 میں تقسیم کرتا ہے۔ وہ نقطہ مثلث کا مرکز وسطانی ہوتا ہے۔

7.7 مثلث کا مرکز وسطانی :CENTROID OF A TRAINGLE



مثلث کا مرکز وسطانی دراصل اس کے وسطانیوں کا نقطہ تقاطع ہے۔

فرض کرو کہ $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ایک مثلث ABC کے راس ہیں۔

فرض کرو کہ AD وسطانیہ ہے جو قاعدہ BC کا ناصف ہے۔

$$D = \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

اب نقطہ 'G' معلوم کیجیے جو خط AD کو داخلاً 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ جو کہ مثلث کا مرکز وسطانی ہے۔ اگر G' (x, y) مختصات ہیں۔

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1(y_1)}{2+1}\right]$$

$$= \left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$$

SCERT TELANGANA

اس طرح، مرکز وسطانی کے مختصات ہیں۔

$$\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]$$

مثال-13: مثلث کے راس (3, -5)‘ (-7, 4)‘ (10, -2) ہیں اسکا مرکز وسطانی معلوم کیجیے۔

حل: مرکز وسطانی کے مختصات ہیں۔

$$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{(-5)+4+(-2)}{3}\right) = (2, -1)$$

$\therefore$ مرکز وسطانی (2, -1) ہے

یہ کیجیے

مثلث کے مرکز وسطانی معلوم کیجیے جبکہ اس کے راس (-4, 6)‘ (2, -2) اور (2, 5) ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال-14: نقطہ (-4, 6)‘ نقاط A(-6, 10) اور B(3, -8) کو ملانے والے خطی قطعہ کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ نقطہ (-4, 6) خط AB کو $m_1:m_2$ داخلاً تقسیم کرتا ہے نسبت میں تقسیم کا ضابطہ کے استعمال سے

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ہم جانتے ہیں کہ اگر $(x, y) = (a, b)$ تب $x = a, y = b$ ہوگا۔

اس لیے

$$-4 = \frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2} \quad \text{اور} \quad 6 = \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

اب $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ‘ سے

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$\therefore\ 7m_1 = 2m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{7}$$

اس طرح $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ہم جانچ کر سکتے ہیں کہ حاصلہ نسبت y- مختص کی بھی تصدیق کرتی ہے۔

اب $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ (دونوں جانب ’m2‘ سے تقسیم کرنے پر)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{\frac{-16}{7} + 10}{\frac{9}{7}} = \frac{-16 + 70}{9}$$

$$\frac{54}{9} = 6$$

اس طرح نقطہ (6 ,4-)‘ نقاط (10 ,6-)A اور (8- ,3)B کو ملانے والے خط کو 2:7 میں تقسیم کرتا ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

نقاط (9 ,6)A اور (9- ,6-)B کو ملانے والے خط دیے گئے ہیں۔

a) خط AB کو مبداء کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اور یہ AB کا کیا کہلاتا ہے؟

b) نقطہ (3 ,2)P‘ خط AB کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

c) نقطہ (3- ,2-)Q‘ خط AB کو کس نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

d) p اور Q خط AB کو کتنے مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے؟

e) خط AB کے لیے نقاط P اور Q کیا کہلاتا ہیں؟

SCERT TELANGANA

مثال-15: نقاط (6- ,5)اور(4- ,1) کو ملانے والی خطی قطعہ کو y- محور کس نسبت میں قطع کرتا ہے۔اور نقطہ تقاطع معلوم کیجیے؟

حل: فرض کرو کہ نسبت K:1 ہے۔نقطہ کے مختصات جو خط AB کو K:1 میں قطع کرتے ہیں اس طرح ہیں۔

$$\left(\frac{K(-1)+1(5)}{K+1}, \frac{K(-4)+1(-6)}{K+1}\right)$$

$$\text{i.e,}\left(\frac{-K+5}{K+1}, \frac{-4K-6}{K+1}\right)$$

یہ نقطہ y- محور پر واقع ہے۔اور ہم جانتے ہیں کہ y محور پر پہلا مختص 'O' ہوتا ہے۔

اس لیے $\frac{-K+5}{K+1}=0$

$-K+5=0, \Rightarrow K=5$

اس طرح $K:1=5:1$

K=5 کی قدر درج کرنے پر نقطہ تقاطع اس طرح ہوگا۔

$$=\left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4(5)-6}{5+1}\right)=\left(0, \frac{-20-6}{6}\right)=\left(0, \frac{-26}{6}\right)=\left(0, \frac{-13}{3}\right)=$$

مثال-16: بتایئے کہ نقاط بالترتیب (3, 3)A، (6, 1)B، (8, 2)Cاور (9, 4)Dایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

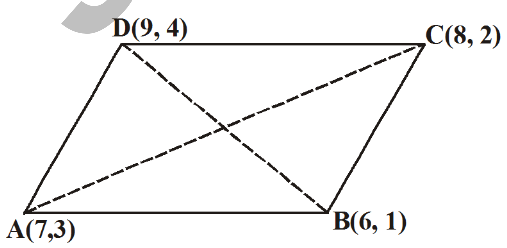
حل: فرض کرو کہ نقاط (3, 3)A، (6, 1)B، (8, 2)Cاور (9, 4)D ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصف کرتے ہیں۔اس طرح وتر ACاور BD کے وسطی نقاط مساوی ہونے چاہیے۔

اب ہم ACاور BD کے وسطی نقاط کو ضابطہ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ کی مدد سے معلوم کریں گے۔

AC کا وسطی نقطہ $=\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$

DB کا وسطی نقطہ $=\left(\frac{9+6}{2}, \frac{4+1}{2}\right)=\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$



اس طرح AC کا وسطی نقطہ = BD کا وسطی نقطہ

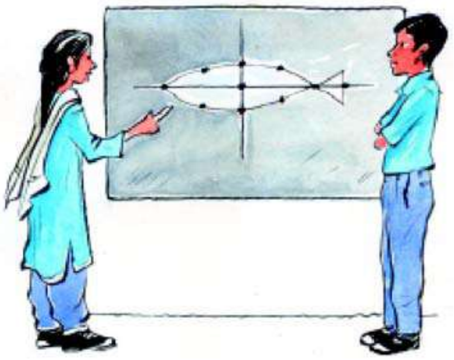
$\therefore$ نقاط A،B،Cاور D متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

SCERT TELANGANA

مثال-17: اگر نقاط A(6, 1) ‘B(8, 2) ‘C(9, 4) اور D(P, 3) ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔ تب ‘P’ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصف کرتے ہیں۔

یعنی AC کے وسطی نقطہ کے مختصات = BD کے وسطی نقطہ کے مختصات کے



یعنی $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$15 = 8 + p \Rightarrow p = 7$$

مشق 7.2

1۔ نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (1, 7-) اور (3-, 4) کو ملانے والے خط کو 2:3 کی نسبت میں قطع کرتا ہے۔

2۔ نقاط (1-, 4) اور (3-, 2-) کو ملانے والے خطی قطعہ کے نقاط تثلیث معلوم کیجیے؟

3۔ نقاط (10, 3-) ‘اور (8-, 6) ‘کو نقطہ (6, 1-) کو ملانے والے خطی قطعہ کو کس نسبت میں تقسیم کرتا ہے؟ معلوم کیجیے۔

4۔ اگر نقاط (2, 1) ‘(y, 4) ‘(6, x) اور (5, 3) متوازی الاضلاع کے راس ہیں تب x اور y کی قدر کیا ہوگی؟

5۔ نقطہ A ‘کے مختصات معلوم کیجیے جبکہ AB ایک دائرہ کا قطر ہے۔ جس کا مرکز (3-, 2) اور نقطہ B کے مختصات (4, 1) ہیں؟

6۔ اگر نقاط A اور B بالترتیب (2-, 2-) اور (4-, 2) ہیں۔ ‘P’ کے مختصات معلوم کیجیے اس طرح کہ $AP = \frac{3}{7}AB$ اور نقطہ ‘P’ خطی قطعہ AB پر واقع ہے۔

7۔ ان نقاط کے مختصات معلوم کیجیے جو خطی قطعہ (0 ,4-)A اور B(0, 4) کو ملانے والے خط کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں؟

SCERT TELANGANA

8۔ اُن نقاط کے مختصات معلوم کیجیے۔ جو نقاط A(-2,2) اور B(2,8) کو ملانے والے خطی قطعہ کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں؟

9۔ نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (a+b , a-b) اور (a- b, a + b) کو ملانے والے خطی قطعہ کو 3:2 کی نسبت میں داخلاً تقسیم کرتا ہے؟

10۔ مندرجہ ذیل میں دیئے گئے مثلث نقاط کا مرکز وسطانی معلوم کیجیے۔

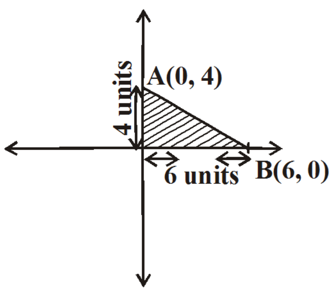
i. (-1, 3), (6, -3) اور (-3, 6) ii. (6, 2), (0, 0) اور (4, -7)

iii. (1, -1), (0, 6) اور (-3, 0)

11۔ A(x,y) کے نقاط معلوم کیجیے جبکہ C خط AB کو 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ B اور C کے نقاط بالترتیب (-5,8) اور (3,6) ہیں۔

12۔ ایک خطی قطع AB کے نقاط محوروں پر ملتے ہیں۔ اگر نقطہ P(3,6)، AB کو 2:3 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے تب A اور B کے نقاط معلوم کیجیے۔

7.8 مثلث کا رقبہ



نقاط A(0, 4) اور B(6, 0) پر غور کیجیے جو ایک مستوی میں مبداء سے مثلث بناتے ہیں۔

مثلث AOB کا رقبہ کیا ہوگا؟

ΔAOB ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا قاعدہ 6 اکائیاں (x- مختص) اور بلندی 4 اکائیاں (y- مختص)

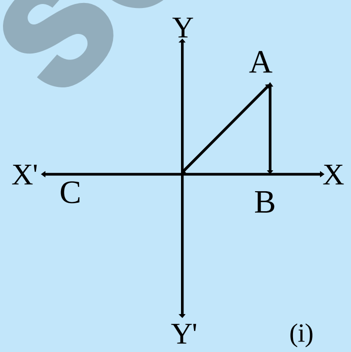
∴ ΔAOB کا رقبہ $=\frac{1}{2}\times$ قاعدہ × بلندی

$= \frac{1}{2}\times 6\times 4 =$ 12 مربع اکائیاں

کوشش کیجیے

x- محور پر نقطہ A اور y- محور پر نقطہ 'B' لیتے ہوئے مثلث ΔAOB کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے وہ کیا کرتے ہیں۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

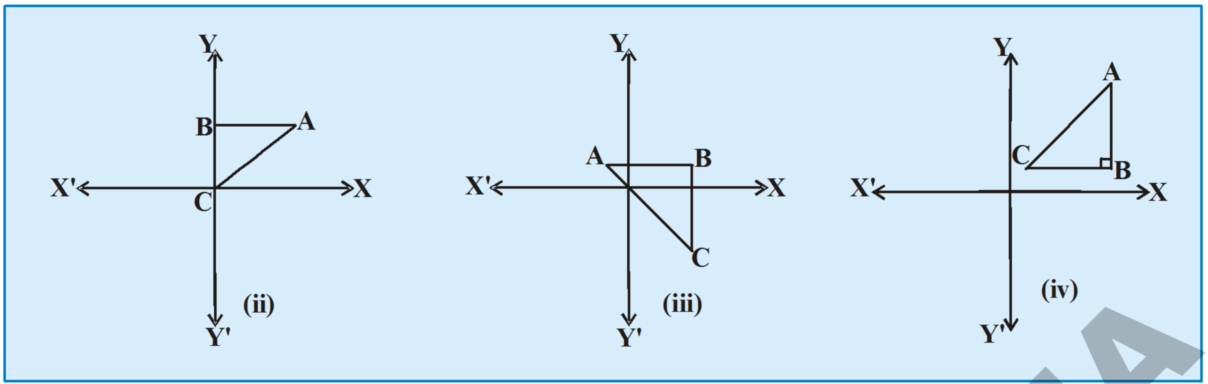


(i)

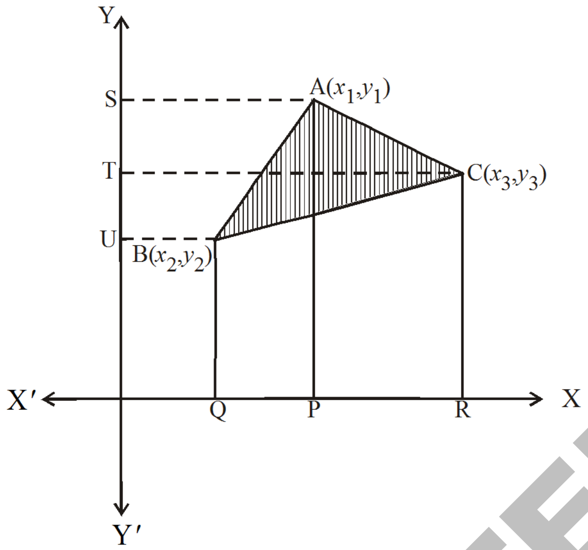
1۔ فرض کرو کہ $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$، $C(x_3, y_3)$ مثلث کے راس ہیں تب مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

اپنے دوستوں سے مثلث کے رقبوں پر تبادلہ خیال کیجیے۔

SCERT TELANGANA



مثلث کا رقبہ



مثلث ABC کے راس $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ہیں۔

AP، BQ اور CR بالترتیب نقاط A، B اور C سے x- محور پر عمود وار کھینچیے۔

واضح طور پر ABQP، APRC اور BQRC منحرف حاصل ہوتے ہیں۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ

مثلث ΔABC کا رقبہ = منحرف ABQP کا رقبہ + منحرف APRC کا رقبہ - منحرف BQRC کا رقبہ

$\therefore$ منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی ضلعوں کا مجموعہ)(متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ)

مثلث ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}(BQ + AP)QP + \frac{1}{2}(AP + CR)PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)QR$

شکل سے $BQ = y_2, \ AP = y_1, \ QP = OP - OQ = x_1 - x_2$

$CR = y_3, \ PR = OR - OP = x_3 - x_1$

$QR = OR - OQ = x_3 - x_2$

ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}\left|(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_3 - x_2)\right|$

$= \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

SCERT TELANGANA

$\therefore$ کارقبہ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

آیئے مزید چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال-18: مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس (1, -1) (-4, 6)اور(-3, -5) ہیں۔

حل: فرض کرو کہ A(1, -1) B=(-4, 6)اور C= (-3, -5) مثلث کے راس ہیں۔

کارقبہ $ABC = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|1(6+5) + (-4)(-5+1) + (-3)(-1-6)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|11+16+21\right| = 24$$

$\therefore$ مثلث ABC کا رقبہ 24 مربع اکائیاں ہوتا ہے۔

مثال-19: نقاط A(5, 2) ، B(4, 7) اور C(7, -4) سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے؟

حل: نقاط A(5, 2) ، B(4, 7) اور C(7, -4) سے بننے والے مثلث کا رقبہ ضابطہ کی رو سے

کا رقبہ $ABC = \frac{1}{2}\left|5(7+4) + 4(-4-2) + 7(2-7)\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|55-24-35\right| = \left|\frac{-4}{2}\right| = \left|-2\right| = 2$$

چونکہ رقبہ پیمائش ہے۔ جو منفی نہیں ہوسکتا اس لیے اس کی عددی قدر '2' لی جاسکتی ہے یا مطلق قدر 2=|-2| لی جاتی ہے۔

$\therefore$ مثلث کا رقبہ=2 مربع اکائیاں

یہ کیجیے

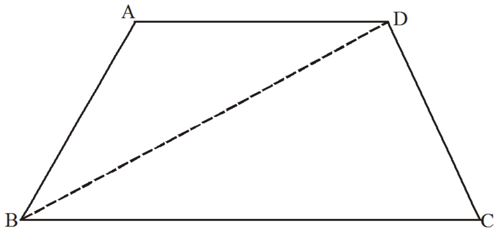
1۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس ہیں

(i) (5, 2) (3, -5)اور (-5, -1)

(ii) (6, -6) (3, -7)اور(3, 3)

SCERT TELANGANA

مثال-20: اگر $A(-5, 7)$، $B(-4,-5)$، $C(-1, -6)$ اور $D(4,5)$ ایک چار ضلعی کے راس ہیں۔تب چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: چار ضلعی کے نقاط B کو D سے جوڑنے پر دو مثلثات ABD اور BCD حاصل ہوتے ہیں۔

$$\Delta ABD \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-5(-10)+(-4)(-2)+4(12)]$$

$$= \frac{1}{2}(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ مربع اکائیاں}$$

$$\Delta BCD \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$$

$$= \frac{1}{2}[44-10+4] = 19 \text{ مربع اکائیاں}$$

چار ضلعی کا رقبہ = ΔABD کا رقبہ + ΔBCD کا رقبہ

اس طرح چار ضلعی کا رقبہ = 53+19 = 72 مربع اکائیاں

SCERT TELANGANA

کوشش کیجیے

مربع کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب $(0, -1)$، $(2, 1)$ $(0, 3)$ اور $(-2, 1)$ ہیں۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے۔

ذیل میں دیے گئے نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(i) $(2, 0), (1, 2), (1, 6)$

(ii) $(3, 1), (5, 0), (1, 2)$

(iii) $(-1.5, 3), (6, 2), (-3, 4)$

آپ نے مشاہدہ کیا؟

ان مختصات سے تین مختلف گراف بنائیے؟ آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔

کیا ہم کو کسی مثلث کا رقبہ 0 اکائیاں حاصل ہوا؟

اس کے کیا معنی ہیں؟

7.8.1 ہم خط خاصیت Collinearity:

فرض کرو کہ نقاط $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ایک ہی خط پر واقع ہیں۔ تب وہ مثلث نہیں بناتے ۔ یعنی ΔABC کا رقبہ صفر ہوگا۔

اگر مثلث کا رقبہ صفر اکائیاں ہو تب ہم کہیں گے کہ تین نقاط ہم خط ہیں۔

مثال-21: نقاط $(3, -2)$، $(-2, 8)$ اور $(0, 4)$ ایک مستوی میں واقع ہیں۔ بتایئے کہ یہ نقاط ہم خط ہیں۔

حل: مثلث کے رقبہ کے ضابطہ کی رو سے

$$\Delta = \frac{1}{2}|3(8-4)+(-2)(4-(-2))+0((-2)-8)|$$

$$= \frac{1}{2}|12 - 12| = 0$$

اس طرح مثلث کا رقبہ صفر ہے۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ تینوں نقاط ہم خط ہیں یا ایک ہی خط پر واقع ہیں۔

یہ کیجیے

جانچ کیجیے کہ آیا دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں۔

(i) (1, -1), (4, 1), (-2, -3)

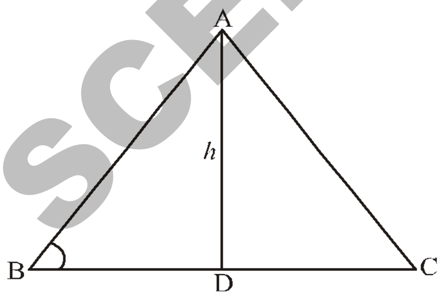
(ii) (1, -1), (2, 3), (2, 0)

(iii) (1, -6), (3, -4), (4, -3)

7.8.2 مثلث کا رقبہ ''ہیرون کا ضابطہ'' 'Heron's Formula':

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{مثلث کے رقبہ کا ضابطہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{بلندی}$$



کوئی دی گئی مثلث قائم الزاویہ مثلث ،مساوی الاضلاع مثلث یا مساوی الساقین مثلث ہوسکتی ہے۔ کیا ہم مثلث کا رقبہ محسوب کر سکتے ہیں؟

اگر ہم قاعدہ اور بلندی راست طور پر جانتے ہیں تب ہم اوپر دیئے گئے ضابطہ کو استعمال کر کے مثلث کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

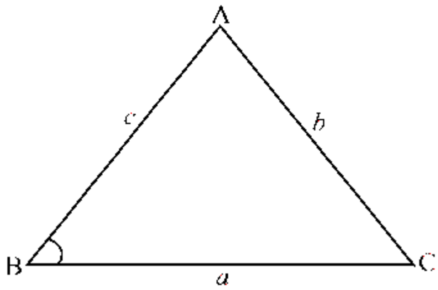
اگر مثلث کی بلندی 'h' نہ دی گئی ہو تو ہم رقبہ کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

SCERT TELANGANA

اس کے لیے یونان ریاضی داں ہیرون (Heron) نے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ضابطہ اخذ کیا جب کہ مثلث کے اضلاع کا طول a‘ b‘ اور c دیے جائیں۔

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \text{ جہاں } S = \frac{a+b+c}{2}$$

مثال کے طور پر‘ ایک مثلث کے اضلاع کا طول 12 میٹر‘ 9 میٹر اور 15 میٹر دیئے گئے ہیں ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے اس کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔



$$S = \frac{a+b+c}{2} \text{ جہاں } A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{12+9+15}{2} = \frac{36}{2} = 18m$$

تب $S - a = 18 - 12 = 6m$

$S - b = 18 - 9 = 9m$

$S - c = 18 - 15 = 3m$

$A = \sqrt{18(6)(9)(3)} = \sqrt{2916} =$ 54 مربع میٹر

یہ کیجیے

(i) مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے اضلاع کے طول بالترتیب 15 میٹر‘ 17 میٹر اور 21 میٹر ہے (ہیرون کے ضابطہ کا استعمال کیجیے۔)

(ii) نقاط (0,0)‘ (4,0) اور (4,3) سے بننے والے مثلث کا رقبہ ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے معلوم کیجیے۔

مثال-22: ‘b’ کی قدر معلوم کیجیے جبکہ نقاط A(1,2) B(-1,b) اور C(-3,-4) ہم خط ہیں۔

حل: دیئے گئے نقاط A(1, 2), B(-1, b), C(-3, -4)

تب $x_1 = 1, y_1 = 2; \quad x_2 = -1, y_2 = b \quad x_3 = -3, \ y_3 = -4$

ہم جانتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$

چونکہ دیئے گئے نقاط ہم خط ہیں $\frac{1}{2}\left|1(b+4) + (-1)(-4,-2) + (-3)(2-b)\right| = 0$

$$|b + 4 + 6 - 6 + 3b| = 0$$

$$4b + 4 = 0$$

$$4b = -4$$

$$\therefore b = -1$$

SCERT TELANGANA

مشق - 7.3

1۔ ذیل میں مثلث کے مختصات دیئے گئے ہیں ان کے رقبے معلوم کیجیے؟

(i) (2, 3) (-1, 0), (2, -4) (ii) (-5, -1), (3, -5), (5, 2)

(iii) (0, 0), (3, 0) and (0, 2)

2۔ ذیل میں دیے گئے نقاط ہم خط ہیں تب K کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) (7, -2) (5, 1) (3, K) (ii) (8, 1), (K, -4), (2, -5)

(iii) (K, K) (2, 3) and (4, -1)

3۔ مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔ جس کے راس (0, -1)، (2, 1) اور (0, 3) ہیں اس مثلث اور دی گئی مثلث کے رقبوں میں نسبت کیا ہوگی؟

4۔ ایک چار ضلعی کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب (-4, -2)، (-3, -5)، (3, -2) اور (2, 3) ہیں۔

5۔ ہیرون کے ضابطہ کی مدد سے مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جس کے راس بالترتیب (2, 3)، (6, 3) اور (2, 6) ہیں۔

7.9 خط مستقیم (Straight Line):

سیف اور آفرین دو متغیرات پر خطی مساوات کے حل کے لیے تبادلہ خیال کر رہے ہیں۔

سیف: کیا مساوات $2x + 3y = 12$ کا حل معلوم کر سکتے ہو۔

آفرین: ہاں! میں نے اس کا حل کیا ہے۔ دیکھئے۔

x	0	3	6	-3
y	4	2	0	6

$$2x+3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

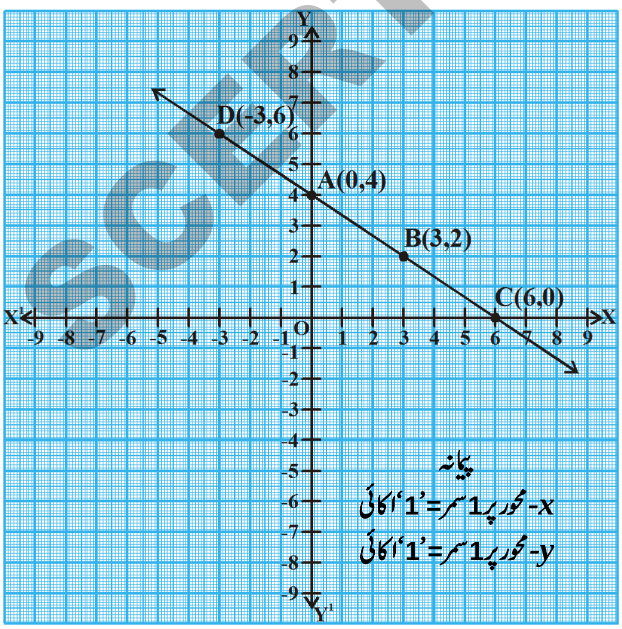
$$y = \frac{12-2x}{3}$$

آفرین: کیا تم اس حل کے مرتب جوڑ لکھ سکتے ہو؟

سیف: ہاں (0, 4)، (3, 2)، (6, 0) اور (-3, 6)۔

آفرین، آپ مختصات کے مستوی پر ان نقاط کا اظہار کر سکتی ہو۔

آفرین: میں نے اس طرح کیا ہے۔



SCERT TELANGANA

آفرین: یہ خط مستقیم ہے۔

سیف: اس خط پر کیا آپ دوسرے مختصات بھی شناخت کر سکتے ہیں؟

کیا آپ چند اور مختصات کی شناخت کرتے ہوئے آفرین کی مدد کر سکتے ہو؟

.................., ..., ..., ...

اس خط میں خط $\overline{AB}$ کیا کہلاتا ہے؟

AB دراصل خطی قطعہ ہے۔

یہ کیجیے

ذیل میں دیئے گئے نقاط کی مختصات کے مستوی پر نشاندہی کیجیے اور اُن کو حل لگائیے۔

1. A(1, 2), B(-3, 4), C(7, -1)
2. P(3, -5) Q(5, -1), R(2, 1), S(1, 2)

کونسے نقاط خط مستقیم بناتے ہیں اور کونسے نہیں؟ کیوں؟

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

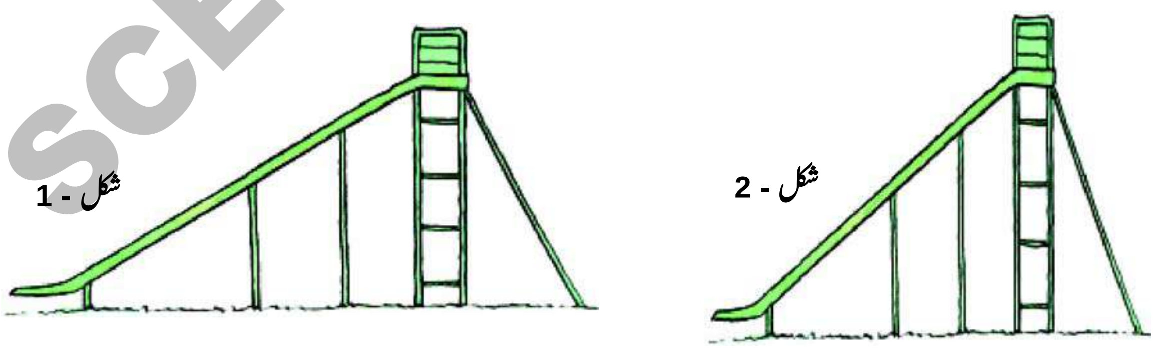
کیا $y = x + 7$ ایک خط مستقیم کو ظاہر کرتی ہے؟ مختصات کے مستوی پر خط کھینچئے۔

کس نقطہ پر خط y- محور کو قطع کرتی ہے۔

x- محور پر کتنا زاویہ بناتی ہے؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے؟

7.9.1 خط مستقیم کا ڈھال :Slope of a Straight line

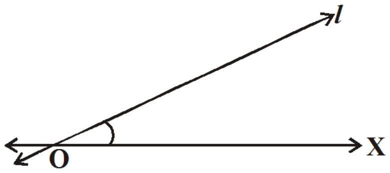
آپ نے چمن میں پھسل بنڈہ دیکھا ہوگا۔ یہاں پر دو پھسل بنڈے کی تصاویر دی گئی ہیں۔اس میں سے کونسے پھسل بنڈے پر سے آپ تیز پھسلیں گے؟

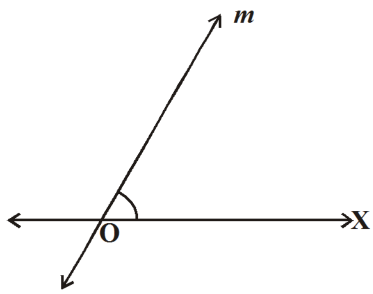


یقیناً آپ کا جواب دوسرے پر سے ہوگا۔ کیوں؟

ان خطوط کا مشاہدہ کیجیے۔

SCERT TELANGANA





کونسا خط OX پر بڑا زاویہ بناتا ہے؟

چونکہ خط 'm' OX پر خط 'l' کی بہ نسبت بڑا زاویہ بناتا ہے۔

خط 'm' کا ڈھال بڑا ہے خط 'l' کے ڈھال سے خط کی ڈھلوان سطح خط کا ڈھال کہتے ہیں۔

ہم خط کا ڈھال کس طرح معلوم کرسکتے ہیں؟

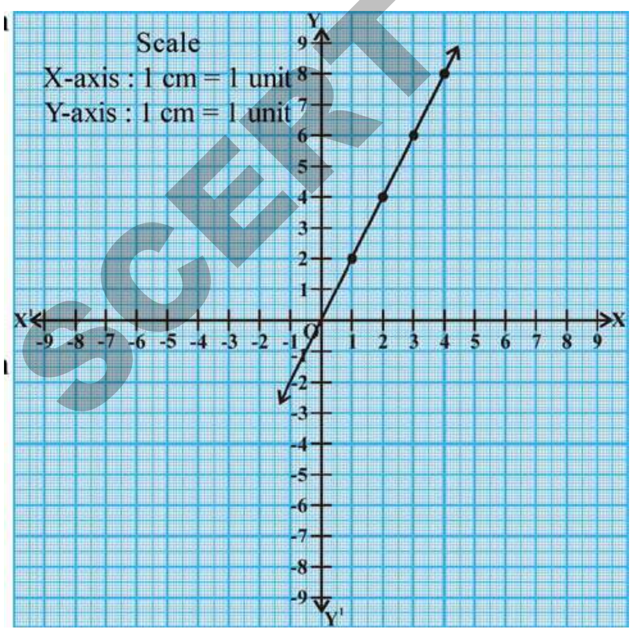
مشغلہ

شکل میں دکھائے گئے خطِ مستقیم پر غور کیجیے خط پر کے نقاط پر غور کرتے ہوئے جدول کو پُر کیجیے۔

x- مختص	0	1	2	3	4	-
y- مختص	0	2	4	6	8	-

ہم نے مشاہدہ کیا کہ x- مختص میں تبدیلی ہو تو y- مختص میں بھی تبدیلی ہوتی ہے۔

جب y- مختص کی قدر $y_1=0$ سے $y_2=2$ تک بڑھتی ہے



تب y مختص میں فرق = ...

تب متعلقہ x مختص میں فرق = ...

$\dfrac{\text{y- مختص میں فرق}}{\text{x- مختص میں فرق}}$ = ...

جب y مختص کی قدر $y_1=2$ سے $y_3=4$ تک بڑھتی ہے۔

تب y مختص میں فرق۔ = ...

x مختص میں فرق = ...

اس طرح $\dfrac{\text{y- مختص میں فرق}}{\text{x- مختص میں فرق}}$ = ...

SCERT TELANGANA

تب آپ چند دوسرے نقاط سے کوشش کر سکتے ہیں؟ کوئی دو نقاط منتخب کیجیے۔ اور اس طرح جدول کو پُر کیجیے۔

y مختصات		y مختصات کا فرق	x مختصات		x مختصات کا فرق	$\frac{y \text{ مختصات کا فرق}}{x \text{ مختصات کا فرق}}$
2	4	-	2	1	1	$\frac{2}{1}=2$
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

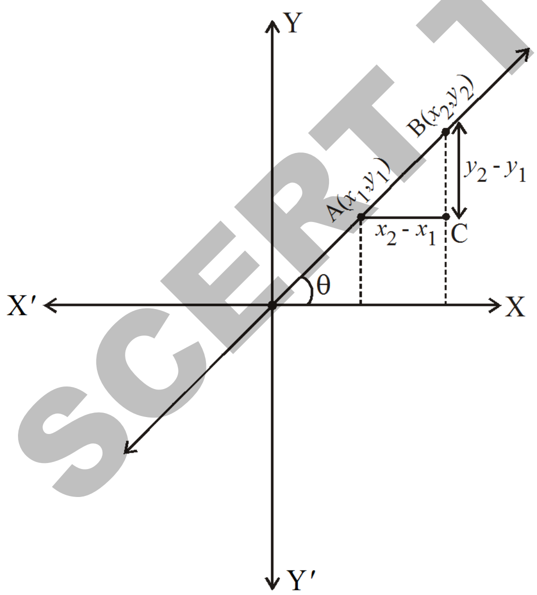
مندرجہ بالا مشغلہ سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

اس لیے y مختصات کا فرق اور x مختصات کی فرق کی نسبت x- محور پر بننے والے زاویہ میں رشتہ پایا جاتا ہے۔

7.9.2 دو مختصات کو ملانے والی خط کا ڈھال Slope of a line joining two points:

اگر $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ خط 'l' پر دو مختصات ہیں۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

$$\text{خط کا ڈھال} = \frac{y\text{- مختص میں فرق}}{x\text{- مختص میں فرق}}$$



$$AB \text{ کا ڈھال } \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ڈھال کو 'm' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ خط 'l' x- محور پر زاویہ 'θ' بناتا ہے

اس طرح خطی قطعہ AB 'AC سے بھی وہی زاویہ 'θ' بناتا ہے۔

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{زاویہ 'θ' کا مقابل کا ضلع}}{\text{زاویہ 'θ' کا متصلہ ضلع}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\text{اس طرح} \quad m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یہ (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) ہوں سے بننے والے خطی قطعہ AB کے ڈھال کا ضابطہ ہے۔

اگر خط x- محور پر زاویہ 'θ' بناتا ہے' تب $m = \tan\theta$

SCERT TELANGANA

مثال-23: ایک خطی قطعہ کے اختتامی نقاط (2, 3) اور (4, 5) ہیں خط کا ڈھال معلوم کیجیے؟

حل: خطی قطعہ کے نقاط (4, 5)‘ (2, 3) ہیں تب ڈھال ہے

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

دیئے گئے خط کی ڈھال = 1

یہ کیجیے

خطی قطعہ $\overline{AB}$ کا ڈھال کیا ہوگا جب کہ خط کے اختتامی نقاط دیئے گئے ہیں؟

1. A(4, -6) B(7, 2)
2. A(8, -4), B(-4, 8)
3. A(-2, -5), B(1, -7)

کوشش کیجیے

خطی قطعہ $\overline{AB}$ پر کا ڈھال معلوم کیجیے۔

1. A(2, 1), B(2, 6)
2. A(-4, 2), B(-4, -2)
3. A(-2, 8), B(-2, -2)
4. دیئے گئے نقاط سے حاصل ہونے والا خطی قطعہ AB محور y- کے متوازی ہیں تصدیق کیجیے آپ ان کے ڈھال کے بارے میں کیا کہیں گے؟ اور کیوں؟

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

نقاط A(3,2) اور B(-8, 2) خط $\overline{AB}$ پر واقع ہیں تب اس کا ڈھال معلوم کیجیے۔

خط $\overline{AB}$ کب x- محور کے متوازی ہے؟ کیوں؟

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

مثال-24: نقاط P(2, 5) اور Q(x, 3) گزرنے والے خط کا ڈھال 2 ہے تب ’x‘ کی قدر معلوم کیجیے۔

یہاں $x_1 = 2,\quad y_1 = 5,\quad x_2 = x,\quad y_2 = 3$

$\overline{PQ}$ ڈھال ہے۔ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-5}{x-2} = \dfrac{-2}{x-2} \Rightarrow \dfrac{-2}{x-2} = 2$

$$\Rightarrow -2 = 2x - 4 \quad \Rightarrow 2x = 2 \quad \Rightarrow x = 1$$

SCERT TELANGANA

مشق - 7.4:

1۔ دیئے گئے نقاط سے گزرنے والے خط کا ڈھال معلوم کیجیے۔

(i) $(5, -2)$ اور $(4, -8)$

(ii) $(0, 0)$ اور $(\sqrt{3}, 3)$

(iii) $(2a, 3b)$ اور $(a, -b)$

(iv) $(a, 0)$ اور $(0, b)$

(v) $A(-1.4, -3.7), B(-2.4, 1.3)$

(vi) $A(3, -2), B(-6, -2)$

(vii) $A\left(-3\frac{1}{2}, 3\right), B\left(-7, 2\frac{1}{2}\right)$

(viii) $A(0, 4), B(4, 0)$

اختیاری مشق Optional Exercise

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ 'Q' دائرہ کا مرکز y- محور پر واقع ہے۔ اور دائرہ نقاط $(0, 7)$ اور $(0, -1)$ سے گزرتا ہے۔ دائرہ مثبت x- محور کو $(P, 0)$ مختص پر قطع کرتا ہے۔ تب 'P' کی قدر معلوم کیجیے۔

2۔ ایک مثلث ΔABC مختصات $A(2, 3)$، $B(-2, -3)$، $C(4, -3)$ سے بنتا ہے۔ A کا زاویے ناصف اور ضلع BC کا نقطہ تقاطع کیا ہوگا؟

3۔ مثلث ΔABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے جس کا ضلع BC x- محور کے متوازی ہے۔ ضلعوں BC، CA اور AB کے ڈھال معلوم کیجیے؟

4۔ ایک قائم الزاویہ مثلث کے دو ضلعے 'a' اور 'b' جہاں پر $a>b$ ہیں، اگر قائمۃ الزاویہ کا ناصف کھینچنے پر حاصل دو چھوٹے مثلثات کے راس سے کھینچے گئے عمود وار (بلندی) کے نقطہ تقاطع کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔ (مختصات کا استعمال کرتے ہوئے کیجیے)

5۔ خط $2x+3y-6=0$ اور محوروں سے مل کر بننے والے مثلث کا مرکز وسطانیہ معلوم کیجیے۔

تجویز کردہ منصوبہ کام:

گرڈ پیپر کے استعمال سے اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو خطی قطعہ کو داخلاً تقسیم کرتا ہے۔

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا۔

1۔ دو نقاط $P(x_1, x_2)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ہے۔

2۔ مبداء سے نقطہ $P(x,y)$ اور کا درمیانی فاصلہ $\sqrt{x^2+y^2}$

3۔ دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_1, y_2) کا درمیانی فاصلہ جو y- محور کے متوازی خط پر واقع ہیں $|y_2 - y_1|$ ہوتا ہے۔

4۔ دو مختصات (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کا درمیانی فاصلہ جو x- محور کے متوازی ہے خط پر واقع ہیں $|x_2 - x_1|$ ہوتا ہے۔

5۔ نقطہ $P(x, y)$ جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خطی قطعہ کو $m_1 : m_2$ کی نسبت میں قطع کرتا ہے مختصات

$$\left[\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right]$$ ہونگے۔

6۔ نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہوتا ہے۔

7۔ وہ مختص جو ہر وسطانیہ کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے مثلث کا مرکز وسطانیہ کہلاتا ہے

8۔ مثلث کا مرکز وسطانیہ وہ نقطہ ہے جہاں پر مثلث کے تینوں وسطانیہ قطع ہوتے ہیں۔ لہٰذا مرکز وسطانی کے راس

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$ ہوں گے۔

9۔ نقاط (x_1, y_1)، (x_2, y_2) اور (x_3, y_3) سے بننے والے مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ضابطہ

$$\frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

10۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ہیرون ضابطہ

$$A=\sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)} \quad \therefore\ S=\frac{a+b+c}{2}$$

(ΔABC کے اضلاع a، b، c ہیں)

11۔ نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزرنے والے خط کا ڈھال معلوم کرنے کا ضابطہ

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

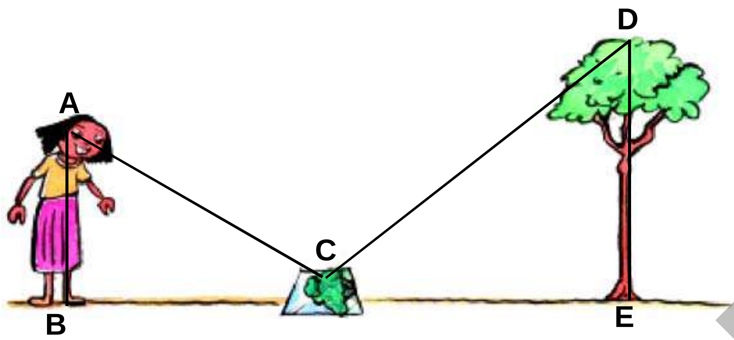
SCERT TELANGANA

باب 8

مشابہہ مثلثات

Similar Triangles

8.1 تعارف



احمد کے مکان کے عقب میں ایک درخت ہے وہ اس کی بلندی معلوم کرنا چاہتا ہے لیکن وہ سوچ رہا ہے کہ اس درخت کی بلندی کیسے معلوم کرے۔اسی دوران اس کے چچا اس کے گھر آتے ہیں۔ احمد ان سے کہتا ہے کہ اس مسئلہ پر اس کی مدد کریں۔وہ کچھ دیر کے لیے سوچتے ہیں اور اس سے کہتے ہیں کہ ایک آئینہ لاؤ۔ وہ درخت سے کچھ فاصلے پر آئینہ رکھتے ہیں اور احمد سے کہتے ہیں کہ وہ آئینہ کے دوسرے جانب کچھ فاصلے پر اس طرح ٹھہر جائے کہ اسکو درخت کی چوٹی آئینے میں نظر آئے۔

شکل کے مطابق ہم لڑکے کی بلندی AB ' آئینہ C اور درخت DE کا خاکہ اوپر کی طرح بناتے ہیں تو ہمیں دو مثلثات ABC اور DEC حاصل ہوتے ہیں۔اب بتایئے کہ آپ ان مثلثات کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ مثلثات مماثل ہیں؟ نہیں! چونکہ ان کی شکلیں ایک جیسی ہے لیکن جسامت مختلف ہیں کیا آپ جانتے ہیں کہ ایک جیسی شکل رکھنے والی جیومٹریائی اشکال کو ہم کیا کہتے ہیں؟ جبکہ یہ شکلیں ضروری نہیں کہ وہ ایک ہی جسامت رکھتی ہوں؟ ایسی اشکال مشابہہ اشکال کہلاتی ہیں۔

کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ درخت کی بلندیاں' پہاڑوں کی بلندی' دور کے اجسام کے فاصلے جیسے زمین سے سورج کا فاصلہ کیوں کر محسوب کیا جاتا ہے؟ کیا آپ سمجھتے ہیں کہ یہ فاصلے ایک پیمائشی ٹیپ کی مدد سے راست طور پر معلوم کئے جا سکتے ہیں؟ حقیقت یہ ہے کہ ایسی بلندیاں اور فاصلے اشکال کی مشابہت کے اُصول کی بنیاد پر بلاواسطہ پیمائش سے معلوم کیے جاتے ہیں۔

8.2 مشابہہ اشکال

(i)

(ii)

(iii)

(i) شکل میں دی گئی کار کا مشاہدہ کیجیے

اگر اس کی چوڑائی وہی رکھتے ہوئے لمبائی دوگنی کر دی جائے تب وہ شکل (ii) کی طرح نظر آئے گی

SCERT TELANGANA

اگر شکل (i) کے مطابق اسکے طول کو وہی رکھ کر چوڑائی دوگنی کردی جائے تو یہ شکل (iii) کی طرح نظر آئے گی۔

شکل (ii) اور شکل (iii) کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں کیسی ہیں۔ کیا یہ شکل (i) جیسی ہیں؟ یہ واضح ہو جاتا ہے کہ اصل شکل بدل دی گئی ہے کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں اشکال مشابہہ ہیں؟ نہیں۔ ان کی صورت ایک جیسی ہے لیکن یہ مشابہہ نہیں ہیں۔

ایک فوٹو گرافر کے بارے میں غور کیجیے جو ایک ہی فلم سے مختلف جسامت کے فوٹو گراف بناتا ہے آپ نے اسٹامپ سائز' پاسپورٹ سائز' اور پوسٹ کارڈ سائز فوٹو کے متعلق سنا ہوگا عام طور پر ایک فوٹو گرافر (فوٹو کھینچنے والا) چھوٹی سی فلم (جیسے کہ 35mm جسامت والی) پر فوٹو کھینچتا ہے اور پھر اس کا بڑا سائز (45mm یا 55mm) بناتا ہے۔ ہمارا یہ مشاہدہ ہے کہ چھوٹی فوٹو کے تمام خطی قطعوں کو 35:45 (35:55) کی نسبت میں بڑا کیا جاتا ہے مزید یہ کہ دو مختلف سائز کے فوٹو میں زاویے مساوی ہوتے ہیں لہذا فوٹو مشابہہ ہیں۔

(i) (ii) (iii)

اسی طرح جیومٹری میں مساوی ضلعوں کی تعداد رکھنے والے دو کثیر ضلعی اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے زاویے مساوی ہوں اور متناظر ضلعے (متناسب) ہوں۔

ایک کثیر ضلعی جس میں تمام ضلعے اور تمام زاویے مساوی ہوں منتظم کثیر ضلعی کہلاتی ہے۔

متناظر اضلاع کی نسبت کو اسکیل فیکٹر یا نمائندہ کسر یا نمائندا اسکیل کہا جاتا ہے۔ روزمرہ زندگی میں عمارتوں کی تعمیر کے لیے ان کا نقشہ ایسی ہی کسی نمائندہ کسر یا نمائندہ اسکیل کی مدد سے بنایا جاتا ہے۔

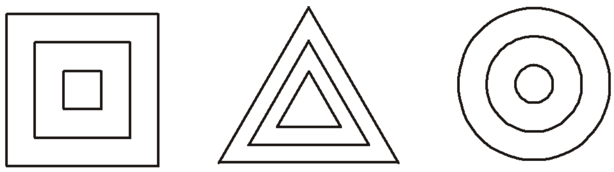
سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے

کیا آپ روزمرہ زندگی کی ایسی چند مثالیں دے سکتے ہیں جہاں کہ ہم نمائندہ اسکیل استعمال کرتے ہیں۔

تمام منتظم کثیر ضلعی اشکال جنکے ضلعوں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے ہمیشہ مشابہہ ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر تمام مربعے مشابہہ ہوتے ہیں' تمام مساوی الاضلاع مثلثات مشابہہ ہوتے ہیں۔ وغیرہ۔ وغیرہ

ایک ہی نصف قطر رکھنے والے دائرے مماثل ہوتے ہیں اور مختلف نصف قطر رکھنے والے دائرے غیر مماثل ہوتے ہیں لیکن چوں کہ تمام دائرے یک جیسی شکل رکھتے ہیں اس لیے وہ مشابہہ ہوں گے۔

ہم کہتے ہیں کہ تمام مماثل اشکال مشابہہ ہوتی ہیں لیکن تمام مشابہہ اشکال کا مماثل ہونا ضروری نہیں ہے۔



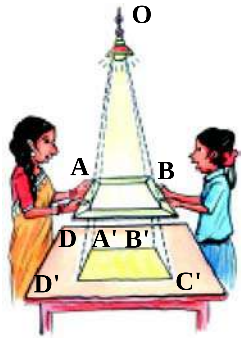
مشابہہ مربعے مشابہہ مساوی الاضلاع مثلث مشابہہ دائرے

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

SCERT TELANGANA

اشکال کی مشابہت کو واضح طور پر سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔

مشغلہ



کمرہ جماعت کے ایک میز کو نصب کردہ منور برقی بلب کے بالکل نیچے رکھئے ایک کثیر ضلعی مثلاً ABCD کو ایک مسطح کارڈ بورڈ سے کاٹیے اور اسکو زمین کے متوازی میز اور برقی گولے کے درمیان رکھئے چار ضلعی ABCD کا سایہ میز پر پڑے گا اب میز پر چار ضلعی کے سایے پر A'B'C'D' کا خاکہ کھینچئے۔

چار ضلعی A'B'C'D' دراصل چار ضلعی ABCD کی توسیعی شکل ہے۔اس کے علاوہ 'A' شعاع '$\overrightarrow{OA}$' پر واقع ہوتا ہے جہاں 'O' برقی گولا ہے اسی طرح 'B' $\overrightarrow{OB}$ پر 'C' $\overrightarrow{OC}$ اور 'D' $\overrightarrow{OD}$ پر واقع ہیں۔ چار ضلعی ABCD اور A'B'C'D' کی شکل ایک جیسی ہے۔لیکن ان کی جسامت مختلف ہے۔

A^1 راس 'A' کے متناظر ہے اور اسکو ہم علامتی طور پر $A \leftrightarrow A^1$ سے تعبیر کرتے ہیں اسی طرح $B \leftrightarrow B^1$ ' $C \leftrightarrow C^1$ ' $D \leftrightarrow D^1$ بھی لکھتے ہیں۔

لیکن زاویے اور ضلعوں کی پیمائش کی مدد سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں۔

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$ اور

اس سے یہ واضح ہوتا ہے کہ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہو مشابہ ہوتے ہیں اگر

(i) تمام متناظر زاویئے مساوی ہو اور

(ii) تمام متناظر ضلعے ایک ہی نسبت میں پائے جاتے ہوں۔

کیا ایک مربع مستطیل کے مشابہ ہوسکتا ہے؟ دونوں اشکال میں متناظر زاویئے مساوی تو ہوتے ہیں لیکن ان کے متناظر اضلاع میں نسبت مساوی نہیں ہوتی ہے۔لہذا مربع کسی مستطیل کے مشابہ نہیں ہوسکتا۔کثیر ضلعی اشکال کے لیے مندرجہ بالا دونوں میں سے ایک شرط کافی نہیں بلکہ دونوں شرائط کا پورا ہونا ضروری ہے۔

سوچیے۔تبادلہ خیال کیجیے

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ مربع اور معین مشابہ ہوں گے؟ اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے اور بتائیے کہ دونوں شرائط کیوں کافی نہیں ہیں۔

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

1۔ خالی جگہوں کو مشابہ/ غیر مشابہ سے پُر کیجیے۔

(i) تمام مربعے ______________ ہوتے ہیں۔

(ii) تمام مساوی الاضلاع مثلثات ______________ ہوتے ہیں۔

(iii) تمام مساوی الساقین مثلثات ______________ ہوتے ہیں۔

(iv) کوئی دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہوٴ ______________ ہوتے ہیں جب کہ ان کے متناظر زاویئے اور اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

(v) کسی شئے کی چھوٹی کی ہوئی اور بڑی کی ہوئی تصاویر ______________ ہوتی ہے۔

(vi) معین اور مربعے ایک دوسرے کے ______________ ہوتے ہیں۔

2۔ حسب ذیل بیان کے لیے صادق/ کاذب لکھئے۔

(i) کوئی دو مشابہہ اشکال مماثل ہوتی ہے،

(ii) کوئی دو مماثل اشکال مشابہہ ہوتی ہیں۔

(iii) دو کثیر ضلعی اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے متناظر زاویئے مساوی ہوں۔

3۔ حسب ذیل کی دو مختلف مثالیں دیجیے۔

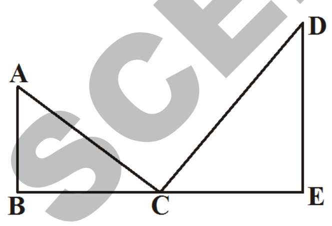
(i) مشابہ اشکال (ii) غیر مشابہ اشکال

8.3 مثلثات کی مشابہت (Similarity of Triangles)

دی ہوئی مثال میں ہم نے دو مثلثات بنائے ہیں یہ مثلثات مشابہت کی خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں ہم جانتے ہیں کہ مثلثات اس وقت مشابہہ ہوتے ہیں اگر ان کے

(i) متناظر زاویئے مساوی ہوتے ہیں (ii) متناظر ضلعے ایک ہی نسبت میں پائے جاتے ہیں

ΔABC اور ΔDEC میں



$\angle A = \angle D\,, \angle B = \angle E\,, \angle ACB = \angle DCE$

اور $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{DC}{AC} = K$ (نمائندہ اسکیل پر)

تب ΔABC، ΔDEC دونوں مشابہہ ہوں گے

علامتی طور پر ہم اس کو یوں لکھیں گے $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

(جہاں علامت '~' کو مشابہہ ہے پڑھا جائے گا)

جیسا کہ ہم نے بیان کیا ہے کہ 'K' نمائندہ اسکیل ہے لہٰذا

اگر $K>1$ ہو تب ہو تو اصل شکل سے بڑی شکل حاصل ہوگی

$K=1$ ہو تب مماثل اشکال حاصل ہوگی

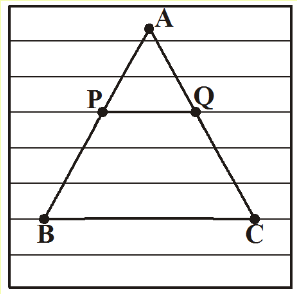
$K<1$ ہو تب اصل اشکال سے چھوٹی اشکال حاصل ہوں گی

SCERT TELANGANA

مزید مثلثات ABC اور DEC میں متناظر زاویے مساوی ہیں ۔اس لیے ان کو مساوی الزاویہ مثلثات کہا جاتا ہے کسی دو مساوی الزاویہ مثلثات میں کوئی دو متناظر اضلاع کی نسبت ہمیشہ مساوی ہوتی ہے اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم تناسبت کے بنیادی مسئلہ استعمال ہوتا ہے اس مسئلہ کو تھیلس کا مسئلہ بھی کہتے ہیں

اس مسئلہ کو سمجھنے کے لیے آیئے پہلے حسب ذیل عملی کام کریں۔

مشغلہ



لکیروں والے کاغذ پر ایک مثلث اس طرح بنائے کہ اس کا قاعدہ کسی ایک لکیر پر ہو (شکل دیکھئے) مثلث ABC کو کئی لکیریں قطع کریں گی ان میں کسی ایک لکیر (خط) کو منتخب کرتے ہوئے ان نقاط کا نام دیجیے جہاں یہ خط ضلع AB اور AC سے ملتا ہو۔فرض کیجیے کہ یہ نقاط P اور Q ہیں۔ $\frac{AP}{PB}$ اور $\frac{AQ}{QC}$ کی نسبت معلوم کیجیے۔آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟

یہ نسبت مساوی ہوں گی ۔کیوں؟ کیا یہ ہمیشہ صحیح ہوتا ہے؟ مثلث کو قطع کرنے والی مختلف خطوط سے یہ تجربہ دوہرایئے۔ہم یہ جانتے ہیں کہ کاغذ پر تمام خطوط متوازی ہوتے ہیں ہم یہ پائیں گے کہ ہر دفعہ نسبتیں مساوی ہوں گی۔

اس لیے ΔABC میں اگر $PQ \| BC$ تب $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$

یہ تناسبت کے بنیادی مسئلہ کا نتیجہ کہلاتا ہے۔

8.3.1 تناسب کا بنیادی مسئلہ (تھیلس کا مسئلہ)

مسئلہ 8.1: اگر کسی مثلث میں ایک خط کسی ضلع کے متوازی اس طرح کھینچا جائے کہ یہ باقی دو ضلعوں کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو یہ خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرے گا۔

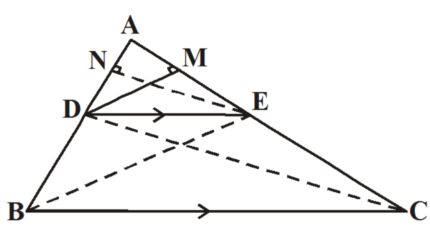
دیا گیا ہے کہ: ΔABC میں $DE \| BC$ اور خط DE اضلاع AB اور AC کو ترتیب وار نقاط D اور E پر قطع کرتی ہے۔

مطلوب: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

بناوٹ: B, E اور C, D کو ملایئے اور $DM \perp AC$ اور $EN \perp AB$ بنایئے۔

ثبوت: ΔADE کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔBDE کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times BD \times EN$



SCERT TELANGANA

اس لیے $\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times EN}{\frac{1}{2}\times BD\times EN} = \frac{\text{کارقبہ }(\Delta ADE)}{\text{کارقبہ }(\Delta BDE)}$ -----(1)

دوبارہ ΔADE کارقبہ $= \frac{1}{2}\times AE\times DM$

ΔCDE کارقبہ $= \frac{1}{2}\times EC\times DM$

$$\frac{(\Delta ADE)}{(\Delta CDE)} = \frac{\frac{1}{2}\times AE\times DM}{\frac{1}{2}\times EC\times DM} = \frac{AE}{EC} \text{ -----(2)}$$

غور کیجیے کہ ΔBDE اور ΔCDE ایک ہی قاعدہ DE پر واقع ہیں اور متوازی خطوط کے ایک ہی جوڑ BC اور DE کے درمیان ہیں۔

اس لیے $(\Delta BDE) = (\Delta CDE)$ ...(3)

مساوات (1)‘(2) اور (3) سے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ثابت کیا گیا۔

کیا اس مسئلہ کا برعکس بھی صادق ہوگا؟ یہ جانچنے کے لیے آیئے ذیل کا عملی کام کریں۔

مشغلہ

اپنی نوٹ بک پر زاویہ XAY بنایئے اور شعاع AX پر نقاط B_1‘B_2‘B_3‘B_4 اور B کی اس طرح نشاندہی کیجیے کہ یہ بالترتیب مساوی فاصلہ پر ہوں۔

(فرض کیجیے کہ) $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1cm$

اسی طرح شعاع AY پر نقاط C1‘C2‘C3‘C4 اور C کی اس طرح نشاندہی کیجیے کہ یہ

(فرض کیجیے کہ) $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C = 2\text{ cm}$

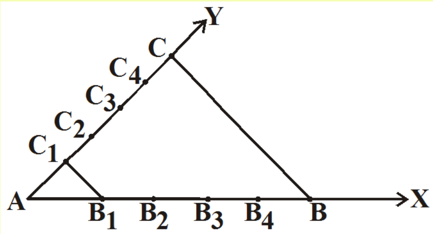
B1‘C1 اور C,B کو ملایئے

غور کیجیے کہ

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$ اور

SCERT TELANGANA

اسی طرح B_2C_2، B_4C_4 اور B_4C_4 کو ملانے پر آپ دیکھیں گے کہ



$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ اور $B_2C_2 \parallel BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ اور $B_3C_3 \parallel BC$

$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ اور $B_4C_4 \parallel BC$

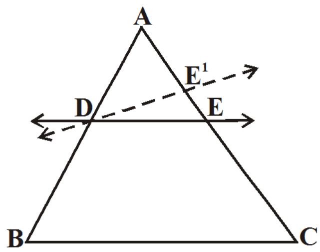
جانچئے کیا $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3 \parallel B_4C_4 \parallel BC$

اس سے ہمیں ذیل کا مسئلہ حاصل ہوتا ہے جو تھیلس کے مسئلہ کا برعکس مسئلہ کہلاتا ہے۔

مسئلہ 8.2: اگر کسی مثلث میں ایک خط اس کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

دیا گیا ہے کہ: ΔABC میں ایک خط DE اس طرح کھینچا گیا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

مطلوب: $DE \parallel BC$



ثبوت: فرض کیجیے کہ DE متوازی نہیں ہے BC کے۔ تب BC کے متوازی ایک خط DE^1 کھینچیے

اس لیے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

$\therefore \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

مندرجہ بالا مساوات میں دونوں جانب 1 جمع کرنے پر، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ E اور E' ایک دوسرے سے منطبق ہوں (کیوں؟)

کوشش کیجیے

1۔ ΔPQR میں بالترتیب اضلاع PQ اور PR پر نقاط E اور F ہیں۔ ذیل میں سے ہر ایک کے لیے بیان کیجیے کہ $EF \parallel QR$ یا نہیں۔

(i) PE=3.9 سمر EQ=3 سمر PF=3.6 سمر اور FR=2.4 سمر

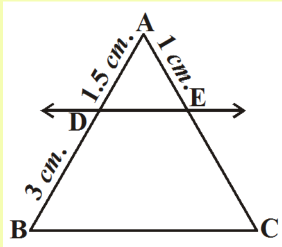
(ii) PE=4 سمر، QE=4.5 سمر PF=8 سمر اور RF=9 سمر

(iii) PQ=1.28 سمر، PR=2.56 سمر، PE=1.8 سمر اور PF=3.6 سمر

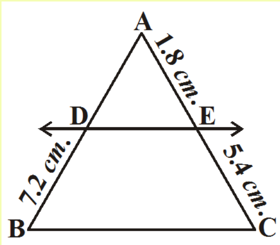
SCERT TELANGANA

2۔ ذیل کی اشکال میں DE||BC

(i) EC معلوم کیجیے۔

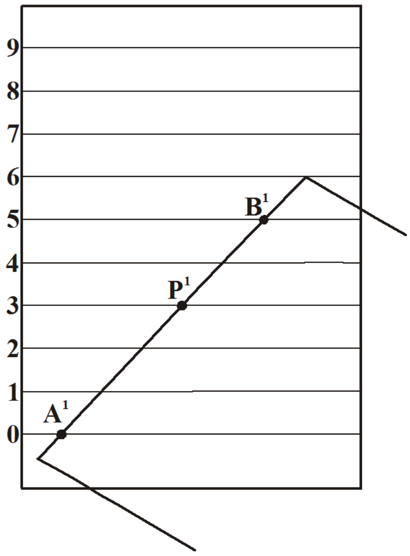


(ii) AD معلوم کیجیے



بناوٹ: خطی قطعہ کی تقسیم (تھیلس کے مسئلہ کے استعمال سے)

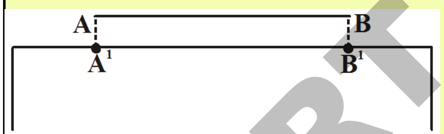
عائشہ نے ایک خطی قطعہ کھینچا۔ وہ اس خط کو 3:2 کی نسبت میں تقسیم کرنا چاہتی ہے۔ اس نے اسکیل کی مدد سے اس خط کی پیمائش کی اور مطلوبہ نسبت میں تقسیم کر دیا۔ اسی اثناء میں اس کی بڑی بہن وہاں پہونچی۔ بڑی بہن نے عائشہ کو مشورہ دیا کہ خطی قطعہ کو ناپے بغیر اسے 3:2 کی نسبت میں تقسیم کرے۔ عائشہ حیران ہوئی اور بہن سے کہا کہ اس کی مدد کرے۔ بڑی بہن نے عائشہ کو سمجھایا ذیل کے عملی کام کے ذریعہ آپ بھی کر سکتے ہیں۔



مشغلہ

لائنوں والی نوٹ بک سے ایک کاغذ نکالئے۔ صفحہ کے نیچے کی لائن کو 'O' سے شروع کرتے ہوئے لائنوں کو ....1,2,3 نمبرات دیجیے،

ایک موٹا کارڈ بورڈ پیپر لیجیے (یا فائل کارڈ یا چارٹ کی چوڑی پٹی) اور اسے خطی قطعہ AB پر رکھئے اور اسکی لمبائی کو کارڈ پر نشان لگایئے

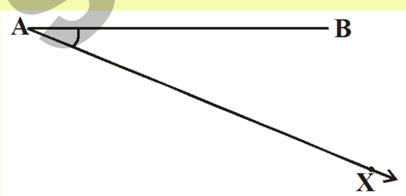


فرض کیجیے کہ A اور B کے متناظر نقاط فائل کارڈ پر 'A اور 'B ہیں۔

اب 'A کو لائن والے کاغذ کی صفری لائن پر رکھتے ہوئے کارڈ بورڈ کو نقطہ 'A پر اس طرح گھمایئے کہ 'B پانچویں لائن پر آ جائے۔ یعنی (3+2)ویں لائن

اس نقطہ پر نشان P1 لگائے جہاں تیسری لائن کارڈ کو چھوتی ہو۔ اب دوبارہ کارڈ کو دی ہوئی لائن کے متوازی رکھئے اور نقطہ P1 کو منتقل کیجیے اور 'P' سے ظاہر کیجیے لہذا Pl وہ نقطہ ہوگا جو ہمیں مطلوب ہے اور جو دیئے ہوئی خطی قطعہ کو 3:2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

آیئے اب یہ سیکھیں گے کہ یہ بناوٹ کس طرح کیجاتی ہے۔



ایک خطی قطعہ AB دیا گیا ہے

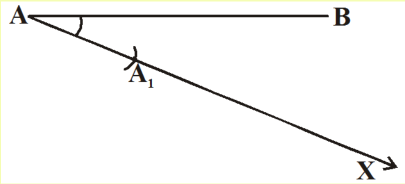
ہم اسے m:n کی نسبت میں تقسیم کرنا چاہیں گے (m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں)

آیئے m=3 اور n=2 لیں

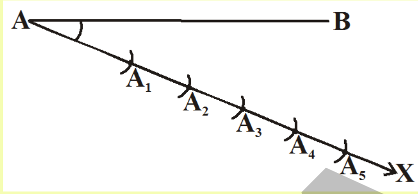
مراحل

1: A سے ایک شعاع AX اس طرح کھینچئے کہ یہ AB سے زاویہ حادہ بناتی ہو۔

SCERT TELANGANA



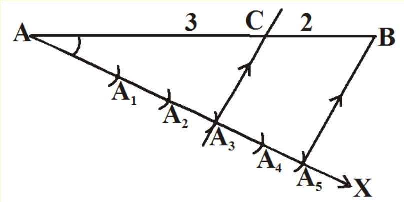
2۔ A کومرکز مان کرAXپر کسی بھی طول سے ایک قوس کھینچئے اور نقاط A1 کی نشاندہی کیجیے۔



3۔ پر کار کی اسی دوری سے A1 کو مرکز مانتے ہوئے ایک اورقوس کھینچئے اور A2 کی نشاندہی کیجیے

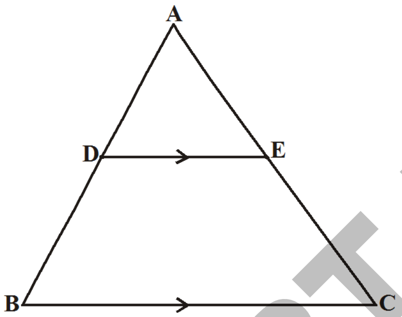
4۔ اسی طرح 5نقاط $(m+n=5)$ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 کی نشاندہی کیجیے

اس طرح کہ $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$



5۔ A_5B کوملائیے۔اب نقطہ A_3 $(m = 3)$ سے ایک خط A_5B کے متوازی ($\angle A\ A_5\ B$ کے مساوی زاویہ بناتے ہوئے) اس طرح کھینچئے کہ جو AB کو C پر قطع کرتی ہواور مشاہدہ کیجیے کہ $AC : CB = 3 : 2$

آپ ہم تھیلس کے مسئلہ اور اسکے برعکس مسئلہ پر چند مثالیں حل کریں گے۔



مثال-1: مثلث ABC میں, DE||BC اور $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$.

AC=5.6 ہوتو AE معلوم کیجیے

حل: ΔABC میں DE||BC

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{BPT}\ \text{سے})$$

لیکن $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ اس لیے $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

دیا گیا ہے کہ $AC = 5.6$ اور $AE : EC = 3 : 5$

$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5} \quad (\text{ضرب چلیپائی سے})$$

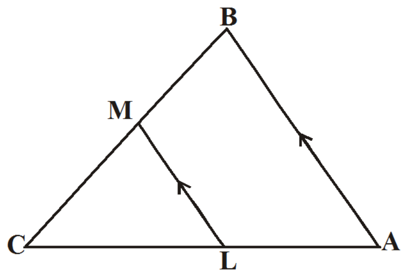
$$\frac{AE}{5.6 - AE} \qquad \frac{3}{5} (\text{ضرب چلیپائی})$$

$$5AE = (3\ 5.6) - 3AE$$

$$8AE = 16.8$$

$$AE = \frac{16.8}{8} = 2.1cm.$$

SCERT TELANGANA



مثال-2: دی ہوئی شکل میں LM||AB

$AL = x - 3,\ \ AC = 2x,\ \ BM = x - 2$

اور $BC = 2x + 3$ ہوتو x کی قدر معلوم کرو؟

حل: ΔABC میں LM||AB

$$\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{BM}{MC}$$ (B.PT) کی رو سے

$$\frac{x-3}{2x-(x-3)} = \frac{x-2}{(2x+3)-(x-2)}$$

$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+5}$$ ضرب چلیپائی سے

$$(x - 3)\,(x + 5) = (x - 2)\,(x + 3)$$

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + x - 6$$

$$\Rightarrow\ 2x - x = -6 + 15$$

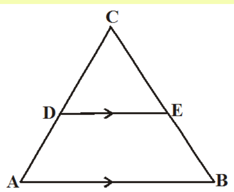
$$x = 9$$

کوشش کیجیے

1۔ دی ہوئی شکل میں x کی کونسی قیمت (قیمتوں) کے لیے DE||AB ہوجائے گا۔

$AD = 8x + 9,\ \ CD = x + 3$

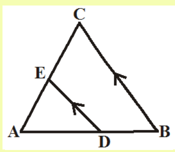
$BE = 3x + 4,\ CE = x$



2۔ ΔABC میں DE||BC، $AD = x,\ DB = x - 2$

$EC = x - 1$ اور $AE = x + 2$

x کی قدر معلوم کیجیے۔



مثال-3: ایک چارضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ تب ثابت کیجیے کہ

ABCD ایک منحرف ہے۔

حل: دیا گیا ہے ABCD ایک چارضلعی میں $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

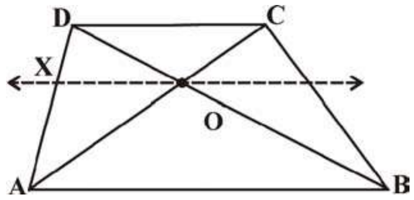
مطلوب: ABCD ایک منحرف ہے

بناوٹ: 'O' سے AB کے متوازی ایک خط اس طرح کھینچیے جو DA کو X پر قطع کرتا ہے

ثبوت: ΔDAB میں XO||AB (بناوٹ سے)

$$\frac{DX}{XA} = \frac{DO}{OB}\ \Rightarrow$$ (متناسبت کے بنیادی مسئلہ کی رو سے)

SCERT TELANGANA



$$\frac{AX}{XD}=\frac{BO}{OD} \quad ....(1)$$

$$\frac{AO}{BO}=\frac{CO}{DO}$$ (دیا گیا ہے)

$$\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{OD} \quad ....(2)$$

(1)اور (2) کی رو سے $\frac{AX}{XD}=\frac{AO}{CO}$

ΔADC میں XO ایک خط اس طرح ہے کہ $\frac{AX}{XD}=\frac{AO}{OC}$

$\Rightarrow XO||DC$ (متناسبت کا بنیادی مسئلہ کا برعکس)

$\Rightarrow AB||DC$

چار ضلعی ABCD میں $AB||DC$

$\Leftarrow$ ABCD ایک منحرف ہے (تعریف سے)

لہذا ثابت ہوا

مثال-4: ایک منحرف ABCD میں $AB||DC$ نقاط E اور F غیر متوازی اضلاع AD اور BC پر اس طرح واقع ہیں کہ $EF||AB$

ثابت کیجیے $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$

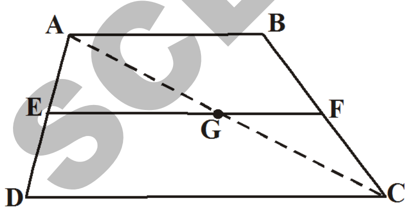
حل: A,C کو اس طرح ملایئے کہ EF کو G پر قطع کرے

$AB||DC$ اور $EF||AB$ (دیا گیا ہے)

$\Rightarrow EF||DC$ (ایک خط کے متوازی خطوط' ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں)

ΔADC میں $EG||DC$

اس لیے (1)...... $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (متناسب کا بنیادی مسئلہ کی رو سے)



اسی طرح مثلث CAB میں $GF||AB$

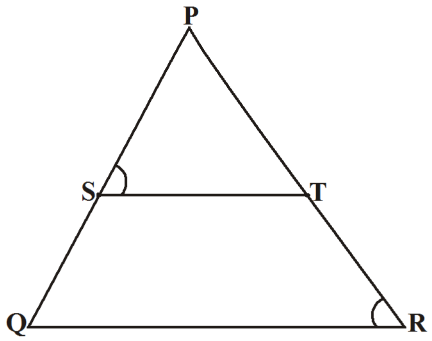
$\frac{CG}{GA}=\frac{CF}{FB}$ (متناسبت کا بنیادی مسئلہ کی رو سے)

یعنی (2).......... $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$

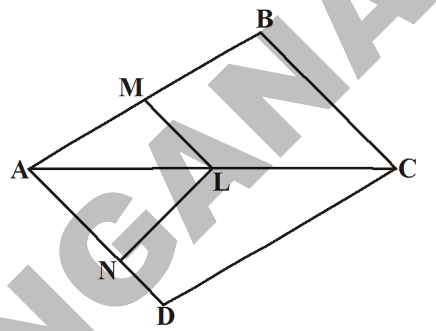
(1)اور (2) کی رو سے $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$

SCERT TELANGANA

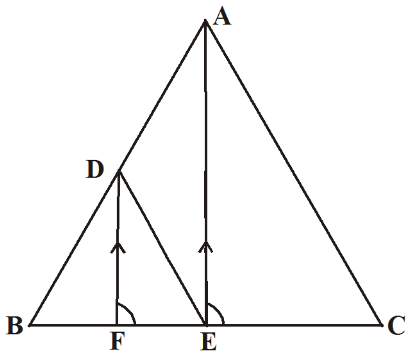
مشق - 8.1



1۔ مثلث PQR میں ST ایک خط ہے اس طرح کہ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ اور مزید $\angle PST = \angle PRQ$ ۔ثابت کیجیے کہ ΔPQR ایک مثلث مساوی الساقین ہے۔



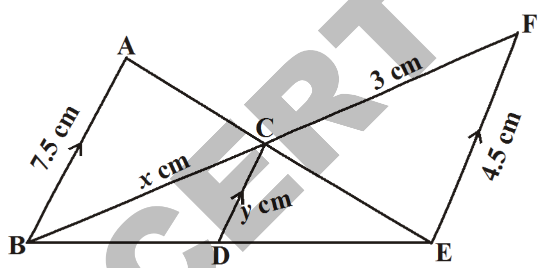
2۔ دی گئی شکل میں LM||CB اور LN||CD ثابت کیجیے کہ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$



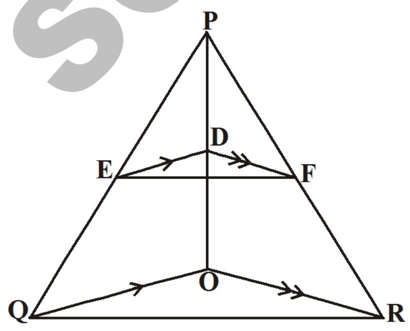
3۔ دی گئی شکل میں DE||AC اور DF||AE ثابت کیجیے کہ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

4۔ ثابت کیجیے کہ مثلث کے ایک ضلع کے نقطہ وسطی سے دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا گیا خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔(متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے)

5۔ ثابت کیجیے کہ مثلث کے کوئی دو ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والا خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔(متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے استعمال سے)

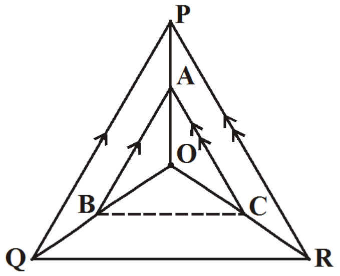


6۔ دی گئی شکل میں AB||CD||EF دیا گیا ہے کہ AB = 7.5cm، DC = y cm، EF = 4.5cm، BC = x cm، x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔



7۔ دی گئی شکل میں DE||OQ اور DF||OR بتلایئے کہ EF||QR

SCERT TELANGANA



8۔ متصلہ شکل میں نقاط A ‘B‘ اور C بالترتیب OP ‘OQ اور OR پر تین نقاط ہیں۔ کہ

AB||PQ اور AC||PR ثابت کیجیے کہ BC||QR

9۔ ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB||DC اور اس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ ’O‘ پر قطع کرتے ہیں ثابت کیجیے کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

10۔ ایک خطی قطعہ کھینچئے جس کی لمبائی 7.2 ہو اور اسے 5:3 کی نسبت میں تقسیم کیجیے دونوں حصوں کی پیمائش کیجیے۔

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے

اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے کہ مثلثات کی مشابہت، دیگر کثیر ضلعی کی مشابہت سے کس طرح مختلف ہے؟

8.4 مثلثات کی مشابہت کا پیمانہ/ معیار

ہم جانتے ہیں کہ دو مثلثات اس وقت مشابہہ ہوں گے جب ان کے متناظر زاویئے مساوی ہوں اور متناظر اضلاع متناسب ہوں۔ کوئی مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے ہم متناظر زاویوں کے مساوی ہونے اور متناظر اضلاع کی نسبت کے مساوی ہونے کی جانچ کریں گے۔ دو مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے آیئے کسی معیار کے قائم کرنے کی کوشش کریں گے۔ آیئے مندرجہ ذیل عملی کام انجام دیں۔

مشغلہ

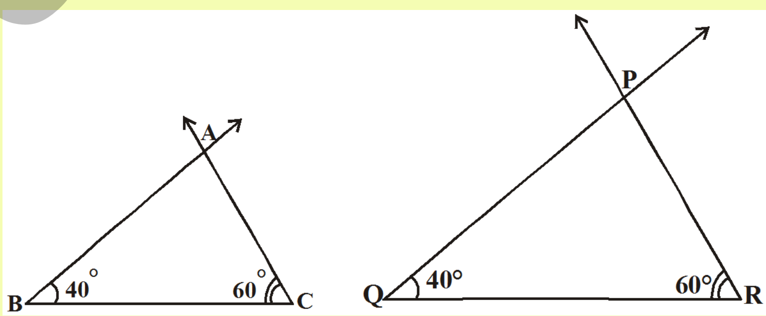
مثلثات بنانے کے لیے چاندے اور پٹری کا استعمال کریں اس طرح کہ ہر مثلث میں 40^{o} اور 60^{o} کے زاویئے ہوں۔

اپنی بنائی ہوئی اشکال کی جانچ کہ تیسرے زاویے کی پیمائش کے ذریعہ کیجیے۔

یہ 80^{o} ہونا چاہیے (کیوں؟)

مثلثات کے ضلعوں کی پیمائش کیجیے اور ان کے متناظر اضلاع کی نسبتوں کو محسوب کیجیے

کیا یہ مثلثات مشابہہ ہیں؟

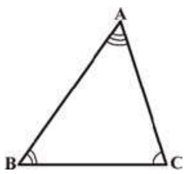


اس عملی کام سے ہمیں دو مثلث

SCERT TELANGANA

8.4.1 مثلثات کی مشابہت کے لیے AAA معیار

مسئلہ 8.3: دو مثلثات میں اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہوں گے اور یہ دو مثلثات مشابہہ ہوں گے۔



دیا گیا ہے کہ مثلثات ABC اور DEF میں

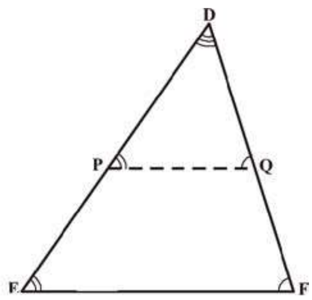
$\angle A=\angle D$ اور، $\angle B = \angle E$ ، $\angle C=\angle F$

مطلوب: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

بناوٹ: فرض کرو کہ DE>AB، DE اور DF پر بالترتیب نقاط P اور Q لیجیے اس طرح کہ AB=DP اور AC=DQ، PQ کو ملائیے۔

ثبوت: $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

اس حاصل ہوتا ہے۔ $\angle B = \angle P = \angle E$ اور $PQ \| EF$ (کسطرح؟)



$\therefore \dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (کیوں؟)

یعنی $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (کیوں؟)

اسی طرح $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ اور اس لیے $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$.

لہذا ثابت ہوا

نوٹ: اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تب (مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت کی روسے) تیسرا زاویہ یہ بھی مساوی ہوگا۔

اس لیے AA مشابہت کے معیار کو اس طرح بیان کیا گیا ہے کہ ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے۔

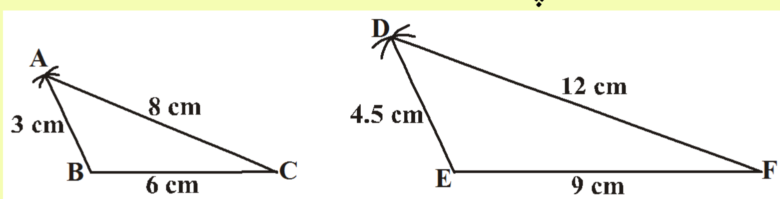
مذکورہ بالا بیان کے برعکس بیان کے متعلق آپ کی کیا رائے ہے؟

اگر ایک مثلث کے اضلاع ترتیب وار ایک دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں تو یہ درست ہوگا کہ ان کے متناظر زاویے بھی مساوی ہوں گے۔

آیئے اسے ایک عملی کام سے سمجھنے کی کوشش کریں۔

مشغلہ

دو مثلثات ABC اور DEF اس طرح کھینچیے کہ AB=3 سمر، BC=6 سمر، CA =8 سمر، DE=4.5 سمر، EF =9 سمر اور FD=12 سمر



SCERT TELANGANA

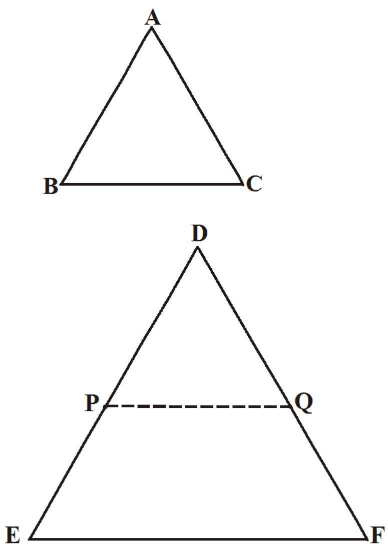
اس لیے ہمارے ہاں $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{2}{3}$.

اب دونوں مثلثوں کے زاویوں کی پیائش کیجیے آپ نے کیا مشاہدہ کیا۔متناظر زاویوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ یہ مساوی ہیں اس لیے مثلثات مشابہہ ہوں گے اس بات کی آپ تصدیق مختلف مثلثات سے کر سکتے ہیں۔

مذکورہ بالا عملی کام سے ہم مثلثات کی مشابہت کا حسب ذیل معیار قائم کر سکتے ہیں۔

8.4.2 ضلع ضلع ضلع مشابہت کا معیار

مسئلہ 8.4: اگر کوئی دو مثلثات میں ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع سے تناسب میں ہوں تو ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں گے۔اور تب یہ مثلثات مشابہہ ہوں گے۔



دیا گیا ہے کہ ΔABC اور ΔDEF اس طرح ہیں کہ

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}\quad(<1)$$

مطلوب: $\angle A=\angle D$ ، $\angle B=\angle E$ ، $\angle C=\angle F$

بناوٹ: فرض کرو کہ: DE>AB اور DE DF پر بالترتیب P اور Q کے نقاط اس طرح لیجیے کہ AB=DP اور AC=DQ ہوں، PQ کو ملائیے۔

ثبوت: $\frac{DP}{PE}=\frac{DQ}{QF}$ اور PQ||EF (کیوں؟)

اس لیے $\angle Q=\angle F$ اور $\angle P=\angle E$ (کیوں؟)

$$\therefore\ \frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{PQ}{EF}$$ اس لیے

$$\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{BC}{EF}$$ (کیوں؟)

اس لیے BC=PQ (کیوں؟)

$\Delta ABC\cong\Delta DPQ$ (کیوں؟)

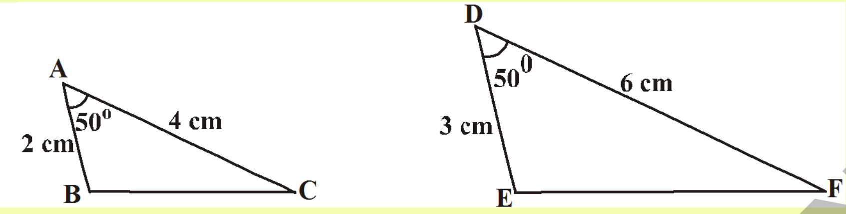
اس لیے $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ اور $\angle C=\angle F$ (کیسے؟)

ہم نے دیکھا کہ دو کثیر ضلعی کی مشابہت کے لیے کوئی ایک شرط کافی نہیں ہے لیکن مثلثات کی مشابہت کے لیے دونوں شرائط کی تکمیل ضروری نہیں چونکہ ایک شرط از خود دوسری شرط کو پورا کر دیتی ہے۔اب ہم SAS مشابہت کے معیار پر غور کریں گے اس کے لیے آیئے حسب ذیل عملی کام انجام دیں۔

SCERT TELANGANA

مشغلہ

دو مثلثات ABC اور DEF اس طرح بنایئے کہ AB=2 سمر ، $\angle A=50^\circ$ ، AC=4 سمر ، DE=3 سمر ، $\angle D=50^\circ$ اور DF=6 سمر



مشاہدہ کیجیے کہ

$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{2}{3}$ اور $\angle A=\angle D=50^\circ$

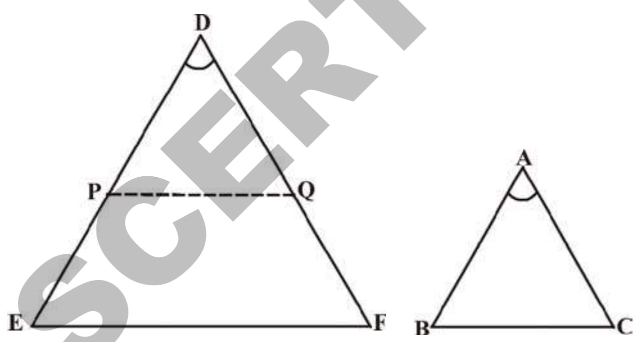
اب $\angle B,\angle C,\angle E,\angle F$ کی پیمائش کیجیے اور BC اور EF کی بھی پیمائش کیجیے۔

غور کیجیے کہ $\angle B=\angle E$ اور $\angle C=\angle F$ اس کے علاوہ. $\frac{BC}{EF}=\frac{2}{3}$

اس لیے دو مثلثات مشابہہ ہوں گے اس مشغلہ کو مختلف پیمائشات کی مثلثات کے لیے دوہرایئے جس سے آپ کو مثلثات کی مشابہت کا حسب ذیل معیار معلوم ہوگا۔

8.4.3 مثلثات کے مشابہت کے لیے SAS معیار

مسئلہ 8.5: اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویے کے مساوی ہو اور اس زاویہ کو گھیرنے والے ضلع متناسب ہوں تو دو مثلثات مشابہہ ہوں گے۔



دیا گیا ہے: $(<1)\ \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ اور $\angle A=\angle D$

مطلوب: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

بناوٹ: DE اور DF پر دو نقاط P اور Q اس طرح لیجیے کہ AB=DP اور AC=DQ ، PQ کو ملایئے۔

ثبوت: $PQ \parallel EF$ اور $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیسے؟)

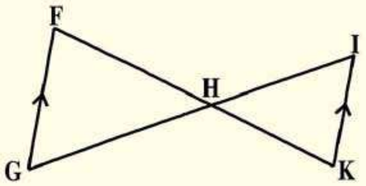
اس لیے $\angle A=\angle D\ ,\ \angle B=\angle P\ ,\ \angle C=\angle Q$

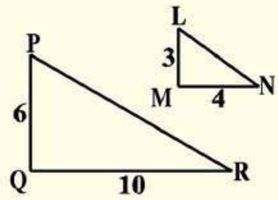
$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (کیوں؟)

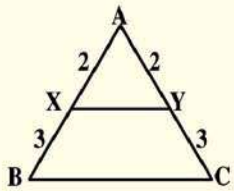
SCERT TELANGANA

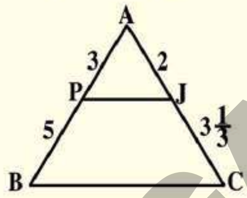
کوشش کیجیے

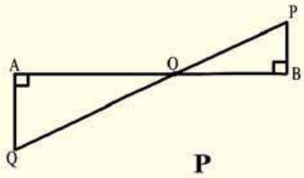
1۔ کیا یہ مثلثات مشابہ ہیں؟ اگر مشابہ ہیں بتایئے اور مشابہت کی کس خصوصیت کے تحت مشابہ ہیں مشابہت کے رشتہ کو علامتی شکل میں لکھیے۔

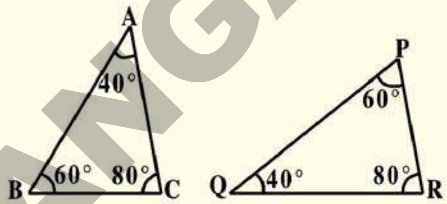
(i)


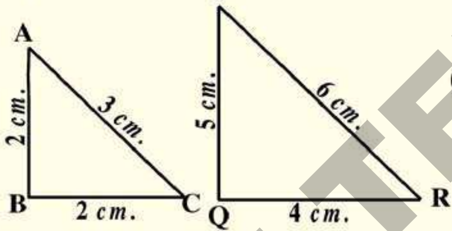
(ii)


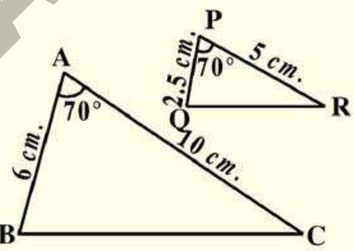
(iii)


(iv)


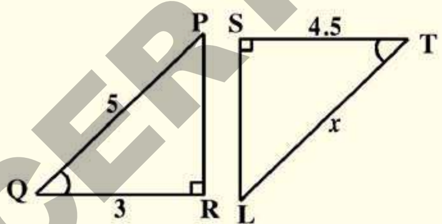
(v)


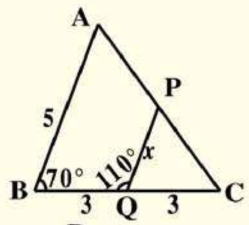
(vi)


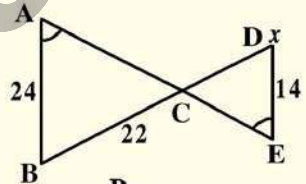
(vii)


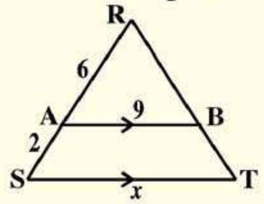
(viii)


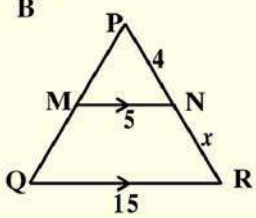
2۔ اگر مثلثات کے جوڑ مشابہ ہیں تب x کی قدر کی معلوم کیجیے۔

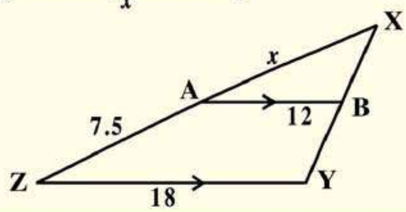
(i)


(ii)


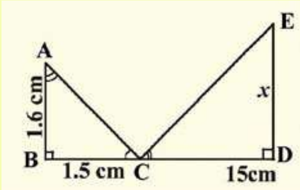
(iii)


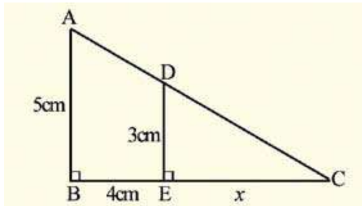
(iv)


(v)


(vi)


SCERT TELANGANA

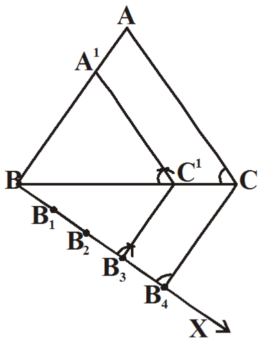
(VII)


(VIII)


بناوٹ: دیئے گئے نمائندہ پیمانہ (اسکیل فیاکٹر) کے مطابق دیئے ہوئے مثلث کی مشابہہ مثلث بنانا

a) دیئے گئے مثلث ABC کے مشابہہ مثلث بناؤ جس کے ضلع، ΔABC کے متناظر اضلاع کے $\frac{3}{4}$ کے مساوی ہوں

(اسکیل فیاکٹر $\frac{3}{4}$)



مرحلے :1 راس A کے مخالف ضلع BC کے ساتھ زاویہ حادّہ بناتے ہوئے ایک شعاع BX کھینچیے۔

:2 BX پر چار نقاط Bx، B_2، B_3 اور B_4 کے اس طرح کھینچیے کہ

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$$

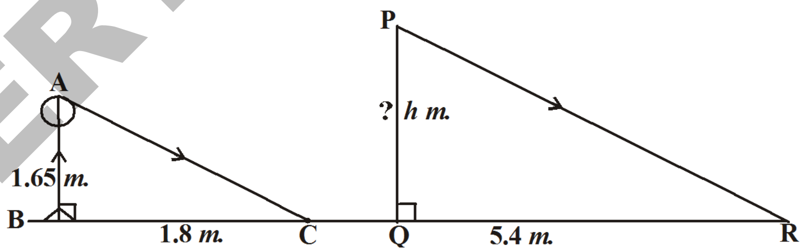
:3 B_4C کو ملایئے اور B_3 سے ایک خط کھینچیے جو B_4C کے متوازی ہو جو BC کو C' پر قطع کرتا ہو،

:4 C' سے ایک خط کھینچیے جو CA کے متوازی ہو اور AB کو A' پر قطع کرے۔

اس لیے $\Delta A'BC'$ ایک مطلوبہ مثلث ہے۔

آیئے ان اصولوں کی وضاحت کے لیے بعض مثالوں پر غور کریں۔

مثال-5: ایک آدمی کا قد 1.65 میٹر ہے جبکہ زمین پر اس کا سایہ 1.8 میٹر پڑتا ہے اسی وقت ایک قندیل کے کھمبے کا سایہ 5.4 میٹر حاصل ہوتا ہے بتایئے کہ اس کھمبے کی لمبائی کیا ہے۔



حل: ΔABC اور ΔPQR میں

$\angle B = \angle Q = 90o$

$\angle CAC || PR = \angle R$ (کسی بھی وقت سورج کی تمام شعاعیں متوازی ہوتی ہیں)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (AA مشابہت سے)

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (مشابہہ مثلثات متناسب ضلع)

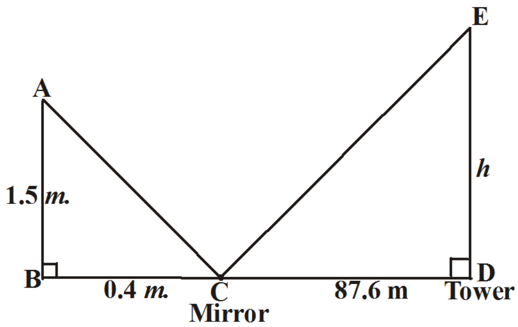
SCERT TELANGANA

$$\frac{1.65}{PQ} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$PQ = \frac{1.65 \times 5.4}{1.8} = 4.95m$$

کھمبے کی لمبائی 4.95 میٹر ہے۔

مثال-6: ایک آدمی 87.6 میٹر کے فاصلے سے ایک ٹاور کو آئینے میں دیکھتا ہے۔ آئینہ زمین پر رکھا ہوا ہے۔ اگر آدمی آئینے سے 0.4 میٹر کے فاصلے پر ہو اور اس کا قد 1.5 میٹر ہو تو بتاؤ کہ ٹاور کتنا لمبا ہے؟



حل: ΔABC اور ΔEDC میں

$\angle ABC = \angle EDC = 90°$

$\angle BCA = \angle DCE$ (زاویۂ وقوع اور زاویہ انعکاس متماثل ہوتے ہیں)

$\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA مشابہت)

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1.5}{h} = \frac{0.4}{87.6}$$

$$h = \frac{1.5 \times 87.6}{0.4} = 328.5m$$

اس لیے ٹاور کی لمبائی 328.5 میٹر ہے۔

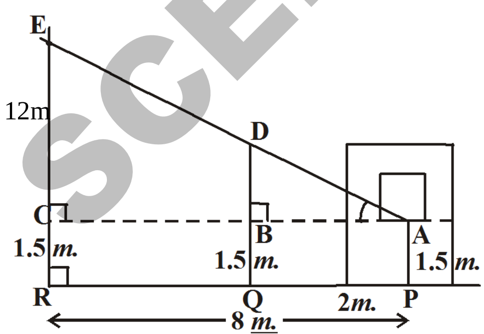
مثال-7: ندیم کو اس بات پر الجھن ہے کہ اس کا پڑوسی اپنی چھت سے ندیم کے کمرے میں دیکھ سکتا ہے۔ اس نے اپنی چھت کی کھڑکی سے ہونے والی بے پردگی کو ختم کرنے کے لیے دیوار اونچی کرنے کا فیصلہ کیا۔ دیوار کی اونچائی کیا ہونی چاہیے۔

حل: ΔABD اور ΔACE میں

$\angle B = \angle C = 90^o$

$\angle A = \angle A$ (مشترکہ زاویہ)

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (زاویہ زاویہ مشابہت)



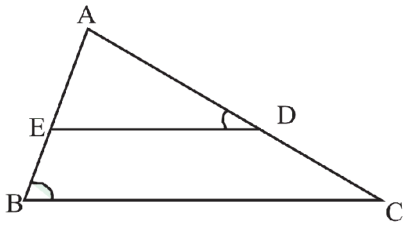
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BD}{1.2}$$

$$BD = \frac{2 \times 1.2}{8} = \frac{2.4}{8} = 0.3m$$

حصار بندی کی دیوار کی مطلوبہ بلندی 1.5+0.3=1.8m ہوگی۔ میٹر تاکہ پڑوسی کے نظارہ کو روکا جاسکے

SCERT TELANGANA

مشق 8.2

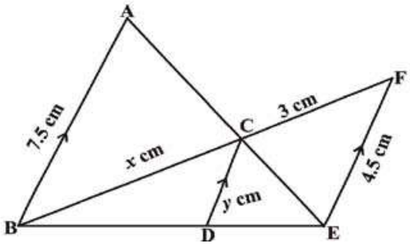


1۔ دی ہوئی شکل میں $\angle ADE = \angle B$

(i) بتائیے کہ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

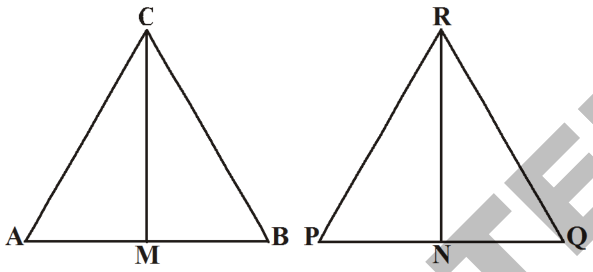
(ii) اگر $AD=3.8$ سمر، $AE=3.6$ سمر، $BE=2.1$ سمر، $BC=4.2$ سمر ہوتو DE معلوم کیجیے

2۔ دو مشابہ مثلثات کے احاطے ترتیب وار 30 سمر اور 20 سمر ہیں۔ اگر پہلے مثلث کا ایک ضلع 12 سمر ہوتو دوسرے مثلث کا متناظر ضلع معلوم کیجیے؟



3۔ دی گئی شکل میں $AB \| CD \| EF$ اور دیا گیا ہے۔ $AB=7.5$ سمر، $DC=y$ سمر، $EF=4.5$ سمر، $BC=x$ سمر تب x اور y کی قدریں معلوم کیجیے۔

4۔ 90 سمر قد کی ایک لڑکی قندیل کے کھمبے سے 12 میٹر فی سکنڈ کی رفتار سے دور ہورہی ہے۔ اگر قندیل کے کھمبے کی اونچائی 3.6 میٹر ہوتو 4 سکنڈ بعد لڑکی کے سایہ کی لمبائی کیا ہوگی؟

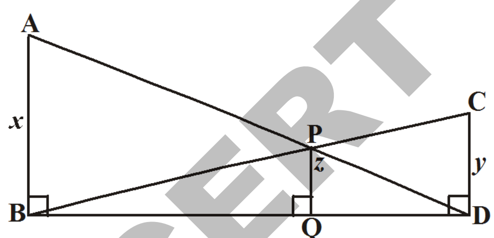


5۔ CM اور RN بالترتیب دو مثلثات ΔABC اور ΔPQR کے وسطانیے ہیں اور $\Delta ABC \sim \Delta PNR$ تو ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



6۔ منحرف ABCD کے وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ جبکہ $AB \| OC$۔ دو مثلثات کی مشابہت کے اصول سے ثابت کیجیے کہ $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$

7۔ دی ہوئی شکل میں AB، CD اور PQ، BD کے عمود ہیں جبکہ $AB=x$، $CD=y$ اور $PQ=z$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

8۔ 6 میٹر بلند ایک جھنڈے کے کھمبے کا 6 میٹر لمبا سایہ حاصل ہوتا ہے اسی وقت قریب کی ایک عمارت کا سایہ 24 میٹر ہے بتائیے کہ عمارت کی لمبائی کیا ہے؟

9۔ CD اور GH بالترتیب $\angle ACB$ اور $\angle EGF$ کے ناصف ہیں اس طرح کہ D اور H بالترتیب ΔABC اور ΔEFG کے اضلاع AB اور FE پر واقع ہیں۔ اگر یہ دونوں مثلثات مشابہ ہوں تو ثابت کیجیے

(i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

SCERT TELANGANA

10۔ AX اور DY دو مشابہہ مثلثات ΔABC اور ΔDEF کے عمود ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $AX : DY = AB : DE$

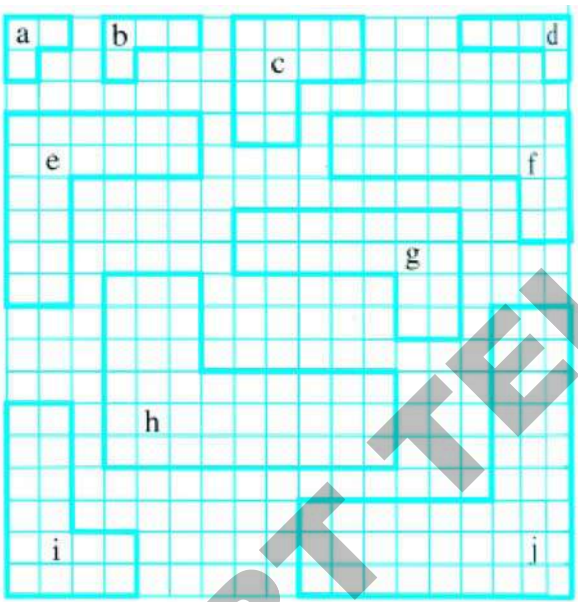
11۔ ΔABC کے مشابہہ ایک مثلث بنائیے جس کے ضلعے ΔABC کے متناظر اضلاع کے $\frac{5}{3}$ مساوی ہوں۔

12۔ ایک مثلث بنائیے جس کے اضلاع کی لمبائی 4 سمر، 5 سمر اور 6 سمر ہے تب اسی مثلث کے مشابہہ ایک اور مثلث بنائیے جس کے متناظر اضلاع کی نسبت پہلے مثلث کے متناظر اضلاع کا $\frac{2}{3}$ ہو۔

13۔ اک مثلث مساوی الساقین بنائیے جس کا قاعدہ 8 سمر اور ارتفاع 4 سمر ہو۔ پھر ایک اور مثلث بنائیے جس کے متناظر اضلاع، مثلث مساوی الساقین کے متناظر اضلاع کے $1\frac{1}{2}$ گنا ہو۔

8.5 مشابہہ مثلثات کے رقبے

دو مشابہہ مثلثات کے لیے ان کے متناظر اضلاع کی نسبت مساوی ہوتی ہے کیا ان کے رقبوں کی نسبت اور متناظر اضلاع کی نسبت میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے۔ اس بات کو سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل عملی کام پر غور کریں۔



مشغلہ

اس شکل میں مشابہہ کثیر ضلعی کی جوڑیوں کی فہرست تیار کیجیے

معلوم کیجیے

(i) مشابہت کی نسبت (اسکیل فیاکٹر)

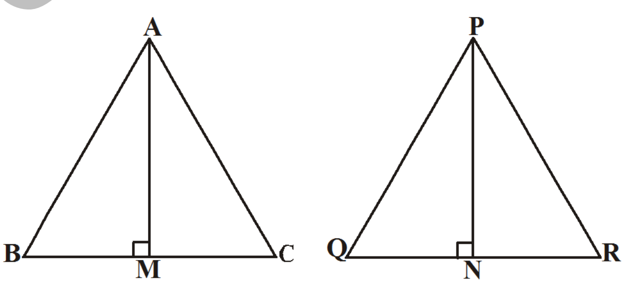
(ii) رقبوں کی نسبت

آپ دیکھیں گے کہ رقبوں کی نسبت، ان کے متناظر ضلعوں کی نسبت کے مربع کے مساوی ہونگے۔

آیئے اس بات کو ہم اک مسئلہ کے طور پر ثابت کریں گے۔

مسئلہ -8.6: دو مشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت، ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

دیا گیا ہے : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



SCERT TELANGANA

مطلوب: $\dfrac{\text{کارقبہ}(\Delta ABC)}{\text{کارقبہ}(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$

بناوٹ: $AM \perp BC$ اور $PN \perp QR$ بنایئے

ثبوت:(i) $\dfrac{\text{کارقبہ}(\Delta ABC)}{\text{کارقبہ}(\Delta PQR)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times BC\times AM}{\frac{1}{2}\times QR\times PN} = \dfrac{BC\times AM}{QR\times PN}$

ΔABM اور ΔPQN میں

$\angle B = \angle Q \; (\because \Delta ABC \sim \Delta PQR)$

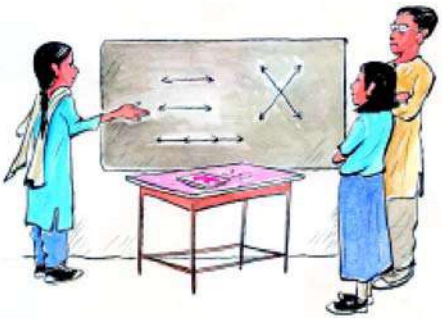
$\angle M = \angle N = 90^o$

$\therefore\ \Delta ABM \sim \Delta PQN$ (زاویہ زاویہ مشابہت کی رو سے)

$\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ ....(2)

اور $DABC \sim DPQR$ (دیا گیا ہے)

$\boxed{\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}} = \dfrac{AC}{PR}$ ....(3)



(1)،(2) اور (3) کی مدد سے

$\therefore \dfrac{\text{کارقبہ}(\Delta ABC)}{\text{کارقبہ}(\Delta PQR)} = \dfrac{AB}{PQ}\times\dfrac{AB}{PQ}$

$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$

مساوات (3) کے استعمال سے

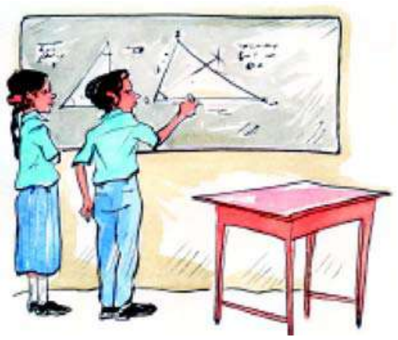
$\dfrac{\text{کارقبہ}(\Delta ABC)}{\text{کارقبہ}(\Delta PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{AC}{PR}\right)^2$

تب ثابت ہوا

آیئے اب ہم بعض مثالوں پر غور کریں گے۔

SCERT TELANGANA

مثال-8: ثابت کیجیے کہ اگر دو مشابہہ مثلثات کے رقبہ مساوی ہوں، تب وہ مماثل ہوں گے



حل: $\Delta ABC \sim \Delta PQE$

اس لیے $\frac{(\Delta ABC)\text{کارقبہ}}{(\Delta PQR)\text{کارقبہ}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$

لیکن $\frac{\text{کارقبہ }(\Delta ABC)}{\text{کارقبہ }(\Delta PQR)} = 1$ ($\because$ رقبے مساوی ہیں)

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

$\therefore \quad AB^2 = PQ^2$

$BC^2 = QR^2$

$AC^2 = PR^2$

جس سے ہم کو حاصل ہوتا ہے $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC = PR$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ضلع ضلع ضلع مماثلت کی رو سے)

SCERT TELANGANA

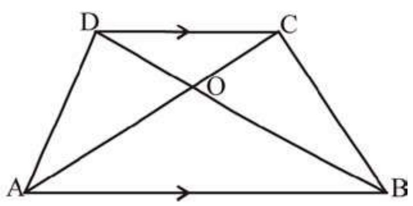
مثال-9: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اور ان کے رقبے بالترتیب 64 مربع سمر اور 121 مربع سمر ہیں۔ اگر EF=15.4 سمر تب BC معلوم کیجیے۔

حل: $\frac{(\Delta ABC)\text{کارقبہ}}{(\Delta DEF)\text{کارقبہ}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4} \Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2cm$$

مثال-10: ایک منحرف ABCD کے وتر ایک دوسرے کو 'O' پر قطع کرتے ہیں جہاں AB||DC ہیں۔ اگر AB=2CD ہو تو مثلثات AOB اور COD کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔



حل: منحرف ABCD میں AB||DC اور AB=2CD

مثلثات ΔAOB اور ΔCOD میں

$\angle COD = \angle AOB$ (مقابل کے راسی زاویے)

$\angle OCD = \angle AOB$ اندرونی متبادلہ زاویے

$\Delta AOB \sim \Delta COD$ (زاویہ زاویہ مشابہت سے)

$$\frac{(\Delta AOB) \text{ کا رقبہ}}{(\Delta COD) \text{ کا رقبہ}} = \frac{AB^2}{DC^2}$$

$$= \frac{(2DC)^2}{(DC)^2} = \frac{4}{1}$$

$\therefore$ کا رقبہ (ΔAOB) : کا رقبہ (ΔCOD) $= 4:1$

مشق 8.3

1۔ کسی مثلث ABC میں نقاط D، E، F اضلاع BC، CA، AB کے وسطی نقاط ہیں۔ ΔDEF اور ΔABC کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

2۔ ΔABC میں $XY \| AC$ اور XY، مثلث کو دو مساوی رقبہ والے حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ $\frac{AX}{XB}$ کی نسبت معلوم کیجیے۔

3۔ ثابت کیجیے کہ دو مشابہہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر وسطانیوں کی نسبت کے مربع کے مساوی ہوتی ہے۔

4۔ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$، 3 سمر $BC =$ 4 سمر $EF =$ اور ΔABC کا رقبہ 54 مربع سمر ہو تو ΔDEF کا رقبہ معلوم کیجیے؟

5۔ ABC ایک مثلث ہے اور PQ ایک خط مستقیم ہے جو AB کو P پر اور AC پر نقطہ Q مس کرتا ہے اگر 1 سمر $AP =$ اور 3 سمر $BP =$، 1.5 سمر $AQ =$، 4.5 سمر $CQ =$ ہو تو ثابت کیجیے کہ (ΔABC کے رقبہ کا) $\Delta APQ = \frac{1}{16}$ کا رقبہ

6۔ دو مشابہہ مثلثات کے رقبے 81 مربع سمر اور 49 مربع سمر ہیں اگر بڑے مثلث کا ارتفاع 4.5 سمر ہو تو چھوٹے مثلث کا ارتفاع کیا ہوگا؟

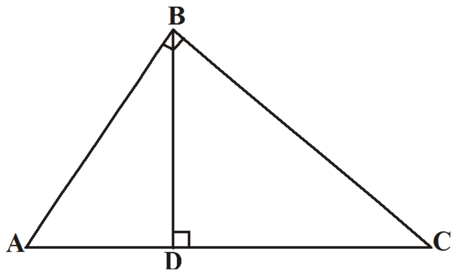
8.6 فیثا غورث کا مسئلہ

آپ فیثا غورث کے مسئلہ سے واقف ہیں۔ چند مشاغل کے ذریعہ آپ اسکی تصدیق کر چکے ہیں۔ اب ہم مثلثات کی مماثلت کے تصور کی بنیاد پر اس کو ثابت کریں گے اس کے لیے ہم حسب ذیل نتائج کا استعمال کریں گے۔

SCERT TELANGANA

مسئلہ 8.7: اگر کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی راس سے وتر پر عمود گرایا جائے تو وتر کے دونوں جانب بننے والے دو مثلثات دی گئی مثلث کے مشابہہ ہوں گے اور آپس میں ایک دوسرے سے مشابہہ ہوں گے۔

ثبوت: ABC ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے جو B پر قائمہ ہے۔ فرض کیجیے کہ BD وتر AC پر عمود ہے۔



ΔABC اور ΔADB میں $\angle A = \angle A$

اور $\angle ADB = \angle ABC$ (کیوں؟)

اس لیے $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (کیوں؟) .... (1)

اسی طرح $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (کیسے؟)

اس لیے (1) اور (2) سے BD عمود کے دونوں جانب کے مثلثات دی گئی مثلث ABC کے مشابہہ ہیں۔

مزید چونکہ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

اس لیے $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

ان نتائج سے حسب ذیل مسئلہ اخذ کیا جائے گا۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

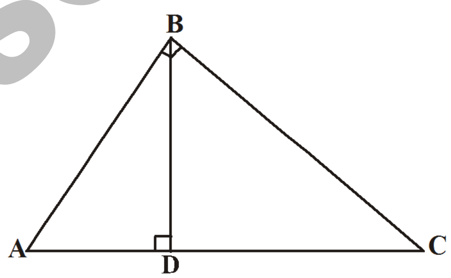
کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں جس کے اضلاع کے طول صحیح اعداد ہوں تو کم از کم ایک ضلع جفت عدد ہوگا کیوں؟ اس بات پر اپنے ساتھیوں اور استاد سے تبادلہ خیال کیجیے۔

8.6.1 فیثا غورث کا مسئلہ (بودھیان کا مسئلہ)

مسئلہ 8.8: کسی مثلث قائمہ الزاویہ میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔

دیا گیا ہے کہ ΔABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں راس B پر زاویہ قائمہ ہے)

مطلوب: $AC^2 = AB^2 + BC^2$



بناوٹ: $BD \perp AC$ بنائیے

ثبوت: $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (متناظر ضلع)

$AD.AC = AB^2$ ...(1)

مزید $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

SCERT TELANGANA

$$\Rightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$$

$$CD \,.\, AC = BC^2 \quad ...(2)$$

(1)اور(2) کو جمع کرنے پر

$$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

$$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$$

$$AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

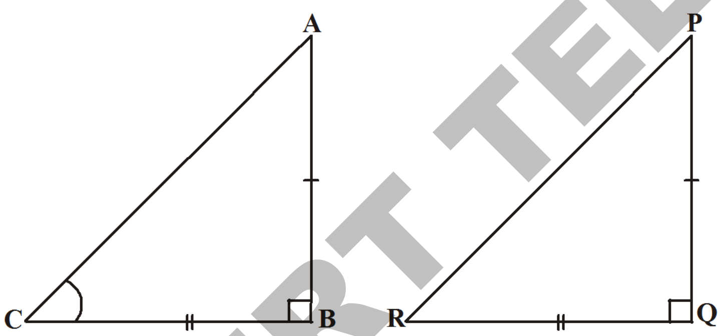
اس مسئلہ کو 800 قبل مسیح میں ہمارے ملک کے ریاضی داں بودھیان نے حسب ذیل انداز میں پیش کیا تھا۔

مستطیل کے وتر پر بننے والا رقبہ اس کے دونوں ضلعوں سے بننے والے رقبوں کے مساوی ہوتا ہے۔(یعنی طول اور عرض) لہذا بعض دفعہ اسے بودھیان کا مسئلہ بھی کہا جاتا ہے۔

اس مسئلہ کے عکس مسئلہ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟

ہم اسے ایک مسئلہ کے طور پر ویسے ہی ثابت کریں گے جیسے کہ پہلے کیا تھا۔

مسئلہ 8.9: ایک مثلث میں ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف بننے والا زاویہ قائمہ ہوگا اور مثلث ایک قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔



دیا گیا ہے: ΔABC میں

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

مطلوب: $\angle B = 90^o$

بناوٹ: ایک قائمۃ الزاویہ مثلث PQR بنائیے جو Q پر قائمہ ہو اس طرح کہ PQ=AB اور QR=BC

ثبوت: ΔPQR میں $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (فیثاغورث کا مسئلہ کیوں کہ $\angle Q = 90^o$)

$PR^2 = AB2 + BC^2$ (بموجب عمل سے)----------(1)

لیکن $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (دیا گیا ہے)-----------(2)

$\therefore$ $AC = PR$ (1) اور (2) سے

اب ΔABC اور ΔPQR میں

$AB = PQ$ (عمل سے)

$BC = QE$ (عمل سے)

$AC = PR$ (ثابت ہوا)

SCERT TELANGANA

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (ضلع ضلع ضلع مماثلت)

$\therefore\ \angle B = \angle Q$

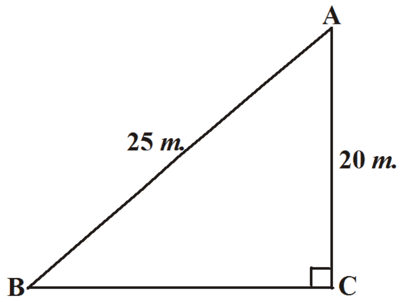
لیکن $\angle Q = 90^{o}$ (عمل سے)

$\therefore\ \angle B = 90^{o}$

لہذا ثابت ہوا۔

آیئے اب بعض مثالوں پر غور کریں۔

مثال-11: 25 میٹر لمبی ایک سیڑھی ایک عمارت کی کھڑکی تک پہنچتی ہے جو زمین سے 20 میٹر کی اونچائی پر ہے۔ بتایئے کہ سیڑھی عمارت کے قاعدہ سے کتنے فاصلہ پر رکھی گئی ہے۔



حل: ΔABC میں $\angle C = 90^{o}$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ (فیثا غورث کے مسئلہ سے)

$25^2 = 20^2 + BC^2$

$BC^2 = 625 - 400 = 225$

$BC = \sqrt{225} = 15m$

لہذا سیڑھی عمارت سے 15 میٹر کے فاصلہ پر رکھی گئی ہے۔

مثال-12: BL اور CM ΔABC کے وسطانیے ہیں جہاں راس A قائم الزاویہ ہے۔ ثابت کیجیے کہ $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$

حل: BL اور CM ΔABC کے وسطانیے ہیں $\angle A = 90^{o}$

ΔABC میں

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے)............. (1)

ΔABL میں $BL^2 = AL^2 + AB^2$

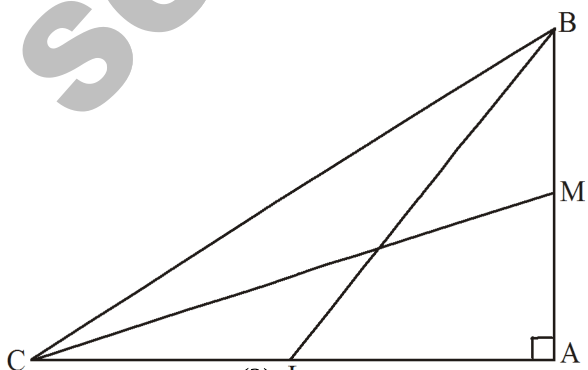
$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ L، AC کا نقطہ وسطی ہے)

$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ ...(2)

ΔCMA میں $CM^2 = AC^2 + AM^2$

$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ($\because$ M، AB کا نقطہ وسطی ہے)



SCERT TELANGANA

$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 .... \quad (3)$$

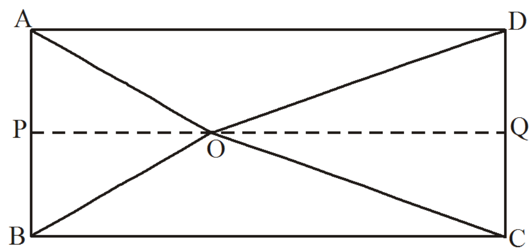
(2) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

$$\therefore \ 4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2 \quad (1) \text{ سے}$$

مثال-13: اگر 'O' ایک نقطہ ہے جو مستطیل ABCD کے اندرون واقع ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$



حل: 'O' سے PQ||BC اس طرح کھینچیے کہ 'P' AB پر اور 'Q' DC پر واقع ہو

اب PQ||BC

$\therefore$ PQ⊥AB اور PQ⊥DC ($\angle B = \angle C = 90^o$)

لہذا $\angle BPQ = 90^o$ اور $\angle CQP = 90^o$

$\therefore$ BPQC اور APQD دونوں ہی مستطیل ہیں۔

اب ΔOPB سے $OB^2 = BP^2 + OP^2$ .... (1)

اس طرح ΔOQD سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $OD^2 = OQ^2 + DQ^2$......(2)

ΔOQC سے $OC^2 = OQ^2 + CQ^2$ ......(3)

اور ΔOAP سے $OA^2 = AP^2 + OP^2$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

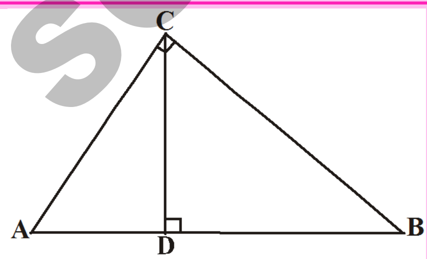
$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad (\because BP = CQ \text{ اور } DQ = AP)$$

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \qquad (3) \text{ اور } (4) \text{ سے}$$

یہ کیجیے

1۔ ΔACB میں $\angle C = 90^o$ اور CD⊥AB ہو تو ثابت کیجیے کہ $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.

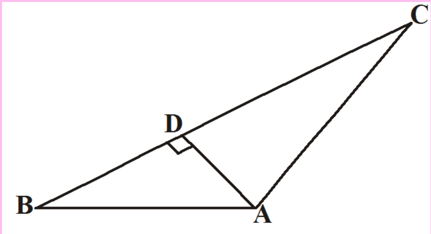


2۔ ایک گلی میں 15 میٹر لانبی ایک سیڑھی عمارت کی کھڑکی تک جو 9 میٹر اونچی ہے رکھی گئی ہے۔ سیڑھی کو گلی کی دوسری طرف پلٹانے پر یہ 12 میٹر اونچائی تک پہونچتی ہے۔ گلی کی چوڑائی کیا ہوگی؟

SCERT TELANGANA

3۔ دی ہوئی شکل میں اگر $AD \perp BC$ تب ثابت کیجیے کہ

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$



مثال-14: قائم الزاویہ مثلث کا وتر چھوٹے ضلع کے دوگنے سے 6 میٹر زائد ہے اگر تیسرا ضلع وتر سے 2 میٹر کم ہو تو مثلث کے اضلاع کے طول کیا ہوں گے؟

حل: فرض کیجیے کہ چھوٹا ضلع x میٹر ہے۔

$\therefore$ وتر $= (2x + 6)$ میٹر اور تیسرا ضلع $= (2x + 4)$ میٹر

فیثاغورث کے مسئلہ سے

$$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$$

$$4x^2 + 24x + 36 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$$

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

$x = 10$ یا $x = -2$

لیکن x کی قیمت منفی اس لیے نہیں ہوسکتی کہ ضلع کی لمبائی منفی نہیں ہوسکتی۔

$$\therefore x = 10$$

لہٰذا مثلث کے اضلاع کی لمبائی 10 میٹر، 26 میٹر اور 24 میٹر ہے۔

مثال-15: ΔABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔ جو C پر قائمہ ہے۔ فرض کیجیے کہ BC=a، CA=b، AB=C اور فرض کیجیے کہ p، C سے AB پر عمود کا طول ہے۔ ثابت کیجیے کہ (i) $pc = ab$ (ii) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

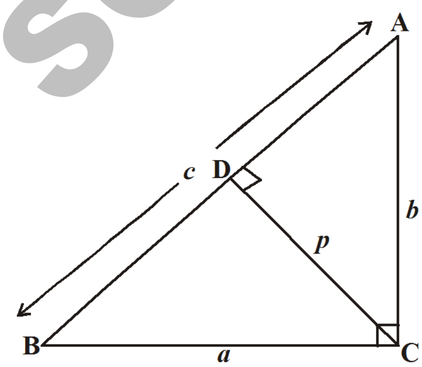
حل: (i) $CD = p$ اور $CD \perp AB$

ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$

$= \frac{1}{2} cp$

مزید ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

$= \frac{1}{2} ab$



SCERT TELANGANA

$$\frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \quad ...(1)$$

(ii) چونکہ ΔABC قائم الزاویہ مثلث ہے اور C پر قائم الزاویہ بناتا ہے۔

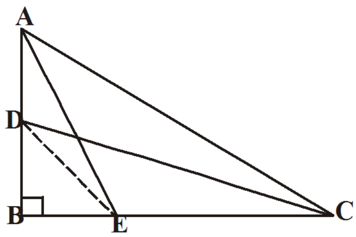
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

مشق - 8.4



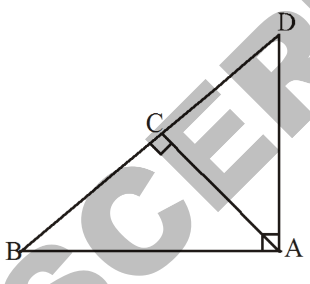
1۔ ثابت کیجیے کہ معین کے اضلاع کے مربعوں کا حاصل مجموعہ‘اس کے وتروں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

2۔ ABC قائم الزاویہ مثلث ہے جو کہ B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے فرض کیجیے کہ D اور E بالترتیب AB اور BC پر دو نقاط ہیں تو ثابت کیجیے کہ

$$AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$$

3۔ ثابت کیجیے کہ مثلث مساوی الاضلاع کے ایک ضلع کے مربع کا تین گنا‘اس کے ارتفاع کے مربع کے چار گنا کے مساوی ہوتا ہے؟

4۔ PQR ایک مثلث قائمہ الزاویہ ہے جو کہ نقطہ P پر قائمہ ہے۔QR پر ایک نقطہ M اس طرح ہے کہ $PM \perp QR$ تب ثابت کیجیے کہ $PM^2 = QM.MR$



5۔ راس A پر قائم الزاویہ بناتے ہوئے ABD ایک مثلث ہے اور $AC \perp BD$ تب ثابت کیجیے کہ

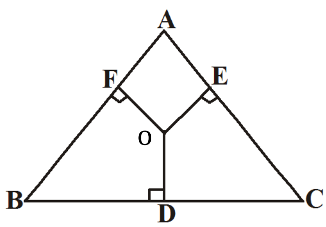
(i) $AB^2 = BC.BD.$

(ii) $AC^2 = BC.DC$

(iii) $AD^2 = BD.CD$

6۔ ABC ایک مثلث قائمہ الزاویہ مساوی الساقین ہے۔جو C پر قائمہ ہے۔ثابت کیجیے کہ $AB^2 = 2AC^2$

7۔ 'O' مثلث ABC کے اندرون ایک نقطہ ہے۔اس طرح کہ $OD \perp BC$‘$OE \perp AC$‘اور $OF \perp AB$ تو ثابت کرو



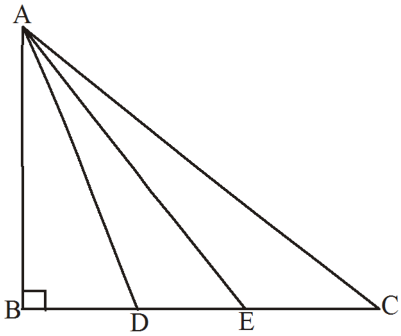
(i) $OA^2+OB^2+OC^2-OD^2-OE^2-OF^2 = AF^2+BD^2+CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

SCERT TELANGANA

8۔ ایک 24 میٹر والے برقی تار کو 18 میٹر اونچے ایک انتصابی کھمبے سے باندھ دیا گیا ہے۔ بتلائیے کہ کھمبے کے قاعدہ کو کتنی دور نصب کیا جائے تا کہ برقی تار ٹھیک تنا ہوا ہو۔

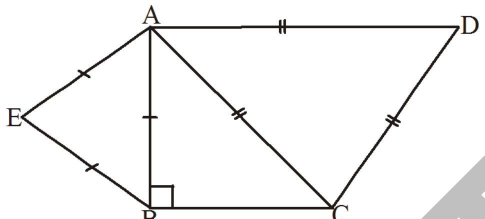
9۔ دو برقی کھمبے 6 میٹر اور 11 میٹر اونچے ہیں اگر دونوں کے درمیان 12 میٹر کا فاصلہ ہو تو ان کے چوٹیوں کے درمیان کا فاصلہ محسوب کیجیے۔



10۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث میں ایک نقطہ D ضلع BC پر اس طرح لیا گیا ہے کہ $BD = \frac{1}{3} BC$ تب ثابت کیجیے کہ $9AD^2 = 7AB^2$

11۔ دی ہوئی شکل میں ABC ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے جو B پر قائمہ ہے D اور E، BC پر نقاط تثلیث ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

$$8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$$



12۔ ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جو B پر قائمہ ہے۔ ضلع AC اور AB پر دو مشابہ مثلثات ΔABE اور ΔACD بنائے گئے ان کے رقبوں کے درمیان کی نسبت معلوم کرو؟

13۔ کسی قائمہ الزاویہ مثلث کے تینوں ضلعوں پر مساوی الاضلاع مثلثات بنائے گئے۔ ثابت کیجیے کہ وتر پر بنائے گئے مثلث کا رقبہ، باقی کے دو ضلعوں پر بنائے گئے مثلثات کے رقبوں کے مجموعے کے مساوی ہوگا۔

14۔ ثابت کیجیے کہ کسی مربع کے ضلع پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ، وتر پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کا نصف ہے۔

8.7 مسئلہ جاتی بیانات کی مختلف صورتیں

1۔ بیان کا نفی

اگر ایک بیان دیا گیا ہے، اگر بیان کے بعد نہیں لگا دیا جائے تو ایک نیا بیان حاصل ہوگا جو دیئے ہوئے بیان کا نفی کہلائے گا۔
مثال کے طور پر ایک "ΔABC ایک مساوی الاضلاع ہے"۔ لیجیے۔ اگر ہم اسے p سے ظاہر کریں گے تو ہمیں اس طرح لکھنا ہوگا۔
p: مثلث ABC ایک مساوی الاضلاع ہے اور اس کا نفی مثلث ABC مساوی الاضلاع نہیں ہے، ہوگا۔ کسی بیان کے نفی کو p~ سے ظاہر کرتے ہیں اور اسے "p کا نفی" پڑھا جاتا ہے۔ بیان p~، اصل بیان p کی تردید کرتا ہے۔
جب ہم کسی بیان کا نفی لکھتے ہیں تو ہمیں احتیاط برتنی ہوگی کہ جملہ واضح ہو تا کہ بات صاف طور پر سمجھ میں آجائے۔
اس مثال پر غور کیجیے۔
p: تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔ ہم اس بیان p کا نفی اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

$\sim p$: تمام غیر ناطق اعداد حقیقی اعداد نہیں ہوتے

ہم کیسے طئے کریں گے کہ کونسا بیان صحیح ہے؟ اس کے لیے ذیل کے اصول پر عمل کیا جائیگا۔

فرض کیجیے کہ p ایک بیان ہے اور $\sim p$ اسکا نفی ہے۔ تب $\sim p$ اس وقت غلط ہوگا جب p صحیح ہو اور $\sim p$ اس وقت صحیح ہوتا جب p غلط ہو۔

مثال: $S : 2 + 2 = 4$ صادق ہے۔

$\sim S : 2 + 2 \neq 4$ کاذب ہے۔

2۔ بیان کا برعکس

ایک بیان جو صحیح ہو یا غلط سادہ بیان کہلاتا ہے اگر ہم دو سادہ بیانات کو یکجا کر دیں تو ہمیں مرکب بیان حاصل ہوتا ہے دو سادہ بیانات کو اگر۔۔۔تب سے یکجا کرنے (جوڑ دینے) پر جو مرکب بیان حاصل ہوتا ہے اسے ہم شرطیہ یا دلالتی بیان کہتے ہیں۔

اگر۔۔۔تب سے دو سادہ بیانات p اور q کو جوڑ دینے پر ہمیں p دلالت کرتا ہے q پر، حاصل ہوتا ہے اسے علامتی طور پر $p \Rightarrow q$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $p \Rightarrow q$ میں فرض کیجیے کہ ہم p اور q کے مقام بدل دیں تو ہمیں $q \Rightarrow p$ حاصل ہوگا ایسے بیان کو برعکس بیان کہتے ہیں۔

مثال ΔABC میں اگر $AB=AC$ تب $\angle C = \angle B$: $p \Rightarrow q$

ΔABC میں اگر $\angle C = \angle B$ تب $AB=AC$: $q \Rightarrow p$ برعکس

3۔ ثبوت بذریعہ تضاد بیان

اس طرح کے ثبوت میں ہم کسی بیان کے نفی کو صادق متصور کرتے ہیں جہاں ہم کو ثابت کرنا ہوتا ہے اس دوران ثابت کرنے کے عمل میں ہمیں کہیں نہ کہیں تضاد پیدا ہوتا ہے۔ تب ہم یہ موقف اختیار کرتے ہیں کہ یہ تضاد ہمارے غلط مفروضے کے سبب پیدا ہوتے ہیں جو کہ نفی کے صحیح تصور کرنے سے پیش آیا ہے۔ لہذا ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دیا ہوا بیان صحیح ہے۔

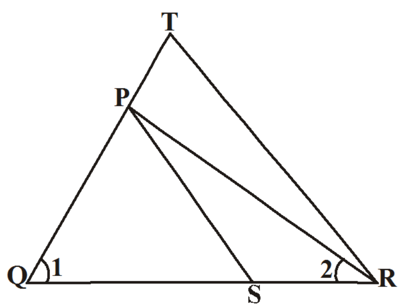
اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

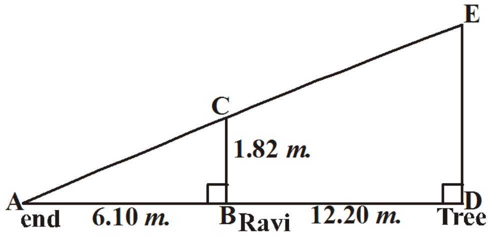
1۔ دی ہوئی شکل میں

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ اور $\angle 1 = \angle 2$ ثابت کیجیے کہ

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$



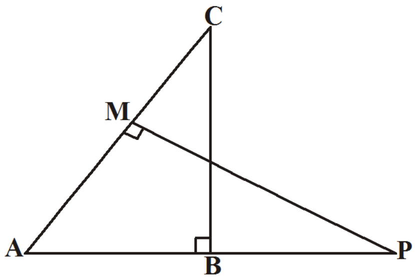
SCERT TELANGANA



2۔ ندیم 1.82 میٹر لمبا ہے۔ وہ اپنے صحن میں درخت کی اونچائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ درخت سے اس نے 12.2 میٹر کا فاصلہ درخت کے سایہ کے ساتھ ساتھ اس طرح طئے کیا کہ اس کے سایہ کا آخری سرا درخت کے سایہ کے آخری سرے سے جا لگے۔ وہ سائے کے کنارے سے 6.1 میٹر کے فاصلہ پر ہے درخت کی اونچائی معلوم کرو؟

3۔ متوازی الاضلاع ABCD کا ایک وتر AC، DP کو Q پر قطع کرتا ہے جہاں p ضلع AB پر کوئی نقطہ ہے ثابت کیجیے

$CQ \times PQ = QA \times QD$



4۔ ABC اور AMP دو قائم الزاویہ مثلثات ہیں جو بالترتیب B اور M پر قائمہ ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ (ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$

5۔ ایک ہوائی جہاز اڑان بھرتے ہوئے 1000 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال کی طرف جاتا ہے۔ اس وقت ایک اور ہوائی جہاز 1200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مغرب کی جانب روانہ ہوتا ہے بتائیے کہ $1\frac{1}{2}$ گھنٹہ بعد ان کی دوری کتنی ہوگی؟

6۔ ایک قائم الزاویہ مثلث میں C پر قائمہ ہے۔ نقاط P اور Q بالترتیب اضلاع AC اور CB پر اس طرح ہیں کہ جو ان ضلعوں کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔
ثابت کیجیے۔

(i) $9AQ^2 = 9AC^2 + 4BC^2$

(ii) $9BP^2 = 9BC^2 + 4AC^2$

(iii) $9(AQ^2 + BP^2) = 13AB^2$

تجویز کردہ منصوبہ کام:

مشابہ مثلثات کی خصوصیات کی مدد سے درخت / مینار / مندر کی اونچائی کو معلوم کیجیے۔ جیسا کہ مشابہ مثلثات کے باب میں اس بارے میں بحث کی جا چکی ہے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ دو خاکے جو کہ ایک ہی شکل کے ہوں لیکن ضروری نہیں کہ ایک ہی جسامت کے ہوں، مشابہ اشکال کہلاتے ہیں۔
2۔ تمام مماثل اشکال، مشابہ ہوتی ہیں لیکن تمام مشابہ اشکال کا مماثل ہونا ضروری نہیں۔
3۔ دو کثیر ضلعی جن کے ضلعوں کی تعداد مساوی ہوں مشابہ ہوتی ہیں۔
اگر (i) ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں اور
(ii) ان کے متناظر ضلع ایک ہی نسبت میں ہوں (یعنی وہ تناسب میں)
واضح رہے کہ کثیر ضلعوں کی مشابہت کے لیے مذکورہ بالا دو شرائط میں سے کوئی ایک ناکافی ہے۔

SCERT TELANGANA

4۔ اگر کسی مثلث میں کسی ضلع کے متوازی ایک خط اس طرح کھینچا جائے کہ یہ دوسرے دو اضلاع کو قطع کرتا ہو تو ان ضلعوں کی نسبت مساوی ہوگی۔

5۔ اگر کسی مثلث میں ایک خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

6۔ دو مثلثات میں اگر زاویئے مساوی ہوں تو ان کے متناظر ضلعوں کی نسبت مساوی ہوگی اور یوں اس طرح یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے (زاویہ زاویہ زاویہ مشابہت)

7۔ اگر کسی مثلث کے دو زاویئے کسی اور مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تو، مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔

8۔ اگر کوئی دو مثلثات کے متناظر ضلع ایک ہی نسبت میں ہوں تو ان کے متناظر زاویئے مساوی ہوں گے اور اس طرح یہ مثلثات مشابہہ ہوں گے (ضلع ضلع ضلع)

9۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے زاویے کے مساوی ہو اور اس زاویئے کو گھیرنے والے اضلاع کی نسبت بھی مساوی ہو تو یہ مثلثات مشابہہ ہوں گے (ضلع زاویہ ضلع)

10۔ دو مشابہہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت، ان کے متناظر اضلاع کی نسبت کے مربع کے مساوی ہوگی۔

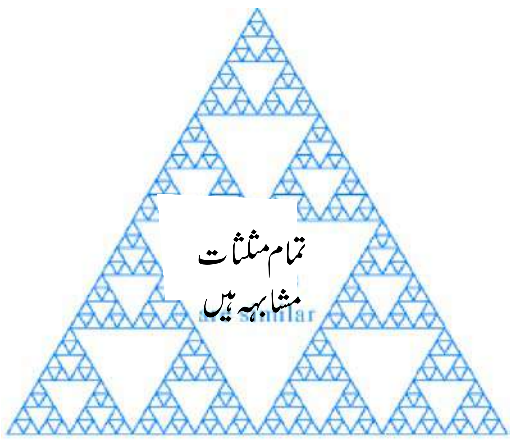
11۔ کسی مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کی راس سے مخالف ضلع پر عمود کھینچا جائے تو اس طرح بننے والے دو مثلثات اصل مثلث سے مشابہہ ہوں گے اور یہ اندرونی مثلثات آپس میں مشابہہ ہوں گے۔

12۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر پر کا مربع دیگر دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا (فیثا غورث کا مسئلہ)

13۔ ایک مثلث میں اگر کسی ضلع پر بننے والا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف کا زاویہ قائمہ ہوگا۔

پہیلی بوجھئے تو بھلا

ایک مثلث بنایئے مثلث کے اضلاع کے نقاط وسطی کو ملایئے۔ آپ کو چار مثلثات حاصل ہوں گے۔ دوبارہ ان مثلثات کے نقاط وسطی کو ملایئے۔ ایسا کرتے جایئے۔ تمام مثلثات مشابہہ ہوں گے۔ کیوں؟ اپنے ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔



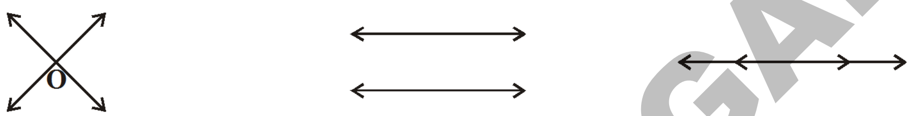
SCERT TELANGANA

دائرے کے مماس اور خطوط قاطع
Tangents and Secants to a circle

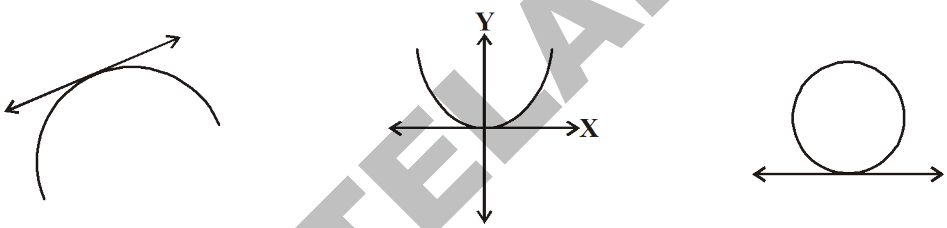
باب
9

9.1 تمہید

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مستوی میں دو خط اکثر ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں یا قطع نہیں کرتے بعض صورتوں میں وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔



اس طرح کیا ہوتا ہے جب ایک مستوی میں ایک خط مستقیم اور منحنی دی جائے؟ آپ جانتے ہیں کہ ایک منحنی ایک مکافی ہوسکتی ہے جیسا کہ آپ نے کثیر رکنیوں میں مشاہدہ کیا ہے یا سادہ بند منحنی دائرہ جو دیے ہوئے نقطہ سے دیئے ہوئے فاصلہ پر اسی مستوی میں واقع تمام نقاط کا کلکشن ہے



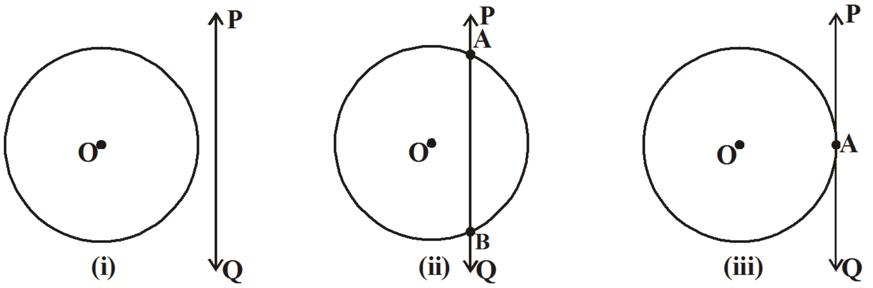
آپ ایک مستوی میں متحرک دائری اشیاء کی حرکت سے بننے والے راستہ کا مشاہدہ کیا ہوگا مثلاً سائیکل چلاتے ہوئے یا ریل کے پہیوں کو پٹریوں پر چلتے ہوئے وغیرہ جہاں یہ ایک خط مستقیم اور دائرہ کی طرح معلوم ہوتے ہیں کیا ان کے درمیان کوئی رشتہ پایا جاتا ہے؟

آیئے کسی مستوی میں دائرہ اور خط کے درمیان رشتہ پر غور کریں گے۔

9.1.1 ایک خط اور ایک دائرہ

آپ کو کاغذ پر ایک دائرہ ایک خط مستقیم کھینچنے کے لیے کہا گیا ہے۔ سلمان بحث کرتا ہے کہ ان دونوں کو صرف تین ممکنہ طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے اور ایک خط PQ پر غور کیجیے۔ تین ممکنات کو ذیل کی شکل میں دیا گیا ہے



SCERT TELANGANA

شکل(i) میں خط PQ اوردائرہ کا کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہے۔اس صورت میں PQ ‘بلحاظ دائرہ غیر قاطع خط ہے۔

شکل(ii) میں خط PQ دائرہ کے دونقاط A اور B پر قطع کرتا ہے ان دومشترکہ نقاط سے دائرہ کا وتر AB بنتا ہے۔اس صورت میں خط PQ دائرے کا خط قاطع (Secant) ہے۔

شکل(iii) میں صرف ایک نقطہ A ہے جودائرہ اور خط PQ کا مشترکہ نقطہ ہے۔اس خط کو دائرہ کا مماس (Trangent) کہتے ہیں۔

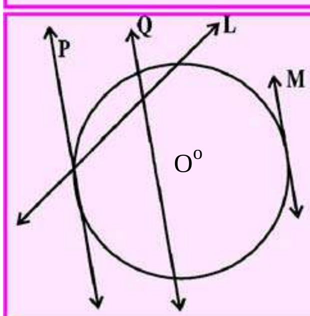
آپ مشاہدہ کرسکتے ہیں کہ خط کا اسکے علاوہ بلحاظ دائرہ اور کوئی صورت نہیں ہوسکتی ہے۔

ہم دائرہ کے مماس کے کا وجود اوران کے خصوصیات اور بناوٹوں کا مطالعہ کریں گے۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

لفظ Tangent لاطینی لفظ "Tangere" سے ماخوذ ہے۔جس کے معنی ’’مس کرنا‘‘ ہے۔اس لفظ کو پہلی مرتبہ ڈنمارک کے ماہر ریاضی داں تھامس فائینکی (Thomas Fineki) نے 1583 میں پیش کیا۔

یہ کیجیے



1۔ کسی بھی نصف قطر سے دائرہ بنائیے۔مختلف نقاط پر 4 مماس کھینچئے۔آپ اس دائرہ پر اور کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟

2۔ آپ دائرہ کے بیرونی نقطہ سے کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟

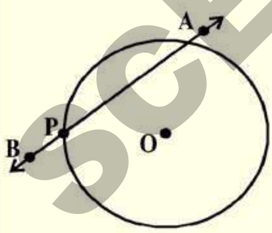
3۔ متصلہ شکل میں کونسے خطوط دائرے کے مماس ہیں۔

9.2 دائرے کے مماس

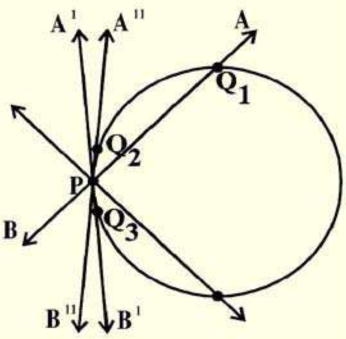
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دائرے کے کسی بھی نقطہ پر مماس کھینچا جاسکتا ہے۔کیا آپ بتلا سکتے ہیں کہ دائرے پر واقع کسی بھی نقطہ کے کتنے مماس کھینچے جاسکتے ہیں؟

اس کو سمجھنے کے لیے آیئے ذیل کے مشغلہ پر غور کرتے ہیں

مشغلہ



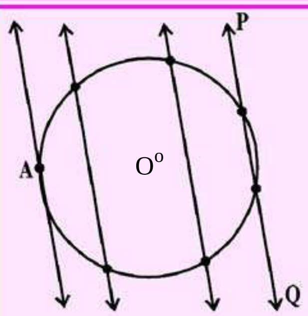
ایک دائری شکل کا تار لیجیے دائرے پر واقع نقطہ P پر ایک سیدھا تار AB کو اس طرح لگائیے کہ یہ نظام مستوی میں نقطہ P کے اطراف گھوم سکے۔دائری تار دائرہ کو اور سیدھا تار AB خط کو ظاہر کرتا ہے جو دائرے کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے اس کو میز پر رکھئے اور تار AB کو آہستہ سے نقطہ P کے گرد گھمایئے سیدھے تار کے مختلف تمام پوزیشن حاصل ہوسکے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔تار دائری تار کو P پر قطع کرتا ہے اور مزید ایک نقطہ Q_1, Q_2, Q_3 وغیرہ سے گزرتے ہوئے لہذا عموماً جب یہ دائری تار کو دونقاط



SCERT TELANGANA

پر قطع کرتا ہے تو ان میں کا ایک نقطہ P مخصوص پوزیشن میں ہوتا ہے یہ دائرے کے صرف نقطہ P پر قطع کرتا ہے(AB کے پوزیشن A'B' کو دیکھئے) یہ دائرے کے نقطہ P پر ایک مماس کا پوزیشن ہے۔AB کے تمام پوزیشن کے لیے آپ جانچ کر سکتے ہیں یہ دائرے کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر قطع کرے گا۔A'B' ' p پر دائرہ کا مماس ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ دائرے کا نقطہ P پر صرف اور صرف ایک ہی مماس ہوتا ہے۔متحرک تار AB اس پوزیشن سے کسی بھی جانب دائری تار کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے یہ تمام لہذا خط قاطع ہیں۔مماس خط قاطع کی ایک مخصوص شکل ہے جہاں اس کے دو نقاط قاطع منطبق ہوتے ہیں۔

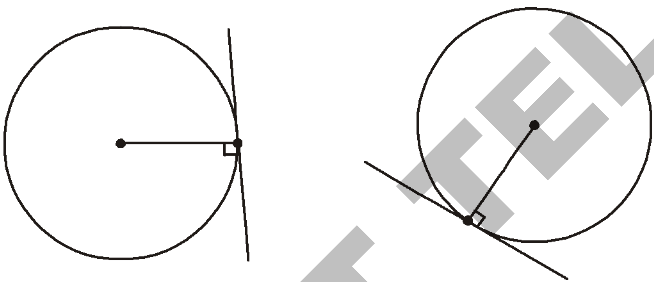
یہ کیجیے



ایک کاغذ پر ایک دائرہ اور ایک خط قاطع PQ کھینچئے' جیسا کہ بتلایا گیا ہے۔خط قاطع کے دنوں جانب کئی متوازی خطوط کھینچئے۔ان کے طول کو کیا ہوتا ہے جب یہ دائرے کے مرکز کے قریب ہوتے جاتے ہیں۔

سب سے طویل وتر کیا ہے؟

آپ دائرے پر کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں جو کہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



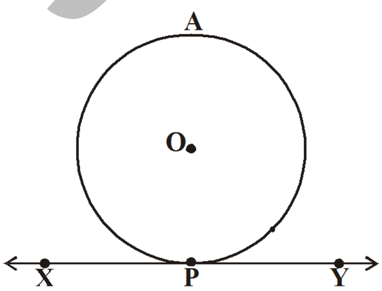
دائرے کے مماس اور دائرہ کا مشترک نقطہ' نقطہ تماس (Point of Contact) کہلاتا ہے۔اور یہ مماس دائرے کے مشترک نقطہ پر مس کرتا ہے۔دیئے گئے ذیل کی شکلوں میں دائرے کے مماسوں کا مشاہدہ کیجیے

آپ ایک دائرے کے ایک نقطہ پر کتنے مماس کھینچ سکتے ہیں؟ دائرے پر آپ کل ملا کر جملہ کتنے مماس حاصل کر سکتے ہیں؟ تمام نقطوں کو دیکھئے۔ تماسی نقاط سے نصف قطروں کو کھینچئے۔نقاط تماس پر مماسوں اور نصف قطروں کے درمیان بننے والے زاویہ سے متعلق آپ کوئی خاص خصوصیت کو دیکھتے ہیں۔یہ تمام متناظر مماسوں پر عمود وار ہوتے ہوئے دیکھائی دیتے ہیں ہم اس کو بھی ثابت کر سکتے ہیں۔آیئے دیکھیں گے۔

مسئلہ 9.1 : دائرے پر واقع کسی نقطہ پر کھینچا گیا مماس' نقطہ تماس سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے

دیا گیا ہے: ایک دائرہ جس کا مرکز' 'O' ہے اور دائرہ کے نقطہ P پر مماس xy ہے اور OP نصف قطر ہے۔

ثابت کرنا ہے: OP عمود وار ہے XY پر (یعنی $OP \perp XY$)

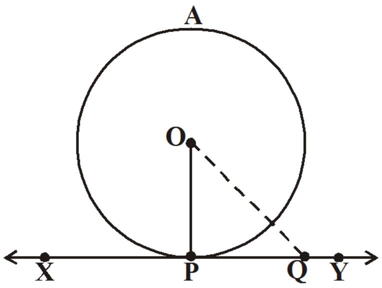


ثبوت: P کے علاوہ XY پر کوئی ایک نقطہ Q لیجیے O اور Q کو ملایئے۔

نقطہ Q دائرے کے باہر ہونا چاہیے۔(کیوں؟)

(غور کیجیے کہ اگر نقطہ Q دائرہ کے اندر واقع ہو تو XY قاطع خط ہوگی نہ کہ دائرہ کا مماس)

SCERT TELANGANA



اس لیے OQ، نصف قطر OP سے لمبا ہوگا (کیوں؟)

یعنی OQ>OP

یہ XY پر کہ تمام نقاط کے لیے واقع ہوگا۔ اس لیے یہ سچ ہے کہ O سے XY پر تمام نقاط سے اقل ترین فاصلہ OP ہوگا۔

کسی نقطہ سے خط پر گرائے گئے عمود کا طول چھوٹا ہوگا۔

(جماعت ہفتم کا مشغلہ 5.3)

اس لیے OP عمودوار ہے

یعنی $OP \perp XY$

سچ ثابت ہوا

نوٹ: نقطہ تماس سے گذرتا ہوا خط جس میں نصف قطر واقع ہے اس نقطہ پر دائرہ کا عماد Normal کہلاتا ہے۔

کوشش کیجیے

آپ مذکورہ بالا مسئلہ کا برعکس کس طرح ثابت کریں گے۔

"اگر دائرے کی مستوی میں ایک خط نصف قطر کے اختتامی نقطہ پر عمودوار ہو تو وہ خط دائرے کا مماس ہے"

مذکورہ بالا مسئلہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم مزید نتائج اخذ کر سکتے ہیں۔

i) چونکہ نقطہ P پر صرف اور صرف ایک عمود OP ہوسکتا ہے لہذا دائرے کے محیط پر دیئے گئے نقطہ پر صرف اور صرف دائرے کا ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

ii) چونکہ نقطہ P پر XY کا صرف اور صرف ایک عمود ہوسکتا ہے لہذا نقطہ تماس اور مماس کا عمود مرکز سے گذرتا ہے

ان کے متعلق غور کیجیے۔ ان کو اپنے ساتھیوں کے درمیان اور اپنے اساتذہ سے تبادلہ خیال کیجیے۔

9.2.1 دائرے کے مماس کی بناوٹ:

ہم دائرے پر دیے گئے نقطہ پر مماس کس طرح کھینچ سکتے ہیں؟ ابھی ہم نے جو نتیجہ اخذ کیا تھا کہ مماس اور نصف قطر نقطہ تماس پر عمودوار ہوتے ہیں کو استعمال کرتے ہیں۔ نقطہ تماس سے گذرتا ہوا مماس کھینچنے کے لیے ہمیں اس نقطہ پر نصف قطر کے ساتھ ایک خط عمودوار کھینچنا ہوگا۔ اس نصف قطر کو کھینچنے سے پہلے دائرے کے مرکز کی نشاندہی ضروری ہے۔

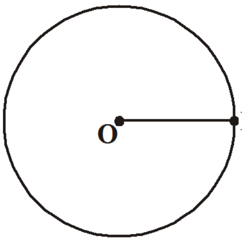
آیئے اس کی بناوٹ کے مراحل پر غور کرتے ہیں۔

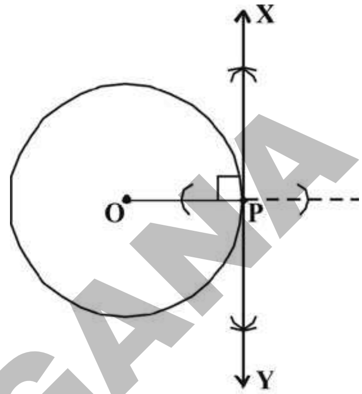
SCERT TELANGANA

بناوٹ: دیے گئے نقطہ پر دائرے کا مماس کھینچنا جبکہ دائرے کا مرکز معلوم ہو۔

ہم کو دائرہ جس کا مرکز 'O' اور محیط پر کوئی ایک نقطہ P دیا گیا ہے۔ تب ہمیں نقطہ P سے گذرتے ہوئے ایک مماس کھینچنا ہے۔

بناوٹ کے مراحل:





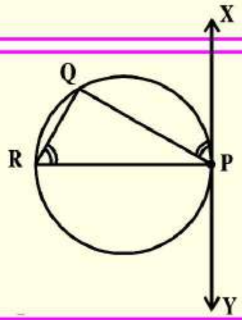
1۔ ایک دائرہ بنائیے جس کا مرکز 'O' ہو، اس پر کوئی نقطہ P لیجیے
OP کو ملائیے۔

2۔ ایک عمودی خط نقطہ P سے گذرتا ہوا کھینچیے اور اس کا نام XY دیجیے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے

3۔ XY دیے گئے نقطہ P سے گذرتا ہوا دائرے کا مطلوبہ مماس ہے

کیا آپ نقطہ P سے گذرتا ہوا ایک اور مماس کھینچ سکتے ہیں؟ وجوہات بتلایئے؟

کوشش کیجیے



آپ کس طرح دائرے پر دیے گئے نقطہ پر دائرے کا مماس کھینچیں گے۔ جب کہ دائرے کا مرکز معلوم نہ ہو۔

اشارہ: مساوی زاویے ∠QPX اور ∠PRQ بنائیے۔ بناوٹ کی تشریح کیجیے۔

9.2.2 مماس کا طول معلوم کرنا

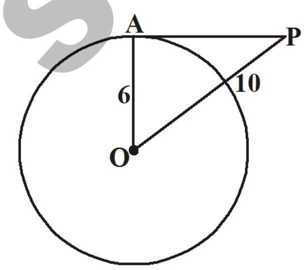
کیا ہم کسی دیے گئے نقطہ سے دائرے کے مماس کا طول معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال: ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' ہے اور نصف قطر 6 سمر ہے بیرونی نقطہ P سے فاصلہ 10 سمر = OP ہے دائرے کے مماس کا طول معلوم کیجیے

حل: نقطہ تماس پر مماس اور نصف قطر عمود وار ہوتے ہیں (مسئلہ 9.1)

یہاں PA مماسی قطعہ ہے اور OA دائرے کا نصف قطر ہے۔

$\therefore\ OA \perp PA \Rightarrow \angle OAP = 90^\circ$



اب, ΔOAP میں $OP^2 = OA^2 + PA^2$ (فیثاغورث مسئلہ کی روسے)

$10^2 = 6^2 + PA^2$

$100 = 36 + PA^2$

$PA^2 = 100 - 36$

$= 64$

$\therefore\ PA = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$

SCERT TELANGANA

مشق 9.1

1۔ خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

i۔ دائرے کا مماس دائرے کو ـــــــــــ نقطے پر قطع کرتا ہے۔

ii۔ ایک خط جو دائرے کو دو نقاط پر قطع کرتا ہے ــــــــــــ کہلاتا ہے۔

iii۔ ایک دائرے پر دیے گئے مماس کے متوازی ــــــــــ مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

iv۔ دائرے اور دائرے کے مماس کا مشترک نقطہ ــــــــــــ کہلاتا ہے۔

v۔ کسی دائرے پر ــــــــــــ مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

vi۔ ایک دائرہ پر ممکنہ متوازی مماس کی تعداد ــــــــــــ ہوتی ہے۔

2۔ ایک 5 سمر نصف قطر والے دائرے کے نقطے P کا مماس PQ مرکز 'O' سے گذرتے ہوئے خط سے Q پر جا ملتا ہے اس طرح کہ 13 سمر = OQ ، PQ کا طول معلوم کیجیے۔

3۔ ایک دائرہ بنائیے اور ایک دئے گئے خط کے متوازی دو خط اس طرح بنائیے کہ ایک خط مماس ہو اور دوسرا خط قاطع ہو۔

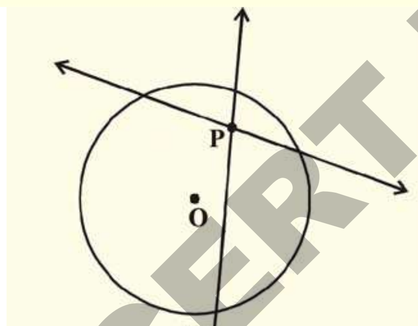
4۔ 9 سمر نصف قطر والے دائرے کا مماس معلوم کیجیے جو مرکز سے 15 سمر دور ہے

5۔ ثابت کیجیے کہ دائرے کے قطر کے اختتامی نقاط پر واقع مماس ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔

9.3 کسی نقطہ سے دائرے پر کھینچے گئے مماس کی تعداد

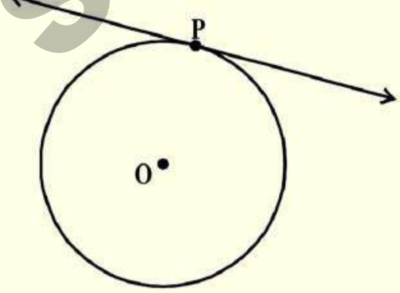
کسی نقطہ سے دائرے پر کھینچے گئے مماس کی تعداد کے تصور کے لیے آیئے ہم ذیل کا مشغلہ انجام دیتے ہیں

مشغلہ



(i)

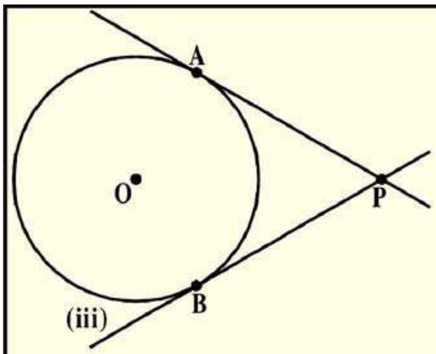
i) کاغذ پر ایک دائرہ بنائیے۔ اس کے اندر ایک نقطہ P لیجیے۔ کیا آپ اس نقطہ سے دائرے پر ایک مماس کھینچ سکتے ہیں؟ آپ دیکھیں گے کہ اس نقطہ سے کھینچے جانے والے خط دائرے کو دو نقاط پر قطع کرتے ہیں۔ یہ کون سے خطوط ہیں؟ یہ تمام دائرے کے خطوط قاطع ہیں۔ لہذا دائرے کے اندر کے نقطہ سے دائرے کا کوئی مماس کھینچنا ناممکن ہوگا۔ (متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے)



(ii)

ii) اب دائرے پر ایک نقطہ P لیجیے۔ اس نقطہ سے دائرے پر مماس کھینچیے آپ مشاہدہ کریں گے کہ اس نقطہ سے صرف ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے۔ (متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے)

SCERT TELANGANA



iii) اب دائرے کے باہر ایک نقطہ P کی لیجیے۔ اس نقطہ P سے دائرے پر مماس کھینچنے کی کوشش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کرتے ہیں کہ اس نقطہ سے قطعی طور پر دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ (متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے)

اب ہم ذیل میں ان حقائق کا خلاصہ لکھتے ہیں۔

صورتحال (i): دائرے کے اندرونی نقطہ سے گذرتا ہوا دائرے کا کوئی بھی مماس کھینچا نہیں جاسکتا۔

صورتحال (ii): دائرے پر کے نقطہ سے گذرتا ہوا ایک اور صرف ایک ہی مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

صورتحال (iii): اس دائرے کے بیرونی نقطہ سے دائرے پر قطعی طور پر دو مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ مماس PA ، اور PB مماس کے نقاط تماس A اور B ہیں۔

بیرونی نقطہ P اور نقطہ تماس A کے درمیان قطعہ کا فاصلہ مماس کا طول کہلاتا ہے

نوٹ کیجیے کہ شکل (iii) میں PA اور PB نقطہ P سے دائرے پر کھینچے گئے دو مماس کے طول ہیں PA اور PB کے طول میں کیا رشتہ ہے۔

مسئلہ 9.2: ایک دائرے کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دو مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔

دیا گیا ہے: دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ 'P' اس کا بیرونی نقطہ ہے۔ PA اور PB دائرے کے مماس ہیں جو نقطہ P سے کھینچے گئے (شکل دیکھیے)

ثابت کرنا ہے: PA=PB

ثبوت: OA ، OB اور OP کو ملایئے۔

$\angle OAP = \angle OBP = 90^0$ (مسئلہ 9.1 کی رو سے نصف قطر اور دائرے کے مماس کے درمیان کا زاویہ 90^0 ہوتا ہے)

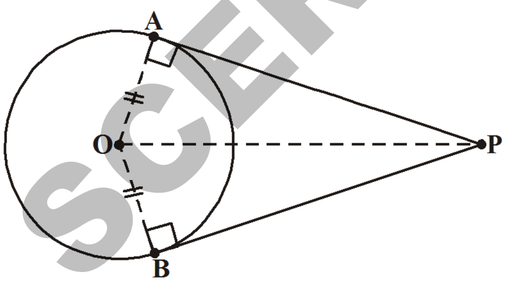
اب دو قائم الزاویہ مثلثات OAP اور OBP میں

OA=OB (ایک ہی دائرے کے نصف قطر)

OP=OP (مشترک)

لہٰذا RHS موضوعہ متماثلت کی رو سے

$\triangle OAP \cong \triangle OBP$



(CPCT) اس سے PA=PB حاصل ہوتا ہے۔

پس ثابت ہوا۔

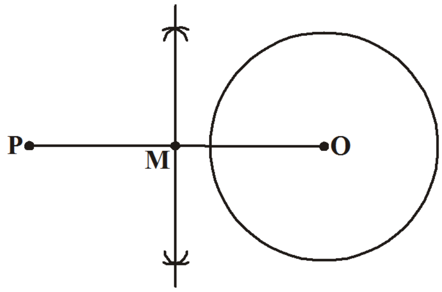
کوشش کیجیے

فیثا غورث کو استعمال کیجیے اور مذکورہ بالا مسئلہ کا ثبوت لکھئے

SCERT TELANGANA

9.3.1 بیرونی نقطہ سے دائرے کے مماس کی بناوٹ:

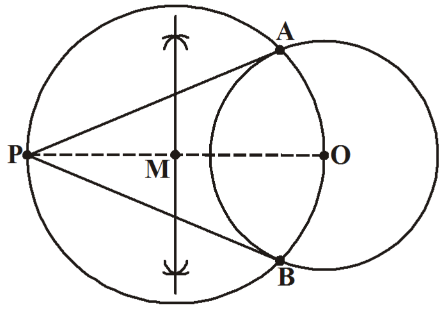
آپ نے دیکھا کہ اگر نقط دائرے کے بیرون ہو تو اس نقطے سے دائرے پر قطعی طور پر دو مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ اب ہم دیکھیں گے کہ ان مماس کو کس طرح کھینچتے ہیں۔



بناوٹ: دائرے کے باہر دیئے ہوئے نقط سے دائرہ پر مماس کھینچنا

دیا گیا ہے: ہمیں دائرہ دیا گیا ہے جس کا مرکز 'O' اور بیرونی نقطہ P ہے۔ ہمیں نقطہ P سے دائرے پر دو مماس کھینچنا ہے

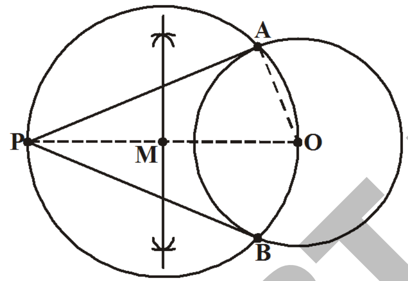
بناوٹ کے مراحل:



مرحلہ (i): PO کو ملایئے اور اسکا عمودی ناصف کھینچے۔ مان لیجیے کہ M ‘PO کا وسطی نقطہ ہوگا۔

مرحلہ (ii): M کو مرکز مان کر PM یا MO کے نصف قطر سے ایک دائرہ بنایئے مان لیجیے کہ یہ دیئے ہوئے دائرے کے دو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔

مرحلہ (iii): PA اور PB کو ملایئے۔ تب PA اور PB دائرے کے مطلوبہ دو مماس ہیں



ثبوت: اب ہم اس بناوٹ کی تصدیق کریں گے۔

OA کو ملایئے۔ $\angle PAO$ نصف دائرہ کا زاویہ ہے

لہذا $\angle PAO = 90^{o}$

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $PA \perp OA$

چونکہ OA دیے گئے دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے PA دائرے کا مماس ہوتا ہے (مسئلہ 9.1 کے برعکس سے)

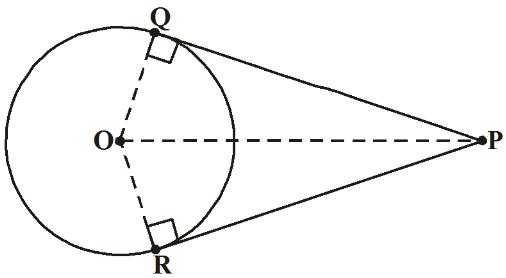
اسی طرح PB بھی دائرے کا مماس ہے۔

لہذا ثابت ہوا

مماس اور خطوط قاطع سے متعلق چند دلچسپ بیانات اور ان کا ثبوت

بیان 1: دائرے کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے دائرے کے مماس کے درمیان بننے والے زاویہ کے ناصف پر اس دائرے کا مرکز واقع ہوتا ہے۔ کیا آپ تصور کر سکتے ہیں کہ ہم اس کو کس طرح ثابت کر سکتے ہیں؟

ثبوت: 'O' مرکز والے دائرے کے بیرونی نقط سے کھینچے گئے دو مماس PQ اور PR' ہیں۔ OQ اور OR کو ملایئے۔ مثلثات OQP اور ORP متماثل ہیں۔ کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ



$\angle OQP = \angle ORP = 90^o$ (مسئلہ 9.1)

(نصف قطر) $OQ=OR$ ، OP مشترک ہے۔

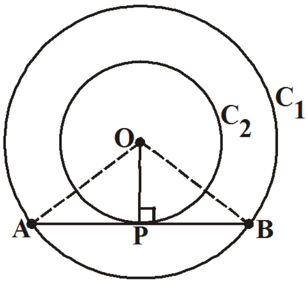
یعنی (متماثل مثلث کے متماثلتی حصہ) $\angle OPQ = \angle OPR$

لہذا OP ، $\angle QPR$ کا ناصف ہے۔

پس دو مماس سے بننے والے زاویہ کے ناصف پر مرکز واقع ہے۔

بیان-2: دو ہم مرکز دائروں میں بڑے دائرے کا وتر چھوٹے دائرے کا مماس ہے' اور نقطہ تماس پر اس کی تنصیف کرتا ہے۔

کیا آپ نے دیکھا یہ کس طرح ہوگا۔



ثبوت: دو ہم مرکز دائرے C_1 اور C_2 دیے گئے ہیں۔ جن کا مرکز 'O' ہے۔ اور بڑے دائرے C_1 کا وتر AB چھوٹے دائرے C_2 کو نقطہ P پر مس کرتا ہے۔ (شکل دیکھیے)۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $AP=PB$ O کو P سے ملائیے۔

تب AB دائرہ C_2 کا نقطہ P پر مماس ہے اور OP اس کا نصف قطر ہے۔

اس لیے مسئلہ 9.1 کی رو سے $OP \perp AB$

اب ΔOAP اور ΔOBP متماثل ہیں (کیوں؟) اس کا مطلب ہے $AP=PB$۔

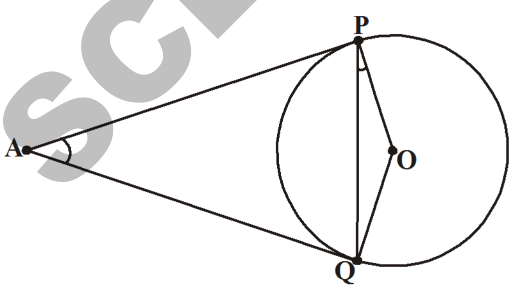
لہذا OP ' وتر AB کا ناصف ہے چونکہ مرکز سے گرایا گیا عمود وتر کی تنصف کرتا ہے

بیان-3: دائرہ کا مرکز 'O' ہے اور اسکے بیرونی نقطہ A سے اگر دو مماس AP اور AQ کھینچے گئے ہوں تب

$\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$

کیا آپ دیکھ سکتے ہیں؟

ثبوت: ہمیں ایک دائرہ دیا گیا ہے جس کا مرکز 'O' ہے' بیرونی نقطہ A سے AP اور AQ دائرے کے دو مماس کھینچے گئے ہیں۔ جہاں پر P ' Q دائرے کے نقطہ مماس ہیں۔ (شکل دیکھیے)



ثابت کرنا ہے کہ $\angle PAQ = 2\angle OPQ$

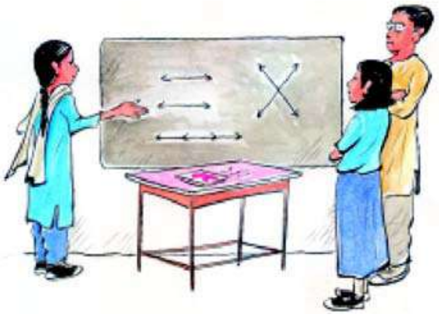
فرض کرو کہ $\angle PAQ = \theta$

اب مسئلہ 9.2 کی رو سے $AP=AQ$

لہذا ΔAPQ ایک مساوی الساقین مثلث ہے

اس لیے $\angle APQ + \angle AQP + \angle PAQ = 180°$ (تینوں زاویوں کا مجموعہ)

SCERT TELANGANA



$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{1}{2}(180° - \theta)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\theta$$

علاوہ ازیں مسئلہ 9.1 کی رو سے

$$\angle OPA = 90°$$

لہٰذا $\angle OPQ = \angle OPA - \angle APQ$

$$= 90° - \left[90 - \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PAQ$$

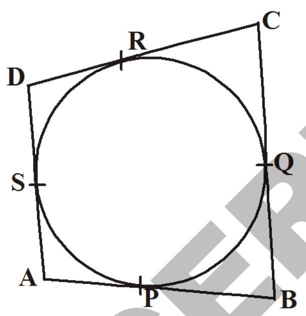
اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle OPQ = \frac{1}{2}\angle PAQ$

$$\angle PAQ = 2\angle OPQ = 2\angle OQP$$

بیان-4: ایک دائرہ کا محیطی چار ضلعی ABCD ہے۔ تب AB+CD = BC + DA

ہمیں کس طرح شروع کرنا ہوگا؟ آپ سوچ سکتے ہیں AB، BC، CD، DA تمام دائرے کے مماس ہیں (شکل دیکھیے)

ایک دائرے کو چار ضلعی کے تمام ضلعوں کے نقاط P، Q، R، S کو مس کرنے کے لیے اس کو چار ضلعی کے اندر واقع ہونا چاہیے (شکل دیکھئے)



ثبوت: چار ضلعی ABCD کے اضلاع AB، BC، CD اور DA کو دائرہ نقاط P، Q، R اور S پر ترتیب وار مس کرتا ہیں۔ شکل کے مطابق $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ دائرے کے مماس ہیں۔

چونکہ مسئلہ 9.2 کی رو سے بیرونی نقطہ سے دائرہ پر کھینچے گئے مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔ اس لیے

$$AP = AS$$

$$BP = BQ$$

$$DR = DS$$

اور $CR = CQ$

انہیں جمع کرنے پر، ہمیں حاصل ہوگا

$$AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$$

یا $(AP + PB) + (CR + DR) = (BQ + QC) + (DS + SA)$

یا $AB + CD = BC + DA$

SCERT TELANGANA

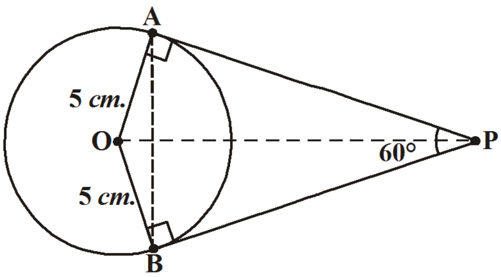
مثال-1: 5 سمر نصف قطر والے دائرے پر مماس کی ایک جوڑی کھینچئے جو ایک دوسرے سے 60^o کا زاویہ بناتے ہیں۔

حل: دائرہ اور دائرے کے دو مماس کھینچنے کے لیے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ ہم کس طرح آگے بڑھتے ہیں۔ ہمیں صرف دائرے کا نصف قطر اور دو مماس کے درمیان کا زاویہ دیا گیا ہے ہم یہ نہیں جانتے کہ دائرے کا بیرونی نقط دائرے سے کتنی دوری پر واقع ہے۔ جہاں سے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور مماس کے طول سے بھی ہم واقف نہیں ہیں۔ ہم صرف دو مماس کے درمیان بننے والے زاویہ سے واقف ہیں۔ ہمیں ان کو استعمال کرتے ہوئے یہ دریافت کرنا ہے کہ بیرونی نقط جس سے مماس کھینچا گیا ہے وہ دائرے سے کتنی دوری پر واقع ہے۔

آیئے ہم ایک دائرہ پر غور کرتے ہیں جس کا مرکز O ہے اور نصف قطر 5 سمر ہے۔ مان لیجیے کہ PA اور PB دائرے کے دو مماس ہیں جو بیرونی نقط P سے کھینچے گئے ہیں اور ان مماس کا درمیانی زاویہ 60^o ہے۔ یعنی $\angle APB = 60^o$۔ O اور P کو ملایئے۔

ہم جانتے ہیں کہ OP، $\angle APB$ کا ناصف ہے۔

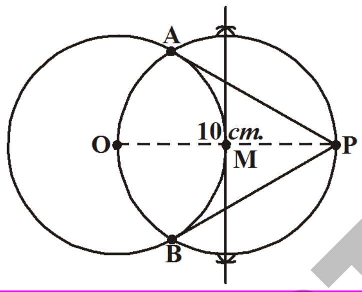
چونکہ $(\Delta OAP \cong \Delta OPP)$ لہذا $\angle OPA = \angle OPB = \dfrac{60^o}{2} = 30^o$



اب ΔOAP میں $\sin 30 = \dfrac{\text{مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}} = \dfrac{OA}{OP}$

مثلثی نسبت سے $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{OP}$ لہذا $OP = 10$ ہے

اب ہم 'O' کو مرکز مان کر 5 سمر نصف قطر کی دوری سے ایک دائرہ کھینچ سکتے ہیں۔ دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر نقط P کا تعین کریں گے۔ OP کو ملایئے اور 9.2 میں دی گئی بناوٹ کے مطابق تکمیل کیجیے۔



پس PA اور PB دیئے گئے دائرے پر کھینچے گئے دو مطلوبہ مماس ہیں

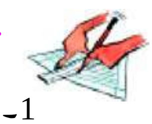
اس کے علاوہ آپ اس بناوٹ کو علم مثلث کی نسبتوں کو استعمال کیے بغیر بنانے کی کوشش کیجیے۔

ΔOAP میں $\angle A = 90^o$ ، $\angle P = 30^o$ اور OA=5 سمر اور $\angle O = 60^o$ ، ΔOAP بنائے اس طرح کہ P حاصل ہوجائے۔

کوشش کیجیے

دو نصف قطر OA اور OB کھینچیے اس طرح کہ $\angle BOA = 120^o$ ہو۔ $\angle BOA$ کا ناصف کھینچیے اور OA، OB پر نقاط A اور B سے عمودی خط کھینچیے۔ یہ خطوط $\angle BOA$ کے ناصف کو دائرے کے بیرونی نقط پر قطع کرتے ہیں اور یہ عمودی خطوط دائرے کے مماس ہوں گے۔ تشکیل دیجیے اور صحیح ہونے کی تصدیق کیجیے۔

مشق 9.2



1۔ صحیح جواب کا انتخاب کیجیے ہر جواب کے صحیح ہونے کی تصدیق کیجیے؟

i) دائرے کے مماس اور اس کے نقط تماس پر کھینچا گیا نصف قطر کا درمیانی زاویہ

(a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

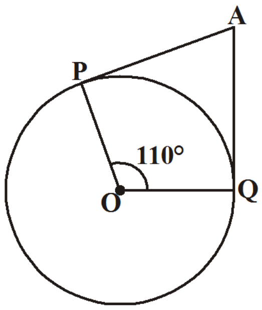
ii) ایک نقطہ Q سے دائرے کے مماس کا طول 24 سمر ہے۔ اور دائرے کے مرکز سے Q کا فاصلہ 25 سمر ہے تب دائرے کا نصف قطر ہے۔

(a) 7cm (b) 12cm (c) 15cm (d) 24.5cm

SCERT TELANGANA

(iii) دائرہ کا مرکز 'O' ہے AP اور AQ دائرے کے مماس ہیں اسطرح کہ $\angle POQ = 110°$, تب $\angle PAQ$ مساوی ہے

(a) 60° (b) 70° (c) 80° (d) 90°



(iv) دائرے کا مرکز O ہے بیرونی نقط P سے دائرے کے مماس PA اور PB کھینچے گئے ہیں۔ اگر دو مماس کا درمیانی زاویہ 80° ہو تب $\angle POA$ مساوی ہے

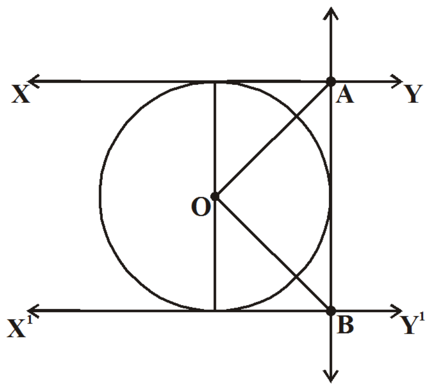
(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80°

(v) دائرہ کا مرکز O ہے شکل میں XY اور X^1Y^1 دائرے کے دو متوازی مماس ہیں ایک اور مماس AB جس کا نقطہ تماس C ہے XY سے A اور X^1Y^1 سے B پر قطع کرتا ہے تب $\angle AOB =$

(a) 80° (b) 100° (c) 90° (d) 60°

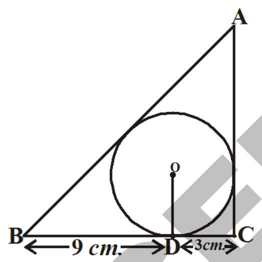
2۔ دو ہم مرکز دائرے کھینچے گئے جن کے نصف قطر 5 سمر اور 3 سمر ہیں۔ بڑے دائرے کا وتر کا طول معلوم کیجیے جو چھوٹے دائرے کو مس کرتا ہے؟

3۔ ثابت کیجیے کہ دائرہ کا محیطی متوازی الاضلاع ایک معین ہے؟



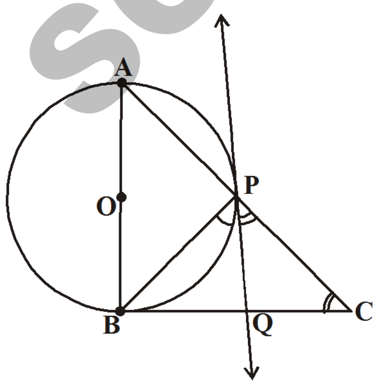
4۔ 3 سمر نصف قطر دائرہ کا ایک محیطی مثلث اس طرح تشکیل دیا گیا ہے کہ نقط تماس D، BC کو دو خطی قطعات BD =9cm اور DC=3cm سمر میں تقسیم کرتا ہے (متصلہ شکل دیکھئے) ضلع AC اور AB کو معلوم کیجیے۔

5۔ 6 سمر نصف قطر والا دائرہ کھینچیے۔ دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر واقع نقط سے دائرے کے مماس کھینچئے اور ان کا طول معلوم کیجیے۔ فیثا غورث مسئلہ کی مدد سے تصدیق کیجیے۔



6۔ 4 سمر نصف قطر والے دائرہ کے ہم مرکز دائرہ جس کا نصف قطر 6 سمر پر کے نقطے سے مماس کھینچیے اوراس کے طول کو محسوب کیجیے اور پیائش کر کے تصدیق کیجیے۔

7۔ ہاتھ کی چوڑی کی مدد سے دائرہ کھینچئے۔ اس دائرہ کے باہر ایک نقط لیجیے اس نقطہ سے دائرے پر ایک جوڑ مماس کھینچیے ان کی پیائش کیجیے۔ نتیجہ لکھئے۔



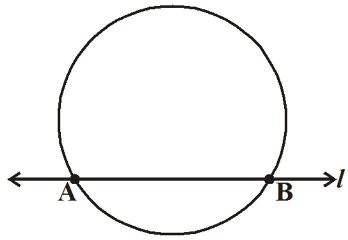
8۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں ضلع AB کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو وتر AC کو نقط P پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ دائرے کے نقط P کا مماس BC کی تنصیف کرتا ہے۔

9۔ دائرے کا مرکز 'O' ہے۔ دائرہ کے بیرونی نقط R سے دائرہ پر مماس کھینچیے۔ بتلایئے کہ اس نقط سے دائرے پر کتنے مماس کھینچے جا سکتے ہیں؟

(اشارہ: ہر صورت میں نقطہ تماس کا فاصلہ اس نقطہ سے مساوی ہوتا ہے)

SCERT TELANGANA

9.4 دائرے کے خط قاطع سے بننے والا قطاع



ہم نے ایک خط اور ایک دائرے پر غور کیا ہے جب ایک خط کسی دائرے کے صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے تو وہ مماس ہوتا ہے۔ خط قاطع وہ خط ہے جو دائرے کے دو نقطوں کو قطع کرتا ہے اور دائرے کا وتر خط قاطع میں شامل ہوتا ہے۔

متصلہ شکل میں خط 'l' خط قاطع ہے اور AB وتر ہے۔

زید گلابی اور نیلے کاغذ کو چپکاتے ہوئے ایک تصویر بنا رہا ہے۔ وہ کئی تصویریں بناتا ہے ان میں ایک تصویر واش بیسن (Wash Basin) کی ہے۔ اس تصویر کی بناوٹ کے لیے زید کو کتنے کاغذ کی ضرورت ہوگی۔ اس تصور کے دو حصوں میں دیکھ سکتے ہیں۔ ایک مستطیلی شکل ہے لیکن باقی حصہ کیا ہے؟ دراصل باقی حصہ دائرے کا قطاع ہے ہمیں معلوم ہے کہ مستطیل کا رقبہ کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔ ہم قطاع دائرے کا رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔ ذیل میں قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کرنے سے متعلق تبادلہ خیال کیا گیا ہے۔

یہ کیجیے

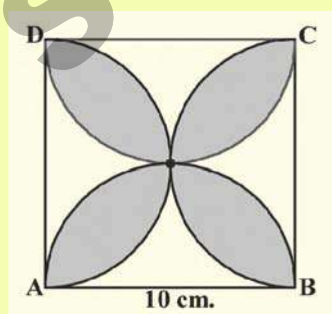
زید نے واش بیسن کے علاوہ ذیل کی تصویریں بھی بنائی ہے۔

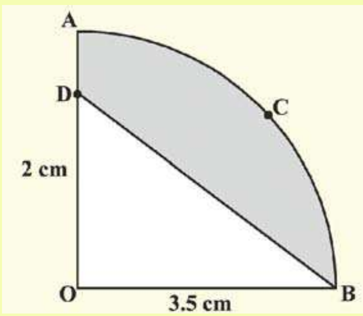
ان تصاویر کو کن شکلوں میں کاٹنے سے ہم رقبہ کو آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں؟

چند اور زیادہ تصاویر میں بنائیے اور ان شکلوں کے متعلق سوچیے جن میں ان کو مختلف حصوں میں تقسیم کیا جاسکے

کوشش کیجیے

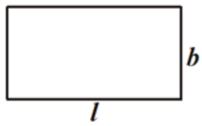
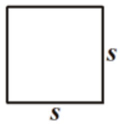
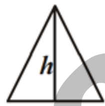
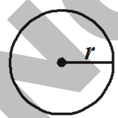
حسب ذیل اشکال میں موجود ساختوں کی نشاندہی کیجیے۔





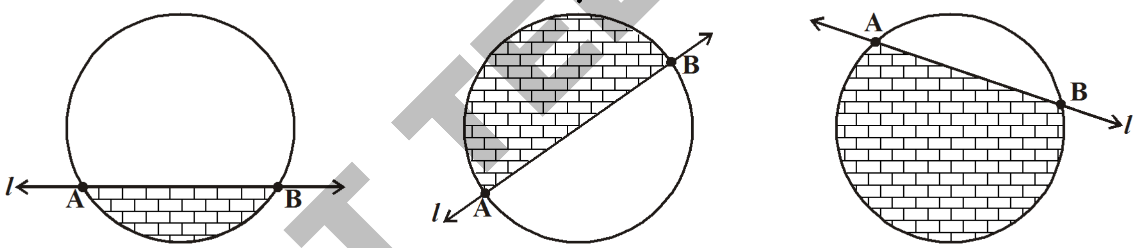
SCERT TELANGANA

ذیل میں دیے گئے جیومٹریائی اشکال کے رقبہ کس طرح معلوم کرتے ہیں۔ آیئے ان کا اعادہ کریں گے۔

سلسلہ نشان	شکل	ابعاد	رقبہ
1		طول = l عرض = b	$A = lb$
2		ضلع = s	$A = s^2$
3		قاعدہ = b	$A = \frac{1}{2}bh$
4		نصف قطر = r	$A = \pi r^2$

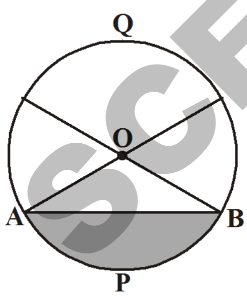
9.4.1 قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کرنا

قطاع دائرے کا رقبہ کے تخمینہ کے لیے شریفہ نے قاطع خطوط کھینچتے ہوئے دائرے کے قطاع بنائے

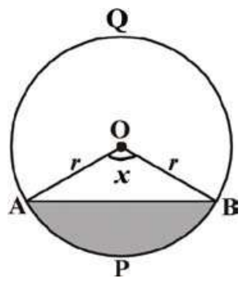


(i) (ii) (iii)

رقبہ کو ظاہر کرتا ہے جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ قطاع دائرے کا وہ علاقہ ہے جو ایک وتر اور قوس کی حد بندی سے بنتا ہے۔ تصویر میں سایہ دار حصہ ( ) شکل (i) قطاع اصغر ہے۔ شکل (ii) نصف دائرہ اور شکل (iii) قطاع اکبر ہے۔ ہم قطاع کا رقبہ کس طرح معلوم کر سکتے ہیں ذیل کے مشغلہ کو انجام دیجیے



دائرہ نما کاغذ لیجیے اور قطر سے کم والے وتر کے طول پر موڑئے اور چھوٹے حصہ کو سایہ دار کیجیے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے، ہم اس سایہ دار حصہ کو کیا کہتے ہیں؟ یہ سایہ دار حصہ قطاع اصغر (APB) ہے۔ دائرے کے غیر سایہ دار حصہ کو ہم کیا کہیں گے؟ یقیناً یہ قطاع اکبر (AQB) ہے۔



گذشتہ جماعتوں میں آپ قطاع اور دائرے کے خطی قطعہ سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ وہ حصہ جو غیر سایہ دار ہے اور سایہ دار حصہ (قطاع اصغر) قطاع ہے جو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرے سے مل کر بنتا ہے۔ مان لیجیے کہ OAPB ایک دائرے کا قطاع ہے جس کا مرکز O اور نصف قطر r ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے اور فرض کیجیے کہ $\angle AOB$ کی پیمائش x ہے۔

SCERT TELANGANA

آپ جانتے ہیں کہ دائرے کا رقبہ جب کہ مرکز پر زاویہ کی پیمائش $360°$ ہو πr^2 ہے۔

لہٰذا جب درجہ کی پیمائش مرکز پر $1°$ ہو تب قطاع دائرہ کا رقبہ $\frac{1°}{360°} \times \pi r^2$ ہے۔

اس لیے جب درجہ کی پیمائش مرکز پر $x°$ ہو تب قطاع دائرہ کا رقبہ $\frac{x°}{360°} \times \pi r^2$ ہے۔

اب دائرہ کا مرکز O اور نصف قطر r سے بننے والا قطاع APB کے رقبہ کی صورت میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

قطاع APB کا رقبہ = قطاع OAPB کا رقبہ - ΔOAB کا رقبہ

$= \frac{x°}{360°} \times \pi r^2$ - ΔOAB کا رقبہ

کوشش کیجیے

آپ قطاع اصغر کے رقبہ کی مدد سے کس طرح قطاع اکبر کا رقبہ معلوم کریں گے۔

یہ کیجیے

1۔ ذیل میں دیئے گئے زاویوں کی مدد سے قطاع دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے جب اس کا نصف قطر 7 سمر ہے۔

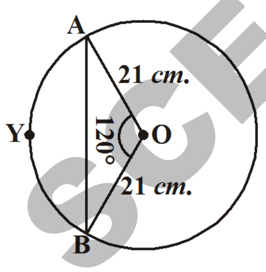
(i) 60° (ii) 30° (iii) 72° (iv) 90° (v) 120°

2۔ ایک گھڑی میں منٹ کے کانٹے کا طول 14 سمر ہے تب 10 منٹ بعد منٹ کے کانٹے سے بننے والے رقبہ کو معلوم کیجیے۔

اب ہم قطاع دائرہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے مثال کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال-1: متصلہ شکل میں بتائے گئے AYB قطاع کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دائرہ کا نصف قطر 21 سمر اور $\angle AOB = 120°$ ہے۔

($\pi = \frac{22}{7}$ اور $\sqrt{3} = 1.1732$ کا استعمال کیجیے)



حل: قطاع دائرہ AYB کا رقبہ = قطاع دائرہ OAYB کا رقبہ - ΔAOB کا رقبہ

اب قطاع دائرہ OAYB کا رقبہ $= \frac{120^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2$

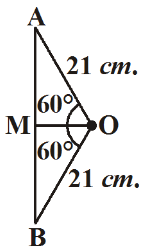
$=$ 462 مربع سمر .... (i)

ΔOAB کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے AB پر OM عمود کھینچیے $OM \perp AB$ (جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے)

نوٹ OA=OB لہٰذا RHS متماثلت سے

$\Delta AMO \cong \Delta BMO$

SCERT TELANGANA



لہذا M، AB کا وسطی نقطہ ہے اور

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^0 = 60^0$$

مان لیجیے کہ x سمر = OM

لہذا ΔOMA سے $\frac{OM}{OA} = \cos 60^0$.

یا $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\because \cos 60^0 = \frac{1}{2}\right)$

یا $x = \frac{21}{2}$

لہذا $\frac{21}{2}$ سمر =OM

اور $\frac{AM}{OA} = \sin 60^o$

$\Rightarrow \frac{AM}{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\because \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

لہذا $\frac{21\sqrt{3}}{2}$ سمر =AM

اسی لیے $21\sqrt{3}$ سمر= $\frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ سمر=AB=2AM

لہذا $\frac{1}{2} \times AB \times OM$ = $\angle AOB$ کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2 \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے

اس لیے $\left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ مربع سمر= AYB قطاع کا رقبہ

$\frac{21}{4}\left(88 - 21\sqrt{3}\right)$ مربع سمر=

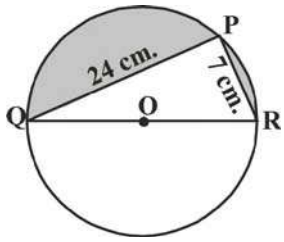
271.047 مربع سمر=

مثال 2: شکل میں سایہ دار قطاع کا رقبہ معلوم کیجیے اگر PQ=24 سمر جبکہ PR=7 سمر اور QR دائرے کا قطر ہے جس کا مرکز O ہے

($\pi=\frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: ΔPQR کا رقبہ - قطاع دائرہ OQRR کا رقبہ = سایہ دار قطاع کا رقبہ

چوں کہ QR قطر ہے اِس لیے $\angle QPR=90^\circ$ (نصف دائرہ کا زاویہ)



فیثا غورث مسئلہ کی رو سے

ΔQPR میں $QR^2 = PQ^2 + PR^2$

$= 24^2 + 7^2$

$= 576 + 49$

$= 625$

$QR = \sqrt{625} = 25$ cm

تب دائرہ کا نصف قطر $= \frac{1}{2}QR$

$= \frac{1}{2}(25) = \frac{25}{2}$ سمر

نصف دائرہ OQPR کا رقبہ $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{25}{2}\times\frac{25}{2}$

$= 245.53$ مربع سمر ...... (1)

قائم الزاویہ مثلث ΔQPR کا رقبہ $= \frac{1}{2}\times PR\times PQ$

$= \frac{1}{2}\times 7\times 24$

$= 84$ مربع سمر ....(2)

مساوات (1) اور (2) کی مدد سے

سایہ دار قطاع کا رقبہ $= 245.53-84$

$= 161.53\ cm^2$

مثال 3: ایک گول میز کی اوپری سطح پر 6 یکساں ڈیزائن کے نمونے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے اگر میز کے اوپری سطح کا نصف قطر 14 سمر ہو تب بحساب 5` فی مربع سمر نمونوں کو رنگین کرنے کی لاگت معلوم کیجیے۔ ($\sqrt{3}$ =1.732 لیجیے)

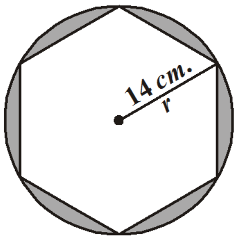
SCERT TELANGANA

حل: آپ جانتے ہیں کہ ایک منتظم مسدس کے محیطی دائرے کا نصف قطر مسدس کے ضلع کے مساوی ہوتا ہے؟

منتظم مسدس کا ہر ضلع = 14 سمر

منتظم مسدس کا رقبہ - دائرہ کا رقبہ = 6 قطاع نما ڈیزائن کا رقبہ

اب دائرہ کا رقبہ = πr^2



$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 =$ 616 مربع سمر .... (i)

منتظم مسدس کا رقبہ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14 \times 14$

= 509.21 مربع سمر .... (ii)

مساوات (i) اور (ii) کی مدد سے

6 قطاع نما ڈیزائن کا رقبہ $= 616 - 509.21$

= 106.79 مربع سمر

تب بحساب 5 ` فی مربع سمر 6 قطاع نما ڈیزائن کو رنگین کرنے کی لاگت

= 106.79 × ` 5

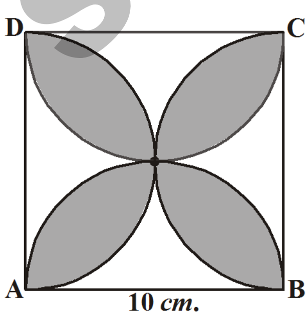
= ` 533.95

مشق - 9.3

1۔ 10 سمر نصف قطر والے دائرے میں ایک وتر مرکز پر قائم الزاویہ بناتا ہو تب ذیل میں دیئے گئے دائری خطی قطعوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (π=3.14 لیجیے)

(i) قطاع اصغر (ii) قطاع اکبر

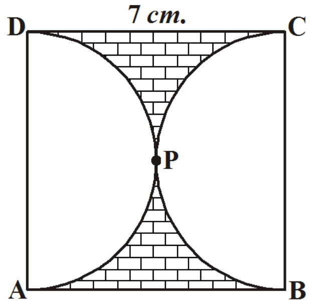
2۔ 12 سمر نصف قطر والے دائرے کا ایک وتر مرکز پر 120^0 زاویہ بناتا ہے۔ تب متعلقہ قطاع اصغر کا رقبہ معلوم کیجیے ($\pi = 3.14$ اور $\sqrt{3} = 1.732$ لیجیے)



3۔ ایک کار کے دو وائپرس (Wipers) ہیں جو ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہوتے۔ اگر ہر وائپر کا طول 25 سمر اور پونچھتے وقت وائپر کا درمیانی زاویہ 115^o ہو تب وہ پورے علاقے کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دو وائپرس ایک ساتھ کام کرتے ہیں۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

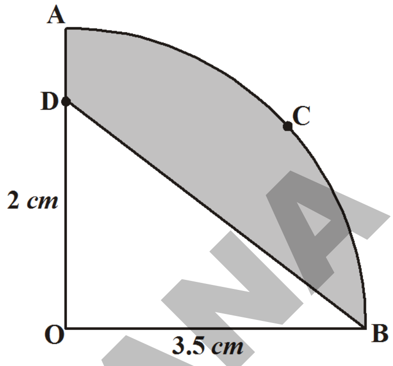
4۔ متصلہ شکل میں ABCD ایک مربع ہے جس کے ضلع کا طول 10 سمر ہے اور ہر ضلع کو قطر لیتے ہوئے نصف دائرہ کھینچا گیا تب سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (π=3.14 لیجیے)

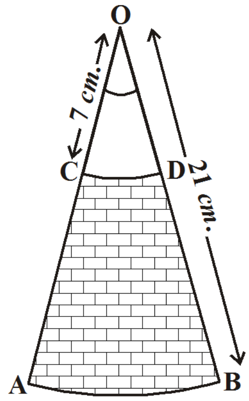
SCERT TELANGANA



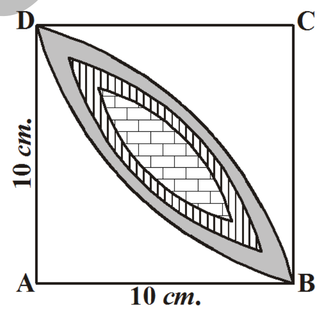
5۔ متصلہ شکل میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے اگر ABCD ایک مربع ہو جس کے ضلع کا طول 7 سمر ہے اور APD، BPC دو نصف دائرے ہیں۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

6۔ متصلہ شکل میں OACB ایک دائری خطہ ہے جس کا مرکز 'O' ہے اور اس کا نصف قطر 3.5 سمر ہے۔ اگر OD=2 سمر تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)





7۔ AB اور CD ترتیب وار قوس ہیں جو کہ ہم مرکز دائرے پر بنائے گئے ہیں جن کے نصف قطر ترتیب وار 21 سمر اور 7 سمر ہیں (متصلہ شکل دیکھیے) اگر $\angle AOB = 30°$ تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

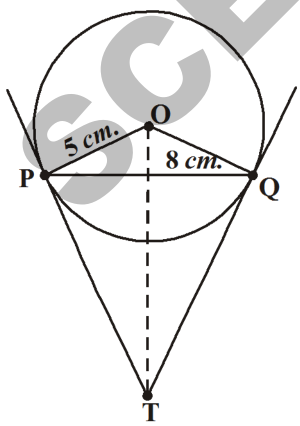


8۔ متصلہ شکل میں 10 سمر نصف قطر والے دائرہ میں 2 خطے ہیں۔ دو خطوں کے درمیان سایہ دار حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (π=3.14 لیجیے)

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ ثابت کیجیے کہ کسی دائرے کے دو مماس جو کہ دائرے کے بیرونی نقطہ سے بنائے گئے ہوں، کے درمیان والا زاویہ اتمامی ہوتا ہے کیوں کہ نقطہ تماس کو خطی قطعہ سے جوڑنے پر یہ زاویہ بنتا ہے۔



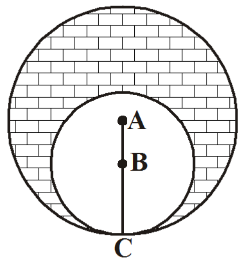
2۔ PQ ایک وتر ہے اس کا طول 8 سمر ہے اور دائرے کا نصف قطر 5 سمر دیا گیا ہے مماس جو P اور Q کے نقطہ تقاطع T ہے (شکل دیکھیے) تب TP کا طول معلوم کیجیے۔

3۔ اگر ایک دائرہ کے اندر ایک متوازی الاضلاع تشکیل دیا جائے تو ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلع اتمامی ہوتے ہیں؟

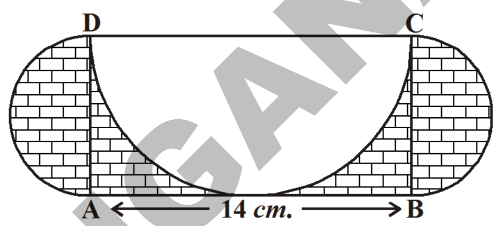
4۔ ایک خطی قطعہ AB لیجیے۔ جس کی پیائش 8 سمر ہو۔ A کو مرکز بنا کر 4 سمر نصف قطر لے کر ایک دائرہ بنائیے۔ B کو مرکز مان کر 3 سمر نصف قطر والا ایک دائرہ بنائیے ہر دائرے کے مرکز سے دوسرے دائرے پر مس کھینچیے۔

SCERT TELANGANA

5۔ مان لیجیے کہ ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس میں $AB=6$ سمر، $BC=8$ سمر اور $\angle B=90^{o}$، BD کو نقطہ B سے AC پر عموداً کھینچا گیا۔ نقطہ B، C، D کو مس کرتے ہوئے ایک دائرہ بنایا گیا۔ تب نقطہ A سے دائرے کے مماس کھینچیے۔



6۔ متصلہ شکل میں سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے جبکہ دو دائرے جن کا مرکز A اور B ہیں یہ دونوں ایک ہی نقطہ تماس C پر منطبق ہوتے ہیں۔ اگر $AC=8$ سمر اور $AB=3$ سمر ہوں۔



7۔ ABCD ایک مستطیل ہے جس کا ضلع $AB=14$ سمر اور $BC=7$ سمر ہے۔ DC، BC اور AD کو قطر مانتے ہوئے تین نصف دائرے بنائے گئے۔ (شکل دیکھیے) تب سایہ دار خطہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا ہے۔

1۔ دائرے کے مماس اور متقاطع خطوط کی تعریفیں اور دائرے کے وتر سے متعلق معلومات حاصل کی ہیں۔

2۔ مختلف اقسام کے مثلثات کے تصورات بالخصوص قائم الزاویہ اور مساوی الساقین مثلث کا اطلاق کیا ہے۔

3۔ ذیل کے مسئلوں سے آگہی حاصل کی ہے۔

(الف) دائرے کے مماس نقطہ تماس سے گزرتے ہوئے نصف قطر پر عمود دار ہوتا ہے۔

(ب) ایک دائرے کے بیرونی نقطے سے کھینچے گئے دو مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔

4۔ حسب ذیل کی بناوٹیں سیکھی ہیں۔

(الف) دائرے پر واقع کسی نقطہ پر مماس کھینچنا جبکہ دائرہ کا مرکز معلوم ہو۔

(ب) دیے گئے بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس بنانا۔

5۔ ہم نے سایہ بھی سیکھا کہ دائرے اور مماس سے متعلق بیانات کو کس طرح ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اس ضمن میں سابقہ نتائج کی بناء پر منطقی طور پر نئے نتائج کو اخذ کیا جاتا ہے۔

6۔ مزید یہ سیکھا کہ۔

قطاع دائرہ کا رقبہ = متعلقہ قطاع کا رقبہ - متعلقہ مثلث کا رقبہ

SCERT TELANGANA

باب

10

Mensuration مساحت

10.1 تمہید

جماعت ہشتم اور نہم میں منتظم ٹھوس اجسام کے رقبے، طرفی سطح کا رقبہ، اور حجم سے متعلق واقفیت حاصل کرلی ہے۔ اور کئی مشقی سوالات کے حل کے ذریعہ ان سے متعلق آگہی بھی حاصل کی ہے۔ ان کا روزمرہ زندگی کے مختلف موقعوں وصورتوں میں نشاندہی کرتے ہوئے یہ اندازہ لگایا کہ کسی کی پیمائش کرنی ہے؟ کسی کا تخمینہ کرنا ہے؟ وغیرہ مثال کے طور پر کسی کمرہ کی رنگریزی کے لیے درکار رنگ کی مقدار معلوم کرنے۔ اس کے لیے ہمیں طرفی سطح کے رقبہ کی صرورت ہے نا کہ کمرے کے حجم کی اور کاٹی گئی دھان کی ذخیرہ اندوزی کے لیے کتنے تھیلیوں کی ضرورت ہوتی ہے؟ معلم کرنے کے لیے ہمیں رقبہ کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ حجم کی ضرورت پڑتی ہے۔

کوشش کیجیے

1۔ حسب ذیل موقعوں یا صورتحال کا مشاہدہ کرتے ہوئے بتلائیے کہ ہر صورتحال میں حجم یا رقبہ میں کسی کی ضرورت درپیش ہوتی ہے؟ اور کیوں؟ وضاحت کیجیے۔

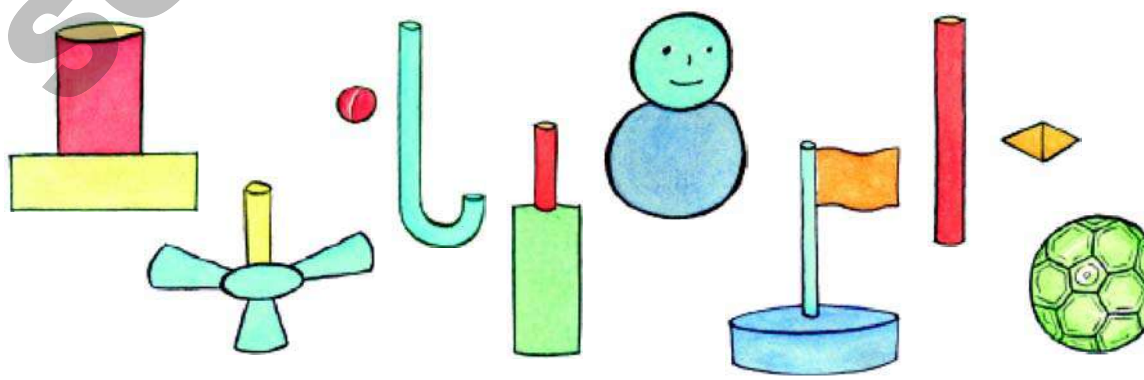
(i) بوتل میں پانی کی گنجائش معلوم کرنا (ii) خیمہ (Tent) بنانے کے لیے درکار کپڑا

(iii) لاری میں موجود تھیلیوں کی تعداد (iv) سلنڈر میں بھری ہوئی گیس

(v) دیاسلائی کی ڈبیہ میں تیلیوں کی ممکنہ تعداد

2۔ ایسے مزید 5 مثالیں ترتیب دیجیے اور اپنے ساتھی سے سوالات کیجیے کہ کس کی ضرورت ہوتی ہے؟

ہم اپنے اطراف واکناف میں مختلف اشکال (دو یا دو سے زائد اشکال کا مجموعہ) دیکھتے ہیں۔ ستون پر ٹھہرے ہوئے مکان استوانہ نما پانی کے ٹانکیوں کی مکعبی ستون پر تنصیب، استوانہ نما کرکٹ بیاٹ کا دستہ جبکہ بلے کا مسطح ہونا وغیرہ۔ اپنے اطراف واکناف کے مختلف اشیاء پر غور کیجیے۔ ان میں سے چند ذیل میں دیے گئے ہیں۔



SCERT TELANGANA

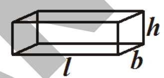
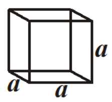
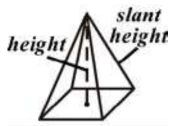
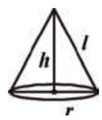
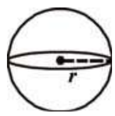
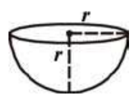
آپ صرف واحد منتظم ٹھوس کا سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کا طریقہ سیکھ چکے ہیں۔لیکن بعض اشیاء ایسے بھی دیکھے جاتے ہیں جو دو یا دو سے زائد ٹھوس اشیاء کی اشکال کا مجموعہ ہوتے ہیں۔لہذا ان کے طرفی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔ذیل کے جدول میں چند ٹھوس اشیاء کی اشکال ان کے رقبے اور حجم کے ضوابط دیئے گئے ہیں۔

کوشش کیجیے

1۔ درج بالا اشکال کو ان کی شکل کی مناسبت سے واقف اشکال میں علاحدہ کیجیے۔

2۔ اپنے اطراف و اکناف میں پائے جانے والے 5 ایسی اشیاء کی نشاندہی کیجیے جو دو یا دو سے زائد اشکال کا مجموعہ ہوان کے اشکال کے نام دیجیے۔

آیئے ٹھوس اجسام کے طرفی سطحوں کا رقبہ اور حجم کے ضوابط کا اعادہ کرتے ہیں۔

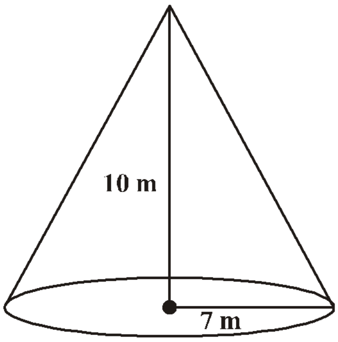
سلسلہ نشان	ٹھوس اجسام کے نام	شکل/وضع	طرفی/منحنی سطح کا رقبہ	کل سطح کا رقبہ	حجم Volume	اصطلاحی تفصیلات
1	مکعب نما		$2h(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l=طول b=عرض h=بلندی
2	مکعب		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a=مکعب کا ضلع
3	قائم منشور		بلندی × قاعدہ کا احاطہ	طرفی رخوں کا رقبہ 2(قاعدہ کا رقبہ)	× قاعدہ کا رقبہ بلندی	-
4	قائم مدوری استوانہ		$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$	πr^2h	r=قاعدہ کا نصف قطر h=بلندی
5	قائم اہرام		$\frac{1}{2}$ (قاعدے کا احاطہ) × مائل بلندی	قاعدے کا رقبہ+ طرفی سطحوں کا رقبہ	$\frac{1}{3}$ × قاعدہ کا رقبہ × بلندی	-
6	قائم مدوری مخروط		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	r=قاعدے کا نصف قطر h=بلندی l=مائل بلندی
7	کرہ		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r=نصف قطر
8	نصف کرہ		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r=نصف قطر

SCERT TELANGANA

آ یئے چند مثالوں جدول میں دیے گئےٹھوس اجسام کے طرفی سطح کا رقبہ کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنے کی وضاحت کریں گے۔

مثال-1: مخروط نما ڈیرہ کے قاعدے کا نصف قطر 7 میٹر اور بلندی 10 میٹر ہے۔ اگر کیانوس کی چوڑائی 2 میٹر ہو تو اس ڈیرے کی تیاری کے لیے درکار کیانوس کا طول کیا ہوگا۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیا جائے)

حل: ڈیرے کے قاعدے کا نصف قطر (r) = 7 میٹر



بلندی (h) = 10 میٹر

(مخروط کی مائل بلندی) $l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{49+100}$

$= \sqrt{149}$ = 12.2 میٹر

ڈیرے کے طرفی سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 12.2 \; m^2$

= 268.4 مربع میٹر

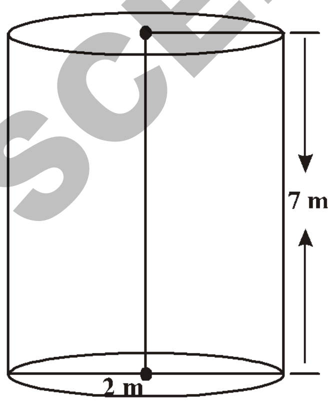
استعمال کیے گئے کیانوس کا رقبہ = 268.4 مربع میٹر

کیانوس کی چوڑائی = 2 میٹر

کیانوس کا طول = $\frac{\text{رقبہ}}{\text{چوڑائی}} = \frac{268.4}{2}$ = 134.2 = 134.2 میٹر

مثال-2: ایک استوانی تیل کے ڈرم کے قاعدے کا قطر 2 میٹر اور بلندی 7 میٹر ہے۔ اس استوانی ڈرم کو پینٹ کرنے کا خرچہ بحساب 3` فی مربع میٹر ہو تو 10 ڈرم کو پینٹ کرنے کا جملہ خرچہ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ استوانی تیل کے ڈرم کا قطر (d) 2 میٹر ہے



استوانہ کا نصف قطر $= \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1\,m$

استوانی تیل کے ڈرم کا کل سطحی رقبہ $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 1(1+7)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$

$= \frac{352}{7}$ 50.28 مربع میٹر

لہذا 50.28 مربع میٹر= ڈرم کا کل سطحی رقبہ

فی مربع میٹر پینٹ کرنے کا خرچ = `3

10 ڈرم کے لیے درکار لاگت = 50.28×3×10

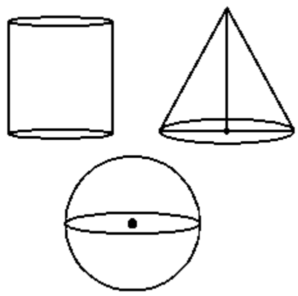
= `1508.4

مثال-3: اگر ایک کرہ، ایک استوانہ اور ایک مخروط یکساں بلندی اور نصف قطر رکھتے ہیں تب ان کے منحنی سطح کے رقبوں میں نسبت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ کرہ، استوانہ اور مخروط کا نصف قطر 'r' ہے تب

کرہ کا قطر = کرہ کی بلندی = 2r

تب $2r$ = کرہ کی بلندی = استوانہ کی بلندی = مخروط کی بلندی



مخروط کی مائل بلندی (l) = $\sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{r^2+(2r)^2} = \sqrt{5}r$

S_1 = کرہ کی طرفی سطح کا رقبہ = $4\pi r^2$

S_2 = استوانہ کی طرفی سطح کا رقبہ = $2\pi rh = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

S_3 = مخروط کا طرفی سطح کا رقبہ = $\pi r l = \pi r \times \sqrt{5}r = \sqrt{5}\pi r^2$

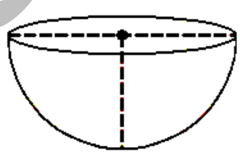
$S_1 : S_2 : S_3 = 4\pi r^2 : 4\pi r^2 : \sqrt{5}\pi r^2$

$= 4 : 4 : \sqrt{5}$

مثال-4: ایک کمپنی نے یہ طئے کیا کہ وہ فولادی شیٹ سے 1000 نصف کروی بیسن (basin) بناتا ہے۔ اگر نصف کروی بیسن کا نصف قطر 21 سم ہو تب 1000 بیسن کی تیاری کے لیے فولادی شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: نصف کروی بیسن کا نصف قطر (r) = 21 سم

نصف قطر کروی بیسن کی طرفی سطح کا رقبہ = $2\pi r^2$



$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

= 2772 مربع سم

SCERT TELANGANA

2772 مربع سمر = ایک بیسن کی تیاری کے لیے درکار فولادی شیٹ

1000 × 2772 = 1000 بیسن کی تیاری کے لیے درکار فولادی شیٹ کا رقبہ

= 2772000 مربع سمر

= 277.2 مربع میٹر

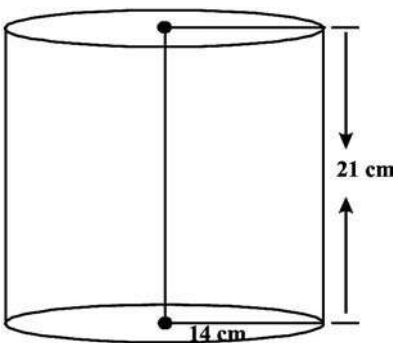
مثال-5: ایک قائم مدوری کا استوانہ کے قاعدے کا نصف قطر 14 سمر اور بلندی 21 سمر ہو تب ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i قاعدے کا رقبہ   (ii منحنی سطح کا رقبہ

(iii کل سطحی رقبہ اور   (iv قائم مدوری استوانہ کا حجم

حل: 14cm = (r) استوانہ کا نصف قطر

21cm = (h) استوانہ کی بلندی



اب (i) 616 مربع سمر = $\frac{22}{7}\times(14)^2$ = πr^2 = قاعدے کا رقبہ

(ii) 1848 مربع سمر = $2\times\frac{22}{7}\times14\times21$ = $2\pi rh$ = منحنی سطح کا رقبہ

(iii) منحنی سطح کا رقبہ × قاعدے کا رقبہ × 2 = کل سطحی رقبہ

3080 مربع سمر = $2\times616+1848$ =

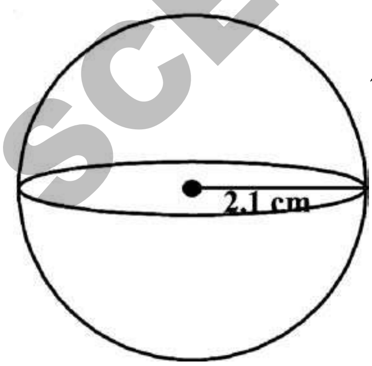
(iv) بلندی × قاعدے کا رقبہ = $\pi r^2 h$ = استوانہ کا حجم

12936 مکعب سمر = 616×21 =

مثال-6: 2.1 سمر نصف قطر والے کرہ کے طرفی سطح کا رقبہ، اور حجم معلوم کیجیے ($\pi=\frac{22}{7}$)

حل: 2.1 سمر = (r) کرہ کے نصف قطر

$4\pi r^2$ = کرہ کے طرفی سطح کا رقبہ



$$=4\times\frac{22}{7}\times(2.1)^2=4\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{10}\times\frac{21}{10}$$

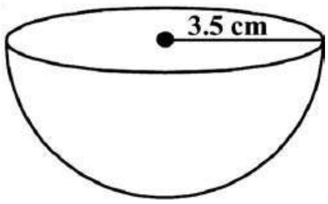
$$=\frac{1386}{25}=55.44\text{ cm}^2$$

کرہ کا حجم $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(2.1)^3$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808 \text{ cm}^3$$

مثال-7: ایک نصف کرے کے کل سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے جبکہ نصف کرہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



حل: نصف کرہ کا نصف قطر (r) = 3.5 سمر = $\frac{7}{2}$ سمر

نصف کرہ کا حجم = $\frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{539}{6} = 89.83 \text{ cm}^3$$

کل سطحی رقبہ = $3\pi r^2$

$= 3 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{231}{2} =$ 115.5 مربع سمر

مشق - 10.1

1۔ ایک جوکر کی ٹوپی قائم مدوری مخروط نما ہے جس کا نصف قطر 7 سمر اور بلندی 24 سمر ہے اس قسم کے 10 ٹوپی بنانے کے لیے درکار شیٹ کا رقبہ کیا ہوگا؟

2۔ کھیل کی اشیاء بنانے والی کمپنی شٹل کاک (Shuttle cocks) کی ذخیرہ اندوزی کے لیے 100 استوانہ نما (کاغذ) مقوے کے ڈبے بنانا چاہا۔ استوانہ نما ڈبے کے ابعاد طول/ بلندی 35 سمر اور نصف قطر 7 سمر ہے۔ 100 ڈبوں کی تیاری کے لیے درکار کاغذ کے شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے؟

3۔ اگر ایک قائم مدوری مخروط کا نصف قطر 6 سمر اور بلندی 7 سمر ہے تب اس کا حجم معلوم کیجیے؟

4۔ ایک استوانہ کا طرفی سطح رقبہ، مخروط کی منحنی سطحی کے رقبہ کے مساوی ہے۔ اگر ان دونوں کے قاعدے مساوی ہوں تب استوانہ کی بلندی اور مخروط کی مائل بلندی کے درمیان نسبت معلوم کیجیے؟

5۔ ایک امداد باہمی گروپ (Self help group) نے 3 سمر نصف قطر اور 4 سمر بلندی والے مخروط نما جوکر کی ٹوپیاں بنانا چاہا۔ اگر ان کے پاس 1000 مربع سمر رنگین کاغذی شیٹ موجود ہو تو بتلائیے کہ ان سے کتنے ٹوپیاں بنائی جاسکتی ہیں؟

6۔ اگر ایک استوانہ اور مخروط کے نصف قطر اور بلندی مساوی ہیں تب بتلائیے کہ ان کے حجم 3:1 کی نسبت ہوں گے؟

7۔ ایک استوانہ نما لوہے کی سلاخ کی بلندی 11 سمر اور قاعدے کا قطر 7 سمر ہے تب 50 لوہے کی سلاخوں کا حجم معلوم کیجیے؟

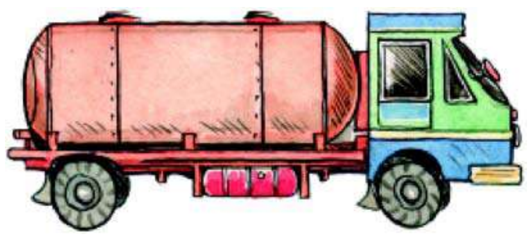
SCERT TELANGANA

8۔ ایک دھان کا ڈھیر مخروط نما ہے جس کا قطر 12 میٹر اور بلندی 8 میٹر ہے۔تب اس کا حجم معلوم کیجیے؟اس کو ڈھانکنے کے لیے کتنا کینوس درکار ہوگا؟ (π=3.14 لیجیے)

9۔ ایک مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ 4070 مربع سمر ہے۔اور اس کا قطر 70 سمر ہے تب اس کی مائل بلندی معلوم کیجیے؟

10.2 دو یا دو زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کا سطحی رقبہ

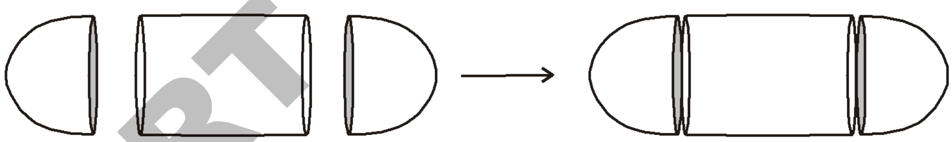
ہم اپنے اطراف و اکناف اکثر ایسی اشیاء دیکھتے ہیں جو دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھتے ہیں جیسے کرہ، استوانہ اور مخروط۔اس کے علاوہ اپنی روزمرہ زندگی میں بھی کئی ایسی اشیاء کا مشاہدہ کرتے ہیں جیسے لکڑی کے اشیاء، گھریلو سامان، کیپسل گولیاں (Capsules)، بوتل، تیل کے ٹینکر وغیرہ۔ہم آئس کریم سے بھی لطف اندوز ہوتے رہتے ہیں کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان میں کتنے ٹھوس اجسام موجود ہیں؟ عام طور پر یہ مخروط اور نصف کرہ سے ملکر بنتا ہے۔

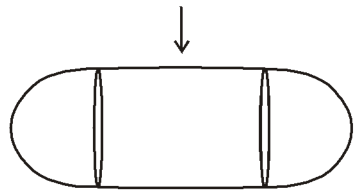


آیئے ایک اور مثال تیل کے ٹینکر/ پانی کے ٹینکر کی لیتے ہیں۔کیا یہ ایک ہی وضع یا شکل رکھنے والا جسم ہے؟ اگر آپ اس کا بغور مشاہدہ کرتے ہیں تو یہ اندازہ لگائیں گے کہ یہ استوانہ کے ساتھ ساتھ (دونوں کناروں پر) نصف کرہ پر مشتمل ہے؟

مذکورہ بالا اجسام رکھنے والے اجسام کا سطحی رقبہ، حجم یا گنجائش آپ کس طرح معلوم کریں گے؟ ان اجسام کی درجہ بندی گذشتہ پیریڈس میں سیکھے ہوئے معلومات کی بنیاد پر نہیں کر سکتے ہیں؟

ہم دیکھ چکے ہیں کہ تیل کا ٹینکر، استوانہ اور نصف کرہ کا اجماع ہے۔دو نصف کرے استوانہ کے دونوں کناروں سے جڑے ہوئے ہیں۔ اسکو ذیل کی شکل کے ذریعہ بتایا جا سکتا ہے۔

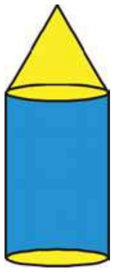




اس طرح تشکیل پائے نئے جسم کا سطحی دو رقبہ، نصف کرہ کے منحنی سطح کا رقبہ اور استوانہ کے طرفی سطحی رقبہ کے مجموعہ ہوتا ہے۔

دوسرے نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ (CSA)+ استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ (CSA)+ نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ نئے مجسم کا کل سطحی رقبہ

یہاں پر TSA سے مراد کل سطحی رقبہ اور CSA سے مراد منحنی سطح کا رقبہ ہے۔



آیئے ایک اور مثال پر غور کرتے ہیں۔

عاطف ایک کھلونا (Toy) تیار کرنا چاہتا ہے۔جو نصف کرہ اور مخروط پر مشتمل ہے۔آیئے اس کے تیار کرنے کے مراحل کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

پہلے مساوی نصف قطر کے مخروطی اور نصف کروی حصوں کو لینا چاہیے۔ تا کہ ان کے ہموار سطح ایک ساتھ ہوں۔ لہذا حسب ذیل مراحل اپنانا چاہیے۔

مرحلہ - I مرحلہ - II مرحلہ - III

مرحلے کے آخر میں عاطف کو ایسا کھلونا حاصل ہوگا۔ جس کا نچلا حصہ گول ہوگا۔ اب اس کھلونے کی رنگریزی کرنے کے لیے درکار پینٹ کی مقدار جاننے کے لیے کھلونے کے کل سطح کا رقبہ جاننا ضروری ہے۔ اس لیے عاطف کو چاہیے کہ وہ نصف کرہ کا CSA اور مخروط کا CSA معلوم کرے کیونکہ یہ کھلونا دو ٹھوس اجسام کا مجموعہ ہے۔ لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ

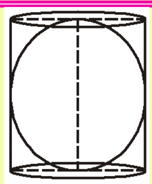
مخروط منحنی سطح کا رقبہ (CSA) + نصف کرہ کی منحنی سطح کا رقبہ (CSA) = کھلونے کا کل سطحی رقبہ TSA

کوشش کیجیے

معلوم ٹھوس اجسام کی مدد سے ممکنہ کھلونے تیار کیجیے (جو دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ ہو) جنہیں آپ اپنی روزمرہ زندگی میں دیکھتے ہیں۔

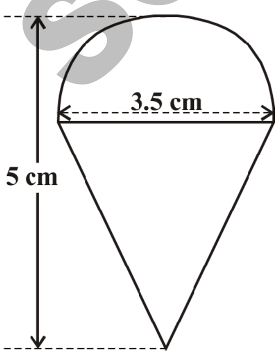
(اشارہ: چکنی مٹی، گیند، پائپ، کاغذ کے مخروط، مکعب اور مکعب نما بکسے وغیرہ استعمال کیجیے)

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے



استوانہ نما برتن میں کرہ تشکیل دیا گیا۔ کیا کرہ کے طرفی سطح رقبہ اور استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ کے مساوی ہوگا؟ اگر آپ کا جواب 'ہاں' ہو تو کس طرح یہ ممکن ہوگا وضاحت کیجیے۔

مثال-8: ''اسرار'' کی یوم پیدائش پر ایک سادہ لٹو طوفہ میں ملا جس پر رنگ نہیں لگا ہوا تھا۔ وہ اس لٹو کو رنگنا چاہتا ہے۔ جو ایک مخروط پر نصف کرہ نما ہے۔ لٹو کی کل بلندی 5 سمر اور کرّہ کا قطر 3.5 سمر ہے تب اس کو مکمل رنگ کرنے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$)



حل: لٹو کی شکل ایک مخروط کے اوپر نصف کرہ پر مشتمل ہے۔ جس کے نصف قطر مساوی ہیں۔

اس طرح مخروط منحنی سطح کا رقبہ+مخروط سطح کا منحنی رقبہ=لٹو کا کل سطحی رقبہ

$\therefore$ نصف کرّہ کا منحنی سطح کا رقبہ لینے پر رقبہ

$$= \frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right) = 2\pi r^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) = cm^2$$

$\therefore$ مخروط کی بلندی لینے پر (نصف کرہ کا نصف قطر)-(لٹو کی بلندی)= مخروط کی بلندی

$$\text{مخروط کی بلندی} = \left(5-\frac{3.5}{2}\right) = \left(\frac{10-3.5}{2}\right) = \frac{6.5}{2} = 3.25cm$$

$\therefore$ مخروط کی مائل بلندی لینے پر

مائل بلندی $l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}\,cm = 3.7cm$

$\therefore$ مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ

$\therefore$ رقبہ $= \pi rl$

$\left(= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ مربع سمر

$\therefore$ لٹو کا کل سطحی رقبہ

کل سطحی رقبہ

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)cm^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times3.7\right)cm^2$$

$$= \frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}(3.5+3.7)cm^2 = \frac{11}{2}\times(3.5+3.7)cm^2$$

$= 39.6cm^2$ مربع سمر

نوٹ: آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ لٹو کا کل سطحی رقبہ ایک مخروط اور نصف کرّہ کے کل سطحی رقبوں کا مجموعہ نہیں ہوتا ہے۔

مثال-9: ایک قائم الزاویہ مثلث جس کا قاعدہ اور بلندی بالترتیب 15 سمر اور 20 سمر ہیں اگر مثلث وتر کے اطراف گردش کرتا ہے تب اس طرح بننے والے دوہرے مخروط کا حجم اور طرفی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے (p=3.14 لیجیے)

حل: فرض کرو کہ ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔

AB=15 سمر اور AC=20 سمر

فیثاغورث مسئلہ کی مدد سے ΔABC میں

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 15^2 + 20^2$

$BC^2 = 225 + 400 = 625$

$BC = \sqrt{625} = 25$ سمر

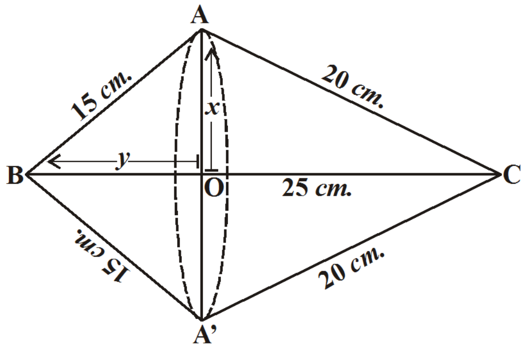
فرض کرو کہ OA=x اور OB=y

مثلث ABO اور ABC میں $\angle BOA = \angle BAC$ اور $\angle ABO = \angle ABC$ ہوگا

SCERT TELANGANA

اس لیے (زاویہ۔زاویہ متماثل اصول کی رو سے) $\Delta BOA \sim \Delta BAC$

اس لیے $\frac{BO}{BA} = \frac{OA}{AC} = \frac{BA}{BC}$



$\frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{15}{25}$

$\frac{y}{15} = \frac{x}{20} = \frac{3}{5}$

$\frac{y}{15} = \frac{3}{5}$ اور $\frac{x}{20} = \frac{3}{5}$

$y = \frac{3}{5} \times 15$ اور $x = \frac{3}{5} \times 20$

$y=9$ اور $x=12$

اس لیے $OA=12$ سمر اور $OB=9$ سمر

جب مثلث ABC وتر کے اطراف گردش کرتا ہے تب ہم کو دوہرا مخروط حاصل ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

مخروط BAA^1 کا حجم + مخروط CAA^1 کا حجم = دوہرے مخروط کا حجم

$= \frac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OC + \frac{1}{3}\pi(OA)^2 \times OB$

$= \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 16 + \frac{1}{3}\pi \times 12^2 \times 9$

$= \frac{1}{3}\pi \times 144(16+9)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 144 \times 25$ مکعب سمر

$=3768$ مکعب سمر

Note :

$\frac{1}{3}\pi(OA^2)(OC+OB)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12^2 \times (16+9)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 144 \times 25$

دوہرے مخروط کا سطحی رقبہ = (مخروط BAA^1 کا منحنی سطح کا رقبہ)+(مخروط CAA^1 کا منحنی سطح کا رقبہ)

$= \pi \times OA \times AC + \pi \times OA \times AB$

$= (\pi \times 12 \times 20) + (\pi \times 12 \times 15)$

$= 420\pi \quad cm^2$

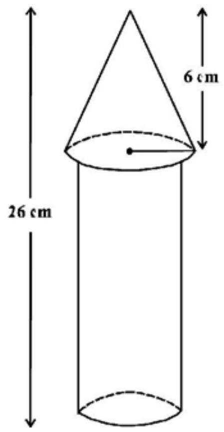
$= 420 \times 3.14 \quad cm^2$

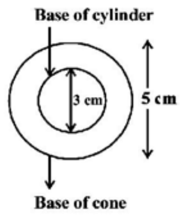
$= 1318.8 \ cm^2$

مثال-10: ایک لکڑی کا راکٹ نما (کھلونا) تیار کیا گیا۔استوانہ کے اوپر مخروط کو ٹھہرایا گیا جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے راکٹ کی جملہ بلندی 26 سمر ہے۔جبکہ مخروط کی بلندی 6 سمر ہے۔مخروط کے قاعدے کا قطر 5 سمر ہے جب کہ استوانہ کے قاعدے کا قطر 3 سمر ہے۔اگر مخروطی حصہ کو نارنجی رنگ (Orange) اور استوانہ نما ءحصہ کو زرد (Yellow) رنگ کرنا ہو تب ہر رنگ سے رنگین کیا ہوا راکٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3.14$ لیجیے)

حل: فرض کیجیے کہ مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 'r' اور مائل بلندی 'l' ہے۔اور

SCERT TELANGANA





اسی طرح استوانہ کا نصف قطر r_1 اور بلندی 'h_1' ہے

$r=$ 2.5 سمر ؛ $h=$ 6 سمر

$r_1=$ 1.5 سمر ؛ $h_1=$ 20 سمر

اب

$$l=\sqrt{r^2+h^2}$$

$$l=\sqrt{(2.5)^2+6^2}$$

$$l=\sqrt{6.25+36}=\sqrt{42.25}=6.5$$

اب نارنجی رنگریزی کے لیے

مخروط کے منحنی سطح کا رقبہ + مخروط کے قاعدے کا رقبہ - استوانے کے قاعدے کا رقبہ

$$\pi rl+\pi r^2-\pi r_1^2$$

$$=\pi\{(2.5\times 6.5)+(2.5)^2-(1.5)^2\}\ \text{cm}^2$$

$$=\pi(20.25)\ \text{cm}^2=3.14\times 20.25\ \text{cm}^2$$

$$=63.585\ \text{cm}^2$$

وہ حصہ جو زرد رنگریزی کے لیے = استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ + استوانے کے قاعدے کا رقبہ

$$=2\pi r_1h_1+\pi r_1^2$$

$$=\pi r_1(2h_1+r_1)$$

$$=3.14\times 1.5\ (2\times 20+1.5)$$

$$=3.14\times 1.5\times 41.5$$

$$=4.71\times 41.5$$

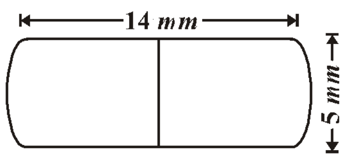
$=$ 195.465 مربع سمر

لہذا زرد رنگ کیا ہوا حصہ = 195.465

مشق 10.2

1۔ ایک کھلونا ہے جس میں نصف کرہ پر مخروط کو نصب کیا گیا ہے۔ مخروط کے قاعدے کا قطر اور بلندی بالترتیب 6 سمر اور 4 سمر ہے۔ تب کھلونے کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے (π=3.14 لیجیے)

2۔ ایک ٹھوس جسم قائم مدور استوانہ نما ہے۔ جس کے ایک کنارے پر نصف کرہ اور دوسرے کنارے پر مخروط نصب کیا گیا ہے مشترک قاعدے کا نصف قطر 8 سمر ہے جبکہ استوانی اور مخروطی حصے کی بلندی بالترتیب 10 سمر اور 6 سمر ہے تب ٹھوس جسم کی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے (π=3.14 لیجیے)



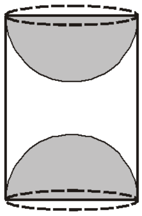
3۔ ایک دوائی کیپ سول (Capsule) استوانہ نما ہے جس کے دونوں کناروں پر نصف کرہ لگے ہوئے ہیں۔ Capsule کی لمبائی 14 ملی میٹر ہے۔ جبکہ چوڑائی 5 ملی میٹر ہے تب اس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ 64 مکعب سمر حجم والے دو مکعبوں کو ملایا گیا ہے اس طرح بننے والے نئے مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

5۔ ایک پانی کا ٹینکر استوانہ نما ہے اس کے دونوں جانب نصف کرہ جڑا ہوا ہے۔ اگر استوانہ کا بیرونی قطر 1.4 میٹر اور طول 8 میٹر ہو تب اس ٹینکر کو بیرونی جانب سے فی مربع میٹر 20 روپیے کے حساب سے رنگ ریزی کا خرچ معلوم کیجیے۔

6۔ اگر ایک کرہ، استوانہ اور مخروط مساوی نصف قطر اور بلندی رکھتے ہوں تب ان کے حجم میں نسبت معلوم کیجیے۔
(اشارہ: کرہ کا قطر، استوانے اور مخروط کی بلندی کے مساوی ہے)

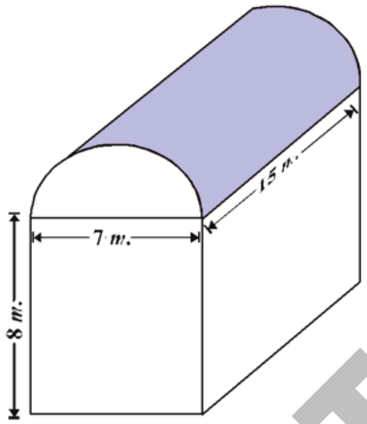


7۔ ایک مکعبی نما لکڑی کے کندے سے ایک نصف کرہ اس طرح کاٹ لیا گیا کہ نصف کرہ کا قطر، مکعب کے ضلع کے مساوی ہے تب باقی ٹھوس جسم کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک لکڑی سے بنائے گئے استوانی شئے کے دونوں جانب سے نصف کرہ نما حصوں کو علحدہ کر دیا گیا جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر استوانہ کی بلندی 10 سمر اور اس کے قاعدہ کے نصف قطر 3.5 سمر ہو تو شئے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

10.3۔ دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے جسم کا حجم

آیئے مثال کے ذریعہ دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے جسم کا حجم معلوم کرنے کا طریقہ سمجھیں گے۔



سلیم ایک شیڈ میں فیکٹری چلاتا ہے۔ جو کہ مکعب نما پر نصف استوانہ ٹھہرانے کے مانند ہے۔ شیڈ کے قاعدے کا ابعاد 7 میٹر اور 15 میٹر ہے اور ان کی بلندی مکعب نما حصہ کی بلندی 8 میٹر ہے تب اس شیڈ میں موجود ہوا کی گنجائش یا حجم معلوم کیجیے؟ مزید شیڈ میں موجود مشنری 300 مکعب میٹر جگہ گھیرتی ہے۔ اور 20 مزدور اوسطاً 0.08 مکعب میٹر جگہ گھیرتے ہیں تب اس شیڈ میں موجود ہوا کا حجم معلوم کیجیے۔

شیڈ میں موجود ہوا کا حجم (مشنری اور مزدور نہ رہنے پر) مکعب نما حصہ میں موجود ہوا کا حجم اور نصف استوانہ میں موجود ہوا کے حجم کا مجموعہ ہوتا ہے۔ اگر مکعب نما کا طول، عرض اور بلندی بالترتیب 15 میٹر، 7 میٹر، اور 8 میٹر ہیں مزید نصف استوانہ کا قطر 7 میٹر اور اسکی بلندی 15 میٹر ہے۔

تب مطلوبہ حجم $=$ مکعب نما کا حجم $+ \frac{1}{2} \times$ استوانہ کا حجم

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] m^3$$

$$= 1128.75 m^3$$

بعد از، مشنری کی گھیری ہوئی مکمل جگہ $= 300 \ m^3$

اور مزدوروں کی گھیری ہوئی جگہ $= 20 \times 0.08 \ m^3$

$= 1.6 \ m^3$

لہذا ہوا کا حجم جبکہ شیڈ میں مشنری اور مزدور موجود ہوں

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60)$$

$= 1128.75 - 301.60 = 827.15$ مکعب میٹر

SCERT TELANGANA

نوٹ: دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کے سطحی رقبہ میں دو ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں کو جمع نہیں کیا جا سکتا کیونکہ جب دو اجسام کو جوڑا جاتا ہے تو سطحی رقبہ کا کچھ حصہ چھپ جاتا ہے۔ لیکن حجم معلوم کرنے کے دوران ایسا نہیں ہوتا۔ دو یا دو سے زائد ٹھوس اجسام کا مجموعہ رکھنے والے شکل کا حجم' ان اشیاء کے حجم اجسام کا مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ جن کو جوڑ کر شکل حاصل کی گئی ہے جیسا کہ اوپر کی مثال میں دیکھا گیا ہے۔

کوشش کیجیے

1۔ اگر ایک تار (Wire) کے عمودی تراش کے قطر میں 5% کمی کردی جائے تب اس کے طول میں کتنے فیصد اضافہ کیا جائے تا کہ اس کے حجم میں تبدیلی واقع نہ ہو۔

2۔ اگر کرہ اور مکعب کا طرفی سطح کا رقبہ مساوی ہو تب ان کے حجم کے درمیان نسبت معلوم کیجیے؟

آیئے مزید مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مثال-11: ایک ٹھوس کھلونا جو قائم مدور استوانہ نما ہے اس کے دو کناروں پر ترتیب وار نصف کرہ اور مخروط جڑے ہوئے ہیں ان کا مشترک قطر 4.2 سمر ہے جبکہ استوانہ اور مخروط نما حصوں کی بلندی بالترتیب 12 سمر اور 7 سمر ہے تب ٹھوس کھلونے کا حجم معلوم کیجیے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: فرض کرو کہ مخروط نما حصہ کی بلندی h_1 = 7 سمر

استوانہ نما حصہ کی بلندی h_2 = 12 سمر

نصف قطر (r) = $\frac{4.2}{2} = 2.1 = \frac{21}{10}$ سمر

ٹھوس کھلونے کا حجم = مخروط کا حجم + استوانہ کا حجم + نصف کرہ کا حجم

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r^3$$

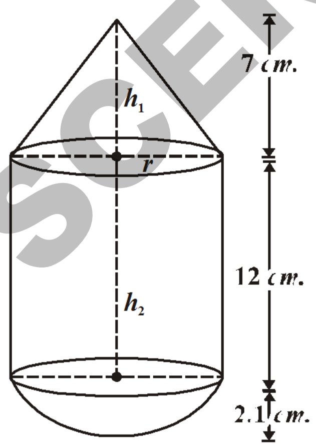
$$= \pi r^2\left[\frac{1}{3}h_1 + h_2 + \frac{2}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{10}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3}\times 7 + 12 + \frac{2}{3}\times\frac{21}{10}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{7}{3} + \frac{12}{1} + \frac{7}{5}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \left[\frac{35+180+21}{15}\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{441}{100} \times \frac{236}{15} = \frac{27258}{125} = 218.064 \text{ cm}^3.$$



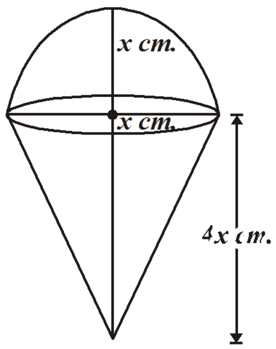
SCERT TELANGANA

مثال-12: ایک استوانہ نما برتن کو آئس کریم سے پُر کیا گیا جس کا قطر 12 سم اور بلندی 15 سم ہے اس آئس کریم کو اوپری نصف کروی نما مخروط میں مساوی طور پر پُر کر کے 10 بچوں میں تقسیم کیا گیا۔ اگر مخروط نما حصہ کی بلندی اس کے قاعدے کے قطر کا دُگنا ہو تب آئس کریم کا قطر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ مخروط نما آئس کریم کے قاعدے کا نصف قطر = x سم

قطر = $2x$ سم

تب مخروطی آئس کریم کی بلندی = $2($قطر$) = 2(2x) = 4x$ سم



نصف کروی حصہ کا حجم + مخروط نما حصہ کا حجم = مخروطی آئس کریم کا حجم

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi x^2 (4x) + \frac{2}{3}\pi x^3$$

$$= \frac{4\pi x^3 + 2\pi x^3}{3} = \frac{6\pi x^3}{3}$$

$$= 2\pi x^3 \text{ m}^3$$

استوانہ نما برتن کا قطر = 12 سم

اس کی بلندی = 15 سم

لہذا

استوانہ نما برتن کا حجم = $\pi r^2 h$

$= \pi(6)^2 15$

$= 540$ مکعب سم

بچوں کی تعداد جن میں آئس کریم تقسیم کی گئی = 10

$\dfrac{\text{استوانہ نما برتن کا حجم}}{\text{ایک آئس کریم کون (مخروط) کا حجم}} = 10$

$$\Rightarrow \frac{540\pi}{2\pi x^3} = 10$$

$$2\pi x^3 \times 10 = 540\pi$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{540}{2\times 10} = 27$$

$$\Rightarrow x^3 = 27$$

SCERT TELANGANA

$$\Rightarrow x^3 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

لہذا آئس کریم کون کا قطر $= (2x)$

$= 2\times 3 = 6$ سم

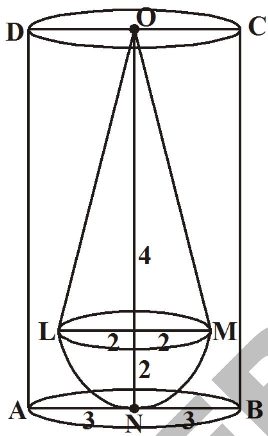
مثال-13: ایک ٹھوس جسم جو قائم مدور مخروطی شکل ہے جس کو ایک نصف کرہ پر ٹھہرا گیا ہے۔ اس ٹھوس جسم کو پانی سے بھرے ایک قائم مدور استوانہ نما برتن میں اسطرح رکھا گیا ہے کہ برتن کے نچلے حصہ سے مس ہو جائے۔ تب استوانہ نما برتن بچے ہوئے پانی کا حجم معلوم کیجیے جبکہ استوانہ نما برتن کا نصف قطر 3 سم، بلندی 6 سم اور نصف کرہ کا نصف قطر 2 سم ہے جب کہ مخروط کی بلندی 4 سم ہے۔

($\pi = \frac{22}{7}$ لیا جائے)

حل: متصلہ شکل میں

ABCD ایک استوانہ نما برتن ہے، LMN نصف کرہ ہے اور OLM مخروط ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ جب ٹھوس جسم کو استوانہ نما برتن جس میں پانی بھرا ہوا ہے رکھا جائے ہے تو چھلکنے والے پانی کا حجم، ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہوگا۔



استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi \ \text{m}^3$

نصف کرہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\times\pi\times 2^3 = \frac{16}{3}\pi \ \text{m}^3$

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 4 = \frac{16}{3}\pi \ \text{m}^3$

$=$ ٹھوس جسم کا حجم $= \frac{16}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi$

$= \frac{32}{3}\pi$

استوانہ نما برتن میں بچے ہوئے پانی کا حجم $=$ (استوانہ کا حجم) $-$ (مخروط اور نصف کرہ کا حجم)

$=$ استوانہ کا حجم $- \frac{32}{3}\pi$

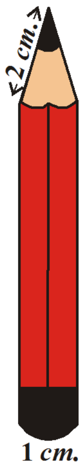
$$= 54\pi - \frac{32\pi}{3}$$

$$= \frac{130}{3}\times\frac{22}{7} = \frac{2860}{21} = 136.19 \quad \text{m}^3$$

SCERT TELANGANA

مثال-14: ایک استوانہ نما پنسل کے سرے کو تراش کر مخروطی شکل دی گئی اس طرح کہ اس کے طول میں کوئی کمی واقع نہ ہو۔ اگر پنسل کا قطر 1 سمر اور تراشے ہوئے مخروطی حصہ کا طول 2 سمر ہو تب تراشے ہوئے حصہ کا حجم معلوم کیجیے۔ جواب کو اعشاریہ کے دو مقامات تک محسوب کیجیے۔

($\pi = \frac{355}{113}$ لیا جائے)



حل: پنسل کا قطر = 1 سمر

تب پنسل کا نصف قطر (r) = 0.5 سمر

مخروطی حصہ کا طول = h = 2 سمر

استوانہ سے حاصل کردہ مخروط کا حجم - استوانہ کا حجم جس کا طول 2 سمر اور نصف قطر 0.5 سمر = تراشے ہوئے حصہ کا حجم

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{355}{113} \times (0.5)^2 \times 2 \text{ cm}^3 = 1.05 \text{ cm}^3$$

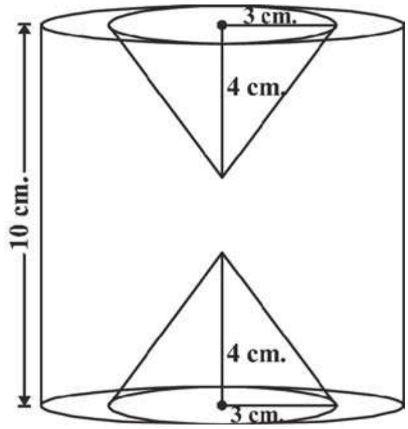
مشق 10.3

1۔ ایک استوانہ نما لوہے کا برتن جس کی بلندی 2.8 میٹر اور قطر 20 سمر ہے۔ اس پر 42 سمر بلندی والا مخروط نصب کیا گیا ہے۔ اگر ایک مکعب سمر لوہے کا وزن 7.5 گرام ہو تب اس لوہے کے ستون کا وزن کیا ہوگا؟

2۔ ایک کھلونا جو ایک نصف کرہ کے اوپری سطح پر مخروط نما حصہ کو اس طرح نصب کیا گیا کہ اس کا قاعدہ نصف کرہ کے ہموار سطح سے جڑا ہوا ہے۔ اگر مخروط کے قاعدے کا نصف قطر 7 سمر اور اس کا حجم نصف کرہ کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنا ہے تب مخروط کی بلندی اور کھلونے کا سطحی رقبہ اعشاریہ کے دو مقام تک معلوم کیجیے۔ ($\pi = 3\frac{1}{7}$ لیجیے)

3۔ اعظم ترین قائم مدور مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ جس کو 7 سمر ضلع والے مکعب سے علاحدہ کیا گیا ہے۔

SCERT TELANGANA

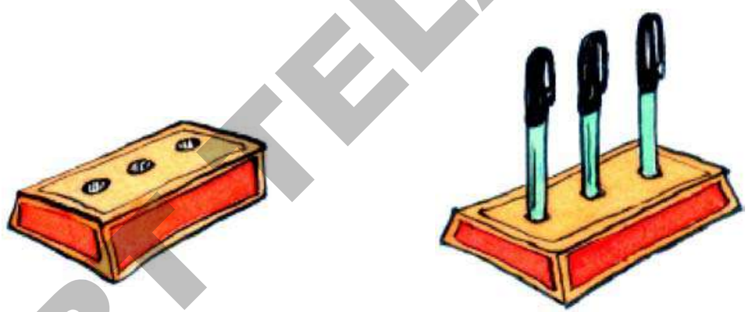


4۔ ایک استوانہ نما برتن جس کا نصف قطر 5 سمر اور بلندی 9.8 سمر ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے۔مخروطی شکل کا ٹھوس جسم جو کہ نصف کرہ پر نصب ہے کو جس کو اس برتن میں ڈالا گیا۔نصف کرہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے اور مخروطی حصہ کی بلندی 5 سمر ہے تب استوانہ نما برتن میں بچے ہوئے پانی کا حجم معلوم کیجیے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

5۔ متصلہ شکل میں ایک ٹھوس استوانہ کی بلندی 10 سمر اور قطر 7 سمر ہے دومساوی مخروطی حصوں کو شکل کے مطابق نکال دیا گیا ہے جس کا نصف قطر 3 سمر اور بلندی 4 سمر ہو۔استوانہ کے بچے ہوئے حصے کا حجم معلوم کیجیے۔

6۔ 1.4 سمر قطر کے کروی شکل کی کنچوں (Marbles) کو 7 سمر استوانہ نما برتن میں ڈالا گیا جس میں پانی کی کچھ مقدار موجود ہے۔ تب کنچوں کی تعداد معلوم کیجیے جس کو برتن میں ڈالنے پر پانی کی سطح میں 5.6 سمر کا اضافہ ہوجائے۔

7۔ لکڑی کا بنا ہوا Pen stand جو کہ مکعب نما (Cuboid) شکل کا ہے جس میں تین مخروط نما خول ہیں۔مکعب نما کے ابعاد 15 سمر 10 سمر اور 3.5 سمر ہیں۔ ہر خول کا نصف قطر 0.5 سمر اور گہرائی 1.4 سمر ہے۔اس اسٹانڈ میں مستعملہ لکڑی کا حجم معلوم کیجیے۔



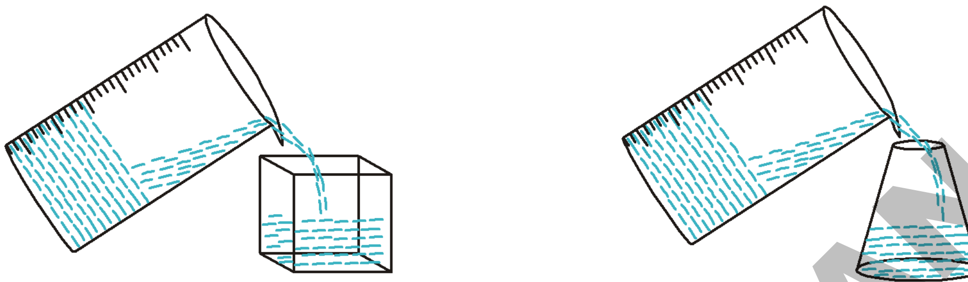
10.4 ٹھوس اجسام کی ایک شکل سے دوسری میں شکل میں تبدیلی

ایک ڈواکرا (DWACRA) گروپ مکعب نما موم کو پگلا کر موم بتی بناتا ہے۔ بندوق کی فیکٹری میں مکعب نما ٹھوس سیسہ کو پگھلا کر بندوق کی گولی تیار کی جاتی ہے۔ایک جوہری مکعب نما سونے (Gold) کے بسکٹ کو پگھلا کر زیوارت بناتا ہے۔ان تمام صورتوں میں ٹھوس اجسام کی ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیلی لائی گئی۔اس عمل میں ٹھوس کے حجم میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

یہ کیسے ممکن ہے؟ اگر آپ کو کسی مخصوص وضع میں موم بتی بنانا ہو تو موم کو پگھلا کر گرم کر کے مائع کی حالت میں تبدیل کرنا ہوگا پھر اس مخصوص وضع والے سانچہ میں ڈال کر حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ایک استوانہ نما موم بتی لے کر اس کو پگھلائیے اور اسے مکعب کی شکل کے سانچے میں ڈالیے۔ ٹھنڈا ہونے پر آپ کو مکعب کی

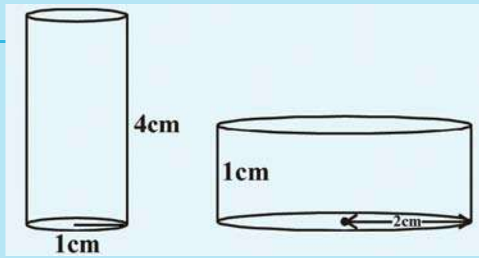
شکل والی موم بتی حاصل ہوگی۔ حاصل ہونے والی موم بتی کا حجم پہلے والے موم بتی کے حجم کے مساوی ہوگا۔اس طرح یہ بات ذہن نشین کر لینی چاہیے کہ اشیاء کو ایک شکل سے دوسری شکل میں ڈھالا جائے یا مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈال کر مختلف وضع حاصل کرنے کے باوجود ان کے حجم میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ ذیل کے تصویر کا مشاہدہ کیجیے۔



سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

متصلہ شکل کے کسی برتن میں زیادہ پانی سمائے گا؟

ساتھیوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔



اب تک سیکھے گئے نکات کی تقویت بخش تفہیم کے لیے چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال-15: چکنی مٹی سے ایک مخروط بنایا گیا جس کی بلندی 24 سمر اور قاعدے کا نصف قطر 6 سمر ہے۔ ایک بچے نے اسی کو کروی شکل دی تب کروی شکل کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل: مخروط کا حجم = مکعب سمر $\frac{1}{3}\times\pi\times6\times6\times24$

اگر 'r' کرہ کا نصف قطر ہو تب اس کا حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$ ہوگا۔

چونکہ چکنی مٹی کا حجم دونوں صورتوں (کرہ اور مخروط) میں مساوی رہے گا۔

لہذا

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\times\pi\times6\times6\times24$$

$$r^3 = 3\times 3\times 24 = 3\times 3\times 3\times 8$$

$$r^3 = 3^3\times 2^3$$

$$r = 3\times2 = 6$$

لہذا کرہ کا نصف قطر 6 سمر ہوگا

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

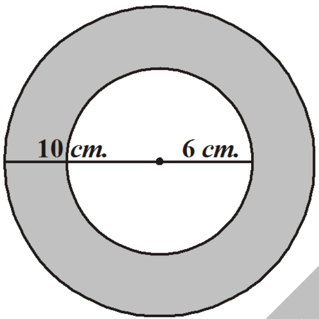
1۔ ایک تانبہ کی سلاخ لی گئی جس کا قطر 1 سمر اور طول 8 سمر ہے۔اس سلاخ کو 18 میٹر طویل تار (Wire) میں تبدیل کیا گیا اس طرح کہ اس کی موٹائی یکساں رہے۔تار (Wire) کی موٹائی معلوم کیجیے۔

2۔ تقدیس کے گھر کی چھت پر ایک استوانہ نما پانی کی ٹانکی رکھی ہوئی ہے اس ٹانکی میں مکعب نما شکل والے زیرزمین حوض (Sump) سے موٹر کے ذریعہ سے پانی چڑھایا جاتا ہے۔زیرزمین حوض کے ابعاد 1.57 میٹر، 1.44 میٹر اور 9.5 میٹر ہیں۔جبکہ پانی کی ٹانکی کا نصف قطر 60 سمر اور بلندی 95 سمر ہے۔اگر مکمل بھرے ہوئے زیرزمین حوض میں موجود پانی سے ٹانکی کو مکمل بھر دیا جائے تب حوض میں باقی رہنے والے پانی کی بلندی معلوم کیجیے۔ٹانکی کا حجم اور حوض کے حجم کا تقابل کیجیے۔(π=3.14 لیجیے)

مثال-16: ایک کھلی نصف کروی شئے کے اندرونی اور بیرونی سطح کے قطر بالترتیب 6 سمر اور 10 سمر ہے۔اس شئے کو پگھلا کر 14 سمر قطر والا ٹھوس حاصل کیا گیا ہے۔استوانہ کی بلندی معلوم کیجیے۔

حل: کھوکھلے نصف کرہ کا بیرونی نصف قطر $R = \frac{10}{2} = 5$ سمر

اندرونی نصف قطر $r = \frac{6}{2} = 3$ سمر



کھوکھلے نصف کرہ کا حجم = بیرونی حجم - اندرونی حجم

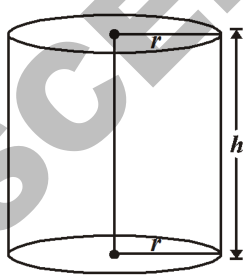
$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(5^3 - 3^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(125 - 27)$$

$$= \frac{2}{3}\pi \times 98\,cm^3 = \frac{196\pi}{3}\,cm^3 \quad ....(i)$$



چوں کہ کھوکھلے نصف کرہ کو پگھلا کر استوانہ میں تبدیل کیا گیا ہے

اس لیے دونوں کا حجم مساوی ہوگا۔

استوانہ کا قطر = 14 سمر (دیا گیا)

لہذا استوانہ کا نصف قطر $= \frac{14}{2} = 7$ سمر

SCERT TELANGANA

فرض کرو کہ استوانہ کی بلندی = h

استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 7 \times 7 \times h = 49\pi\ cm^3$ .... (2)

سوال کے مطابق

ٹھوس استوانہ کا حجم = کھوکھلے نصف کرہ کا حجم

مساوات (1) اور (2) لینے سے $\frac{196}{3}\pi = 49\pi h$

$$\Rightarrow h = \frac{196}{3\times 49} = \frac{4}{3}\text{ cm.} = 1.33 \text{ سمر}$$

لہٰذا استوانہ کی بلندی 1.33 سمر ہوگی۔

مثال-17: ایک نصف کروی برتن مائع سے بھرا ہوا ہے جس کا اندرونی نصف قطر 15 سمر ہے' اس مائع کو 5 سمر قطر اور 6 سمر بلندی والی استوانی بوتلوں میں بھرنے کے لیے کتنے بوتلوں کی ضرورت ہوگی؟

حل: نصف کرہ کا حجم $= \frac{2}{3}\pi r^3$

نصف کرہ کا اندرونی نصف قطر r = 15 سمر

نصف کروی برتن میں بھرے ہوئے مائع کا حجم $= \frac{2}{3}\pi(15)^3\ cm^3$

$= 2250\pi cm^3$

مائع کو استوانی بوتلوں میں بھرا گیا ہے۔

استوانہ نما بوتل کی بلندی (h) = 6 سمر

استوانہ نما بوتل کا نصف قطر (R) = $\frac{5}{2}$ سمر

استوانہ نما بوتل کا حجم $= \pi R^2 h$

$$= \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 6$$

$$= \pi \times \frac{25}{4} \times 6\,cm^3$$

$$= \frac{75}{2}\pi\ cm^3$$

SCERT TELANGANA

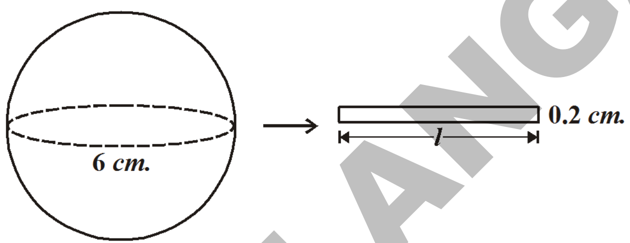
$$\text{مائع کو بھرنے کے لیے درکار بوتلوں کی تعداد} = \frac{\text{نصف کروی برتن کا حجم}}{\text{استوانہ نما ایک بوتل کا حجم}}$$

$$= \frac{2250\pi}{\frac{75}{2}\pi} = \frac{2\times 2250}{75} = 60$$

مثال-18: 6 سمر قطر والے ایک دھاتی کرہ کو پگھلا کر 0.2 سمر قطر والے تار (wire) میں تبدیل کیا گیا۔ تو بتلایئے کہ تار کا طول کیا ہوگا؟

حل: دھاتی کرہ کا قطر = 6 سمر

دھاتی کرہ کا نصف قطر = 3 سمر



تار کا قطر = 0.2 سمر

تار کا نصف قطر = 0.1 سمر

فرض کیجیے کہ وائر کا طول h سمر ہے۔

چوں کہ دھاتی کرہ کو h سمر والے تار میں تبدیل کیا گیا

$\therefore$ تار میں استعمال کی گئی دھات کا حجم = کرہ کا حجم

$$\pi\times(0.1)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3$$

$$\pi\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times 27$$

$$\pi\times\frac{1}{100}\times h = 36\pi$$

$$h = \frac{36\pi\times 100}{\pi}$$

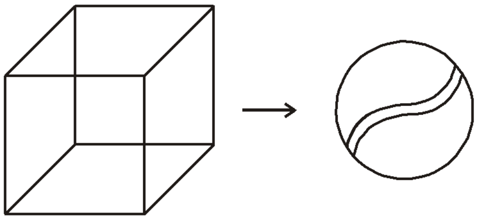
= 3600 سمر = 36 میٹر

لہٰذا تار کا طول 36 میٹر ہوگا۔

SCERT TELANGANA

مثال-19: 44 سم ضلع والے مکعب (Cube) شکل والے سیسہ (lead) سے 4 سم قطر والے کتنے کروی گیند تیار کئے جاسکتے ہیں؟

حل: سیسہ کے مکعب کا ضلع = 44 سم



کروی گیند کا نصف قطر = $\frac{4}{2}$ = 2 سم

کروی گیند کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

= $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 2^3$ مکعب سم

= $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8$ مکعب سم

x کروی گیندوں کا حجم = $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x$ مکعب سم

اس سے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ

مکعب والی شکل کے سیسہ کا حجم = x کروی گیندوں کا حجم

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = (44)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 8\times x = 44\times 44\times 44$$

$$\Rightarrow x = \frac{44\times 44\times 44\times 3\times 7}{4\times 22\times 8}$$

$$x = 2541$$

لہذا 2541 کروی گیندیں تیار کی جاسکتی ہیں۔

مثال-20: ایک امداد باہمی گروپ (ڈواکرا) 66 سم، 42 سم، 21 سم ابعاد والے مستطیلی ٹھوس مکعب نما موم سے جس کے ابعاد موم سے 4.2 سم قطر اور 2.8 سم بلندی والے استوانہ نما موم بتیاں تیار کرتا ہے۔ تب بتلائیے کہ اس نے کتنے موم بتیاں تیار کیے۔

حل: مکعب نما ٹھوس موم کا حجم = lbh

= $(66\times 42\times 20)\ \text{cm}^3$

استوانہ نما موم بتی کا نصف قطر = $\frac{4.2}{2}$ = 2.1 سم

استوانہ نما موم بتی کی بلندی = 2.8 سم

موم بتی کا حجم = $\pi r^2 h$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{22}{7} \times (2.1)^2 \times 2.8$$

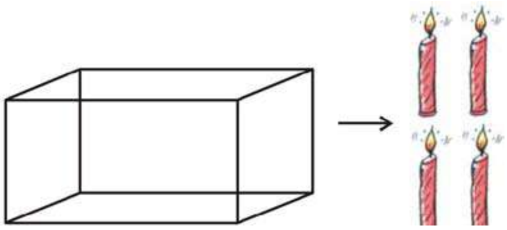
فرض کرو کہ موم بتیوں کی تعداد

x استوانہ نما موم بتیوں کا حجم $= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x$

مستطیلی ٹھوس موم کا حجم $=$ x استوانہ نما موم بتیوں کا حجم

$$\therefore \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8 \times x = 66 \times 42 \times 21$$

$$x = \frac{66 \times 42 \times 21 \times 7}{22 \times 2.1 \times 2.1 \times 2.8}$$



$$x = 1500$$

$\therefore$ تیار کیے جانے والے موم بتیوں کی تعداد $= 1500$

مشق - 10.4

1۔ ایک دھاتی کرہ جس کا نصف قطر 4.2 سمر ہے کو پگھلا کر 6 سمر نصف قطر والے استوانے میں تبدیل کیا گیا تو بتلایئے کہ استوانہ کی بلندی کیا ہوگی؟

2۔ تین دھاتی کرے جن کے نصف قطر ترتیب وار 6 سمر، 8 سمر اور 10 سمر ہیں کو پگھلا کر ایک کرہ بنایا گیا اس کرہ کا نصف قطر کیا ہوگا؟

3۔ کسی مقام پر 20 میٹر گہری 7 میٹر قطر والی باؤلی کھودی گئی ہے۔ اس سے حاصل ہونے والی مٹی کے ذریعہ 22 میٹر اور 14 میٹر ابعاد والا مستطیلی چبوترہ (Plat form) بنانا ہے۔ چبوترہ کی بلندی کیا ہوگی؟

4۔ 14 میٹر قطر والی 15 میٹر گہری باولی کھودی گئی۔ حاصل کی گئی مٹی سے باولی کے اطراف 7 میٹر چوڑا پشتہ بنایا گیا۔ پشتہ کی بلندی معلوم کیجیے۔

5۔ قائم مدوری استوانہ نما برتن میں آئس کریم بھرا گیا ہے جس کا قطر 12 سمر اور بلندی 15 سمر ہے اگر اس آئس کریم کو 12 سمر بلندی اور 6 سمر قطر والے مخروط (Cone) میں بھرا گیا ہے جس کے اوپر نصف کروی شکل ہے تب آئس کریم کے جملہ مخروط کی تعداد کیا ہوگی؟

6۔ 5.5cm×10cm×3.5cm ابعاد والے مکعب کی تیاری کے لیے 1.75 سمر قطر اور 2 ملی میٹر موٹائی والے کتنے چاندی کے سکوں کو پگھلانے کی ضرورت ہوگی؟

7۔ ایک برتن مخروط کی پلٹی ہوئی شکل میں ہے اس کی بلندی 8 سمر اور اس کے اوپری حصہ کا نصف قطر 5 سمر ہے برتن میں پانی مکمل طور پر بھرا ہوا ہے۔ اس میں 0.5 سمر نصف قطر والا ٹھوس کروی گولیاں نصف کرہ ڈالنے پر موجود پانی کا $\frac{1}{4}$ حصہ چھلک کر باہر گر جاتا ہے۔ تو بتلایئے کہ برتن میں جملہ کتنی گولیاں ڈالی گئی ہیں؟

8۔ 28 سمر قطر والے ایک ٹھوس کروی شئے کو پگھلا کر $4\frac{2}{3}$ سمر قطر اور 3 سمر بلندی والے چھوٹے مخروط میں تبدیل کیا گیا ہے تب بننے والے مخروط کی تعداد کیا ہوگی؟

SCERT TELANGANA

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ 4.1 سمر قطر والے ایک گولف گیند کی اوپری سطح پر 2 ملی میٹر قطر والے 150 گڑھے ہیں۔ اگر گڑھوں کو نصف کروی شکل میں تصور کیا جائے تب ان کا جملہ طرفی سطح کا رقبہ کیا ہوگا؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

2۔ 12 سمر نصف قطر والے ایک استوانہ نما برتن میں 20 سمر گہرائی تک پانی بھرا ہوا ہے ایک لوہے کے کروی گیند کو اس برتن میں ڈالنے پر پانی کی سطح میں 6.75 سمر اضافہ ہوا۔ بتایئے کہ استوانہ میں ڈالے گئے کروی گیند کا نصف قطر کیا ہوگا؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

3۔ ایک ٹھوس کھلونا جو قائم مدور استوانہ کی شکل کا ہے جس کے ایک کنارے پر نصف کرہ اور دوسرے کنارے پر مخروط نصب کیا گیا ہے ان دونوں کا مشترک قطر 4.2 سمر ہے۔ جبکہ استوانہ نما اور مخروطی حصوں کی بلندی بالترتیب 12 سمر اور 7 سمر ہے اس ٹھوس کھلونے کا حجم کیا ہوگا؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

4۔ 15 سمر، 12 سمر اور 9 سمر ضلع رکھنے والے تین فولادی مکعبوں کو پگھلا کر ایک مکعب میں تبدیل کیا گیا تب حاصل مکعب کے وتر کا طول معلوم کیجیے؟

5۔ 36 سمر اندرون نصف قطر والے ایک نیم کروی برتن میں مائع ڈالا گیا۔ اس مائع کو 3 سمر نصف قطر اور 6 سمر بلندی والی استوانی بوتلوں میں بھرنے کے لیے کتنی بوتلیں درکار رہوں گی؟

تجویز کردہ منصوبہ کام:

مربع نما 20 سمر x 20 سمر والے ایک شیٹ کے چاروں کونوں سے مربعوں کو کاٹتے ہوئے انکے فلا پس کو موڑتے ہوئے ایک کھلا باکس بنایئے۔ سب سے بڑا حجم والا باکس کو اس طریقے سے کیسے بنایا جاسکتا ہے؟ آپ بتا سکتے ہو۔ مربع نما شیٹ اور اس سے بنایا گیا بڑے حجم والے باکس میں کیا رشتہ ہے؟

توسیع: مربع نما شیٹ کے بجائے مستطیل نما شیٹ کا غذلیکر بھی اس باکس کو بنایا جاسکتا ہے۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ دو مختلف ٹھوس اجسام کو ملا کر کوئی ٹھوس جسم بنایا جائے اس کا حجم ان دو اجسام کے حجموں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا؟

2۔ ٹھوس اجسام کو ملانے پر بننے والے ٹھوس جسم کا سطحی رقبہ، ان ٹھوس اجسام کے سطحی رقبوں کے مجموعہ کے مساوی نہیں ہوگا۔ کیوں اسکی وجہ یہ ہے کہ سطحی رقبوں کو ملاتے وقت کچھ حصہ ٹوٹ جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

باب

11

علم مثلث

Trigonometry

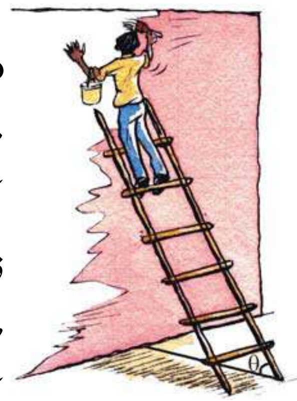
11.1 تمہید

سابقہ جماعتوں میں ہم مثلثات اور انکی خصوصیات سے واقف ہو چکے ہیں اور ہم روزمرہ زندگی میں مثلثات اور انکی خصوصیات کو مختلف مواقع پر استعمال کرتے ہیں

آیئے اب ہم روزمرہ زندگی کی مزید چند مثالوں پر غور کریں گے۔

- آپ اطراف واکناف برقی کھمبوں کا مشاہدہ کیا ہوگا یہ عام طور پر ایک دھاتی وائر کی مدد سے نصب کئے جاتے ہیں۔ کھمبا' دھاتی تار اور زمین مل کر ایک مثلث بناتے ہیں لیکن اگر تار کے طول کو گھٹاتے جائیں تب مثلث کونسی شکل اختیار کرے گا۔ اور زمین سے بننے والے زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

- ایک شخص سیڑھی لگا کر ایک دیوار کی آہک پاشی کرتا ہے۔ جیسا کہ متصلہ شکل میں بتایا گیا ہے۔ اگر وہ دیوار کے اوپری حصہ پر آہک پاشی کرنا چاہے تب وہ شخص کیا کرے گا۔ زمین سے سیڑھی کے زاویہ میں کیا کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟



- ضلع عادل آباد کے ایک گاؤں جئی ناتھ (Jainath) میں 13 صدی عیسوی میں تعمیر کردہ ایک مندر ہے اس مندر میں ڈسمبر کے کسی دن سوریا نارائنا سوامی کے مجسمہ کے قدموں پر پڑنے والی سورج کی پہلی کرنوں پر غور کرتے ہوئے دلچسپ امور اجاگر ہوتے ہیں۔ یہاں مندر کے دروازے اور مجسمہ کا درمیانی فاصلہ اور دروازے سے اس سوراخ کی بلندی قابل غور ہے ڈسمبر میں یہاں پر سورج کی پہلی کرنوں کا منظر توجہ طلب ہے۔ کیا آپ مذکورہ امور میں کوئی تعلق محسوس کرتے ہیں؟ اس موقع پر آپ کیا کوئی مثلث کا تخیل کرتے ہیں۔

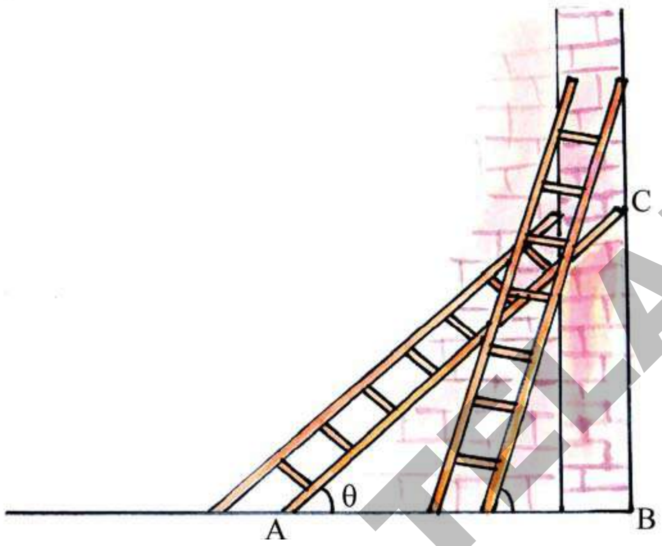
- کھیل کے میدان میں بچے پھسل بنڈہ (Slider) پر پھسلتے ہوئے آپ نے غور کیا ہوگا پھسل بنڈہ زمین کی سطح سے ایک مخصوص زاویہ بناتا ہے اگر اس زاویہ میں کچھ تبدیلی کی جائے تب کیا ہوگا۔ کیا بچے اب بھی اس پر پھسل سکیں گے۔

SCERT TELANGANA

مندرجہ بالا مثالیں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ ہم روزمرہ زندگی میں جیومٹری کا اطلاق کس طرح کرتے ہیں اوران مثلثات کی خصوصیات کے استعمال سے مختلف تعمیرات کی بلندیاں‘ فاصلے اور ڈھلان سے بننے والے زاویوں کی پیمائش کی جاسکتی ہے اس طرح کے مسائل مثلثات کا ایک حصہ ہیں جوکہ ریاضی کی ایک شاخ ہے۔

اب ہم اس مثال پر غور کریں گے کہ جس میں ایک شخص سیڑھی کی مدد سے ایک دیوار کی آہک پاشی کرتا ہے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے آیئے اب ہم مندرجہ ذیل شرائط پر غور کریں گے۔

سیڑھی کے قدم کو ’A‘ اس کے اوپری حصہ کو ’C‘ اور دیوار کے قدم اور سیڑھی کے قدم کو ملانے والے نقطہ کو ’B‘ سے تعبیر کرتے ہیں اس طرح ΔABC ’B‘ پر زاویہ قائمہ بنانے والا ایک مثلث ہے۔ سیڑھی کے قدم سے زمین پر بننے والے زاویئے کو اگر ’θ‘ مان لیا جائے۔



1۔ اگر وہ شخص دیوار کی اوپری سطح کی حصے پر آہک پاشی کرنا چاہتا ہے تب
- کیا سیڑھی سے زمین پر بننے والے زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟
- AB کے طول میں کیا کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

2۔ اگر وہ شخص دیوار کے نچلے حصے پر آہک پاشی کرنا چاہتا ہے تب
- کیا سیڑھی سے زمین پر بننے والے زاویہ میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟
- کیا AB کے طول میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی؟

مندرجہ بالا مثال میں ہم یہہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ اوپری اور نچلے حصہ پر آہک پاشی کرنے کے لیے اس شخص کو سیڑھی کی حالت کو تبدیل کرنا ہوتا ہے۔ اس لیے جب ’θ‘ کی قدر میں اضافہ ہوتا ہے تب بلندی میں اضافہ اور زمین پر سیڑھی سے دیوار کے فاصلے ’AB‘ میں کمی واقع ہوتی ہے۔ لیکن جب ’θ‘ کی قدر میں کمی واقع ہوتی ہے تب بلندی میں کمی اور زمین پر سیڑھی سے دیوار کے فاصلے ’AB‘ میں اضافہ ہوتا ہے کیا آپ اس بیان سے متفق ہیں؟

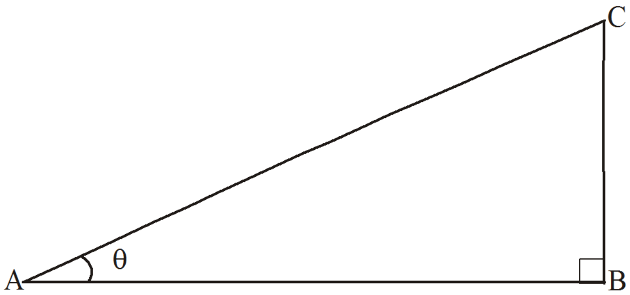
یہاں پر ہم نے قائمۃ الزاویہ مثلث کے ضلعوں اور زاویوں پر عمومی حیثیت سے ہی مشاہدہ کیا ہے۔ آیئے اب ہم قائمۃ الزاویہ مثلث کے ضلعوں کے نام دیں گے کیونکہ علم مثلث میں زاویوں کی نسبت کا انحصار ضلعوں پر ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

11.1.1 قائمۃ الزاویہ مثلث کے ضلعوں کے نام

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC لیجیے جس میں راس B پر زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ متصلہ شکل میں بتلایا گیا۔

مان لیجیے کہ مثلث ABC میں ∠CAB کو زاویہ 'A' سے ظاہر کیا جائے جو ایک حادہ زاویہ ہے۔ چونکہ AC سب سے بڑا ضلع ہے اس کو وتر (hypotenuse) کہا جاتا ہے۔



اس مثلث میں بلحاظ ∠A، BC کے مقام کا مشاہدہ کیجیے یہ ∠A کے مقابل ہے۔ لہٰذا BC کو ∠A کے مقابل کا ضلع کہا جاتا ہے دوسرے ضلع AB کو ∠A کا متصلہ ضلع کہا جاتا ہے۔

وتر = AC

∠A کے مقابل کا ضلع = BC

∠A کا متصلہ ضلع = AB

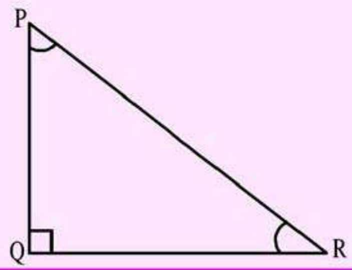
یہ کیجیے

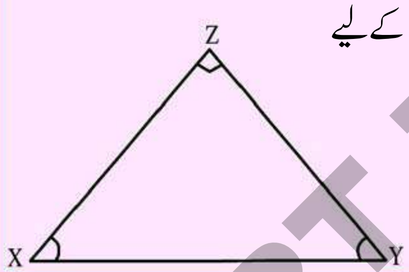
حسب ذیل مثلثات میں دیے گئے زاویوں کے لحاظ سے وتر، مقابل کا ضلع اور متصلہ ضلع کی نشاندہی کیجیے۔

1۔ زاویہ 'R' کے لیے

2۔ (i) زاویہ 'X' کے لیے

(ii) زاویہ 'Y' کے لیے



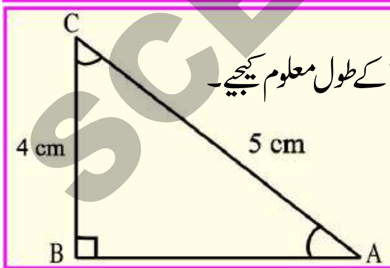


کوشش کیجیے

حسب ذیل مثلث میں دیے گئے زاویوں کے لحاظ سے ''وتر''، ''مقابل کا ضلع''، اور ''متصلہ ضلع'' کے طول معلوم کیجیے۔

1۔ زاویہ 'C' کے لیے

2۔ زاویہ 'A' کے لیے



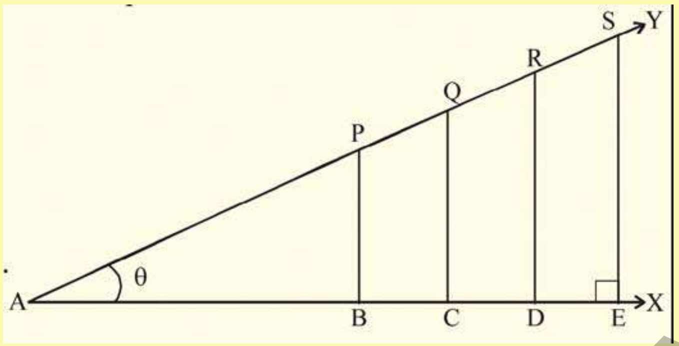
آپ نے کیا دیکھا؟ زاویہ 'A' کے مقابل کا ضلع اور زاویہ 'C' کے متصلہ ضلع کے مابین کیا کوئی رشتہ ہے؟ اس طرح فرض کیجیے کہ جب ایک برقی کھمبے کو دھاتی تار کی مدد سے نصب کیا جا رہا ہو تب کیا دھاتی تار کے طول اور برقی کھمبے کے طول میں کوئی رشتہ ہوتا ہے؟ یہاں مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے مابین رشتہ کو سمجھنا ہے جس کا مطالعہ ہم علم مثلث کی نسبتوں کے تحت کریں گے۔

SCERT TELANGANA

11.2 مثلثی نسبتیں:

آیئے اس باب کے آغاز میں ہم روزمرہ زندگی میں درپیش مثالوں کا جائزہ لیتے ہیں۔ آیئے اب ہم علم مثلث کی نسبتوں کے بارے میں معلومات حاصل کریں گے۔

مشغلہ



1۔ پٹری کی مدد سے کاغذ پر ایک اُفقی خط کھینچیے۔

2۔ اس خط کے ابتدائی نقطہ کو A اور دوسرے نقاط B، C، D اور E کو نقطہ A سے بالترتیب 3 سمر، 6 سمر، 9 سمر نشاندہی کھینچیے۔

3۔ نقاط B،C،D اور E سے بالترتیب 4 سمر، 8 سمر، 12 سمر اور 16 سمر طول والے عمود BD، CQ، DR اور ES کھینچیے۔

4۔ AP، PQ، QR اور RS کو ملایئے۔

5۔ AP، AQ، AR اور AS کا طول معلوم کیجیے۔

مثلث کا نام	زاویوں کے نام	وتر کا طول	مقابل کے ضلع کا طول	متصلہ ضلع کا طول	مقابل کا ضلع / وتر	متصلہ ضلع / وتر
DABP	∠BAP=Q					
DACQ	∠CAQ=Q					
DADR						
DAES						

تب $\frac{BP}{AP}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{DR}{AR}$ اور $\frac{ES}{AS}$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔

کیا یہ تمام نسبتیں $\frac{4}{5}$ کے مساوی ہیں؟

اسی طرح $\frac{AB}{AP}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AD}{AR}$ اور $\frac{AE}{AS}$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

11.2.1 مثلثی نسبتوں کی تعریف:

مندرجہ بالا مشغلہ میں ہم نے قائم الزاویہ مثلثات ABP‘ ACQ‘ ADR اور AES کا مشاہدہ کیا ہے جہاں پر A‘ مشترک زاویہ ہے جبکہ $\angle B$‘ $\angle C$‘ $\angle D$‘ اور $\angle E$ زاویہ قائمہ ہیں اور $\angle P$‘ $\angle Q$‘ $\angle R$ اور $\angle S$ ایک دوسرے کے مساوی زاویئے ہیں لہذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مثلثات ABP‘ ACQ‘ ADR اور AES مشابہہ ہیں۔ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ان مثلثات سے کسی ایک مثلث میں A کے مقابل کا ضلع اور وتر کی نسبت ماباقی مثلثات میں A کے مقابل کے ضلع اور وتروں کی نسبت کے مساوی اور مستقل ہوتی ہے۔ اور ان نسبتوں $\frac{DR}{AR}, \frac{CQ}{AQ}, \frac{BP}{AP}$‘ اور $\frac{ES}{AS}$ کو "Sine A" یا مختصراً "SinA" کہا جاتا ہے اگر زاویہ A کی قدر x‘ ہو تب نسبت "Sin$x$" ہوگی۔

لہذا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ تمام مشابہہ قائمہ الزاویہ مثلثات میں کسی زاویہ کے مقابل کے ضلع اور وتر کی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ اور یہ نسبت اس زاویہ کے "Sine" کہلاتی ہے۔

اسی طرح سے جب ہم نسبتیں $\frac{AD}{AR}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AB}{AP}$ اور $\frac{AE}{AS}$ کا مشاہدہ کرتے ہیں تو یہ بھی مستقل ہوتی ہیں اور یہ قائمہ الزاویہ مثلث میں زاویہ A کے متصلہ ضلع اور وتر وں کی نسبتیں ہیں۔ لہذا نسبتیں $\frac{AD}{AR}, \frac{AC}{AQ}, \frac{AB}{AP}$ اور $\frac{AE}{AS}$ "cosineA" یا مختصراً "cosA" کہلاتی ہیں۔ اگر زاویہ A کی قدر x ہو تب نسبت "cos$x$" ہوگی۔

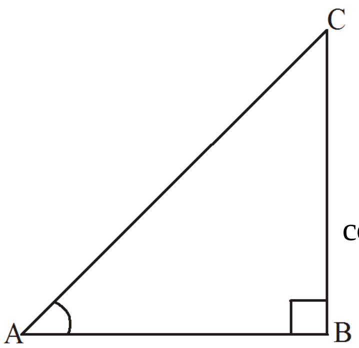
لہذا ہم یہ بھی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ تمام مشابہہ قائمہ الزاویہ مثلثات میں زاویہ قائمہ کے علاوہ کسی زاویہ کے متصلہ ضلع اور وتر کے طول کی نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہ نسبت اس زاویہ کی "cosine" کہلاتی ہے۔

اسی طرح، کسی قائمہ الزاویہ مثلث میں زاویہ قائمہ کے علاوہ کسی زاویہ کے مقابل کے ضلع اور متصلہ ضلع کی نسبت "tangent" کہلاتی ہے۔

ایک قائمہ الزاویہ مثلث میں نسبتوں کی تعریف

ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC پر غور کیجیے جو راس B پر زاویہ قائمہ ہے جیسا کہ ذیل کی شکل میں بتلایا گیا ہے۔ تب قائم الزاویہ مثلث ABC میں زاویہ A کے مثلث کی نسبتیں اس طرح ہوں گی۔

SCERT TELANGANA

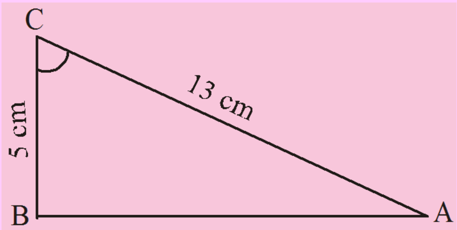


زاویہ ‘A’ کا sin = sinA = $\frac{\text{زاویہ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{BC}{AC}$

زاویہ ‘A’ کا cosine = cosA = $\frac{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{BC}{AC}$

زاویہ ‘A’ کا tangent = tanA = $\frac{\text{زاویہ A کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{زاویہ A کے متصلہ ضلع کا طول}} = \frac{BC}{AB}$

یہ کیجیے



1۔ متصلہ شکل میں (i) sinC (ii) cos C اور (iii) tan C معلوم کیجیے۔

2۔ ایک مثلث XYZ میں ∠Y قائمہ زاویہ ہے۔ XZ = 17cm اور YZ = 15cm تب (i) sin X (ii) cos Z (iii) tan X معلوم کیجیے۔

3۔ ایک مثلث PQR میں جو Q پر زاویہ قائمہ ہے اگر ∠P کی قدر x ہے PQ=7cm اور QR=24cm ہو تب sinx اور cosx معلوم کیجیے۔

کوشش کیجیے

ایک قائمہ زاویہ مثلث ABC میں جو C پر زاویہ قائمہ بناتا ہے اگر BC + CA = 23cm اور BC-CA=7cm ہو تب sinA اور tanB معلوم کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے۔

1۔ $\sin = \frac{4}{3}$ زاویہ x کی کسی قدر کے لیے وجود رکھتی ہے۔

2۔ sinA اور cos A کی قدر ہمیشہ 1 سے کم ہوتی ہے۔ کیوں؟

3۔ ‘tanA’ کا مطلب tan اور A کا حاصل ضرب ہے۔

SCERT TELANGANA

علم مثلث میں مزید تین نسبتوں کی تعریف کی گئی ہے جو اوپر بتائی گئی نسبتوں کے ضربی معکوس ہیں۔

sinA کا ضربی معکوس "cosecantA" ہے جس کو ہم مختصراً cosecA لکھتے ہیں یعنی $\text{cosecA} = \dfrac{1}{\sin A}$

اسی طرح cosA کا ضربی معکوس "secantA" ہے جس کو ہم مختصراً "secA" لکھتے ہیں۔ اور tanA کا ضربی معکوس "cotangentA" ہے جس کو ہم مختصراً "cotA" لکھتے ہیں۔

یعنی $\text{cotA} = \dfrac{1}{\tan A}$ اور $\text{secA} = \dfrac{1}{\cos A}$

آپ cosec کی تعریف ضلعوں کے لحاظ سے کس طرح کریں گے۔

تب $\text{sinA} = \dfrac{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$ ہو

اگر $\text{cosecA} = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}$

کوشش کیجیے

secA اور cotA کے لیے ضلعوں کی نسبتیں کیا ہوں گی۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

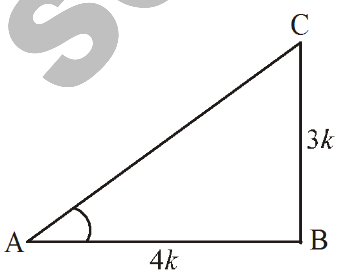
☆ کیا $\dfrac{\sin A}{\cos A}$ کی قدر tanA کے مساوی ہوگی؟ ☆ کیا $\dfrac{\cos A}{\sin A}$ کی قدر cotA کے مساوی ہوگی۔

آیئے مزید چند مثالوں کا مشاہدہ کریں گے۔

مثال - 1: اگر $\text{tanA} = \dfrac{3}{4}$ تب زاویہ A کے مابقی تمام مثلثی نسبتیں معلوم کیجیے

حل: دیا گیا ہے کہ $\text{tanA} = \dfrac{3}{4}$

چونکہ $\text{tanA} = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}$



∴ مقابل کا ضلع : متصلہ ضلع = 3:4

زاویہ 'A' کے لیے: مقابل کا ضلع = BC = $3k$

متصلہ ضلع = AB = $4k$ جہاں k ایک مثبت صحیح عدد ہے)

مثلث ABC میں فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

SCERT TELANGANA

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (3k)^2 = (4k)^2 = 25k^2$$

$$AC = \sqrt{25k^2}$$

$$= 5k = \text{وتر}$$

آیئے اب ماباقی تمام مثلثی نسبتوں کو لکھیں گے۔

$\sin A = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$ اور $\cos A = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

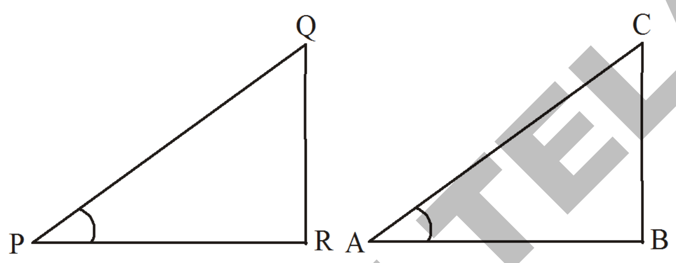
$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{3}$ اور $, \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}, \; , \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{4}{3}$

مثال- 2: اگر دو حادہ زاویے $\angle A$ اور $\angle P$ اس طرح ہیں کہ $\sin A = \sin P$ تب ثابت کیجیے کہ $\angle A = \angle P$

حل: دیا گیا ہے کہ $\sin A = \sin P$ اور

ΔABC سے .... $\sin A = \frac{BC}{AC}$ اور

ΔPQR سے .... $\sin P = \frac{QR}{PQ}$



$$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ}$$

فرض کرو کہ $\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PQ} = k$ .... (1)

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

مساوات (1) سے

$$\frac{AB}{PR} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{\sqrt{PQ^2 - QR^2}} = \frac{\sqrt{AC^2 - k^2AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - k^2PQ^2}} = \frac{\sqrt{AC^2\cancel{(1-k^2)}}}{\sqrt{PQ^2\cancel{(1-k^2)}}} = \frac{AC}{PQ}$$

لہٰذا $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR} = \frac{BC}{QR}$ تب $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

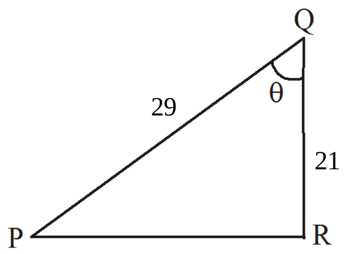
$\therefore \angle A = \angle P$ جو کہ ثابت ہوا۔

مثال- 3: مان لیجیے کہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں جو راس R پر زاویہ قائمہ بناتا ہے اگر PQ = 29 اکائیاں، QR = 21 اکائیاں اور $\angle PQR = \theta$ ہو تب درجہ ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔

حل: (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ اور (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

SCERT TELANGANA

حل: مثلث PQR میں



$$PR = \sqrt{PQ^2 - QR^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{400} = 20 \text{ اکائیاں}$$

$$\sin\theta = \frac{PR}{PQ} = \frac{20}{29}$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{21}{29}$$

$$(I)\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{441+400}{841} = 1$$

$$(II)\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{41}{841}$$

مشق 11.1

1۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں ضلع AB، BC اور CA کے طول بالترتیب 8cm، 15cm اور 17cm ہیں۔ تب cosA، sinA اور tanA کی قدر معلوم کیجیے۔

2۔ ایک قائم الزاویہ مثلث PQR میں اگر PQ=7cm، QR=25cm اور $\angle Q=90^o$ ہو تب tanQ-tanR معلوم کیجیے۔

3۔ ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے a = 24 اکائیاں، b = 25 اکائیاں اور $\angle BAC= \theta$ ہو تب $\cos\theta$ اور $\tan\theta$ کی قدر معلوم کیجیے؟

4۔ اگر $\cos A=\frac{12}{13}$ ہو تب sinA اور tanA کی قدر معلوم کیجیے۔ $A < 90^o$

5۔ اگر 3tanA = 4 ہو تب sinA اور cos A معلوم کیجیے۔

6۔ اگر دو حادہ زاویے $\angle A$ اور $\angle X$ اس طرح ہیں کہ cosA = cosX تب بتلایئے کہ $\angle A = \angle X$

7۔ دیا گیا ہے کہ $\cot\theta=\frac{7}{8}$ تب حسب ذیل کو محسوب کیجیے۔

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$

8۔ ایک قائم الزاویہ مثلث ABC میں جو اس B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ اگر $\tan A= \sqrt{3}$ تب ذیل کی قدریں معلوم کیجیے۔

(i) sin A cos C + cos A sin C (ii) cos A cos C - sin A sin C

SCERT TELANGANA

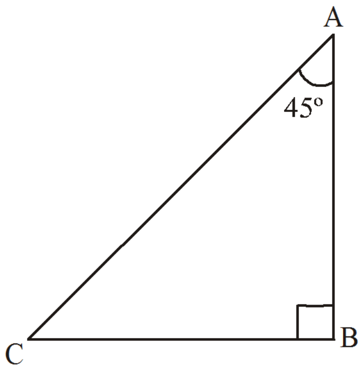
11.3 چند مخصوص زاویوں کی مثلثی نسبتیں:

آپ قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث اور $30^o, 60^o, 90^o$ زاویئے رکھنے والے مثلثات سے متعلق پہلے ہی سے واقف ہیں۔

کیا مندرجہ بالا مثلثات کی مدد سے ہم $\sin 30^o$ یا $\tan 60^o$ یا $\cos 45^o$ وغیرہ کی قدریں معلوم کرسکتے ہیں؟

کیا $\sin 0^o$ یا $\cos 0^o$ وجود رکھتے ہیں۔

11.3.1 زاویہ 45^o کی مثلثی نسبتیں



قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث ABC میں جو B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے

$\angle A = \angle C = 45^o$ (کیوں؟) اور $BC = AB$ (کیوں؟)

فرض کرو کہ $BC = a$ کا طول $= AB$ کا طول

تب فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= a^2 + a^2 = 2a^2$

لہذا $AC = a\sqrt{2}$

مثلثی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

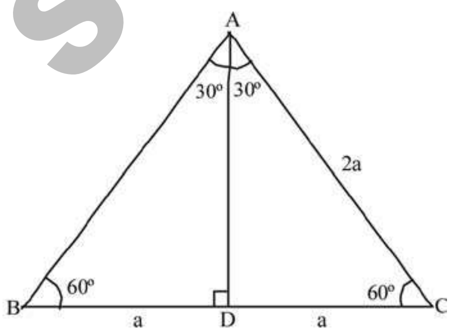
$$\sin 45^o = \frac{\text{زاویہ } 45^o \text{ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^o = \frac{\text{زاویہ } 45^o \text{ کے متصلہ ضلع کا طول}}{\text{وتر کا طول}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^o = \frac{\text{زاویہ } 45^o \text{ کے مقابل کے ضلع کا طول}}{\text{زاویہ } 45^o \text{ کے متصلہ ضلع کا طول}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

اسی طرح سے آپ $\cot 45^o$ اور $\sec 45^o$، $\operatorname{cosec} 45^o$ کی قدریں معلوم کرسکتے ہیں۔

11.3.2 زاویہ 30^o اور 60^o کی مثلثی نسبتیں



آیئے اب ہم زاویہ 30^o اور زاویہ 60^o کی مثلثی نسبتوں کو محسوب کریں گے۔ ان کو محسوب کرنے کے لیے ایک مساوی الاضلاع مثلث لیجیے۔ مساوی الاضلاع مثلث میں کسی ضلع پر کھینچا گیا عمود اس مثلث کو 30^o، 60^o اور 90^o زاویئے والے دو مساوی قائم الزاویہ مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔

SCERT TELANGANA

ایک مساوی الاضلاع مثلث ΔABC لیجیے چونکہ اس کا ہر زاویہ 60^o ہوتا ہے اس لیے $\angle A=\angle B=\angle C=60^o$ اور اس کے تینوں ضلعے مساوی ہوتے ہیں $AB=BC=CA=2a$

راس A سے BC پر ایک عمود AD کھینچیے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

مساوی الاضلاع مثلث ABC میں عمود AD 'زاویہ A' کا ناصف اور یہ ضلع BC کا بھی ناصف ہوتا ہے۔

$$\therefore \angle BAD=\angle CAD=30^o$$

چونکہ نقطہ 'D' ضلع BC کو دو مساوی نصف میں تقسیم کرتا ہے اس لیے

$$BD=\frac{1}{2}BC = \frac{2a}{2} = a$$

اوپر دی گئی شکل میں قائمۃ الزاویہ مثلث ABD سے

$AB = 2a$ اور $BD=a$

تب فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے $AD^2=AB^2 - BD^2$

$$= (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$$

$$\therefore AD=\sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

مثلثی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\sin 60^o=\frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o=\frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

اسی طرح سے (کیوں؟) $\tan 60^o=\sqrt{3}$

مندرجہ بالا طریقے کے مطابق آپ مقلوب $\text{cosec}60^o$، $\sec 60^o$، $\cot 60^o$ کی قدریں معلوم کرسکتے ہیں۔

یہ کیجیے

$\text{cosec}60^o$ ، $\sec 60^o$ اور $\cot 60^o$ کی قدریں معلوم کیجیے۔

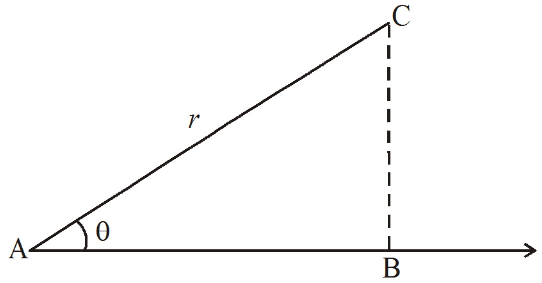
کوشش کیجیے

$\sin 30^o$ ، $\cos 30^o$ ، $\tan 30^o$ ، $\text{cosec}30^o$ ، $\sec 30^o$ اور $\cot 30^o$ کی قدریں معلوم کیجیے۔

11.3.3 0^o اور 90^o کی مثلثی نسبتیں

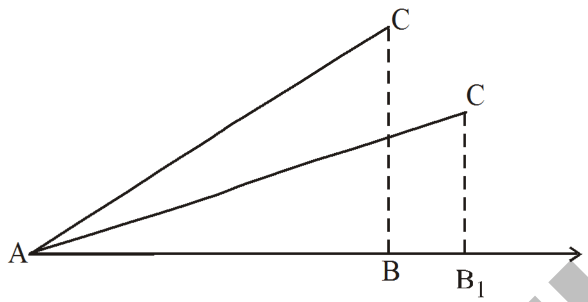
اب تک ہم نے 30^o، 45^o اور 60^o کی مثلثی نسبتوں کا مطالعہ کیا۔ آیئے اب ہم 0^o اور 90^o کی مثلثی نسبتوں کو معلوم کریں گے۔

SCERT TELANGANA

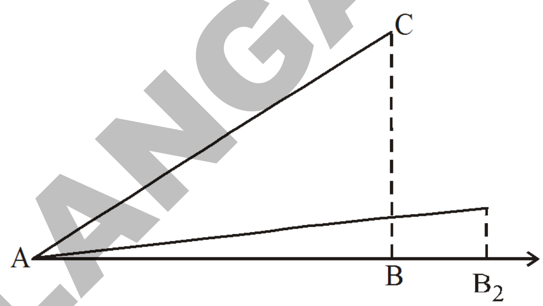


فرض کیجیے کہ ایک خطی قطعہ AC جس کا طول r ہے شعاع AB سے ایک زاویہ حادہ بناتا ہے نقطہ B سے نقطہ C کی بلندی BC ہے جب AC کا جھکاؤ AB کی جانب بڑھتا جائے تب ان دونوں کے درمیان بننے والا زاویہ گھٹتا ہے تب کیا AB اور AC کے طول میں کوئی تبدیلی واقع ہوگی۔

جیسے جیسے زاویہ A میں کمی ہوگی شعاع AB سے نقطہ C کی بلندی میں بھی کمی واقع ہوگی اور شعاع AB پر نقطہ C کا مقام (قدم) B سے تبدیل ہوکر B_1 اور B_2 میں تبدیل ہوتا جائے گا۔ اور زاویہ A کی قدر 0 ہوجائے گی۔ C کی بلندی (زاویہ A کے مقابل کا ضلع) بھی صفر ہوجائے گی۔ اور متصلہ ضلع AC (وتر) شعاع AB (متصلہ ضلع) میں ضم ہوجائے گا لہٰذا A سے B کا طول بھی r کے مساوی ہوجائیگا۔



قدم (I)



قدم (II)

مثلثی نسبتوں پر نظر ڈالیے

$\sin A = \frac{BC}{AC}$ اور $\cos A = \frac{AB}{AC}$

اگر $A^o = 0$ تب $BC = 0$ اور $AC = AB = r$

لہٰذا $\sin 0^o = \frac{0}{r} = 0$ اور $\cos 0^o = \frac{r}{r} = 1$

ہم جانتے ہیں کہ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

لہٰذا $\tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \frac{0}{1} = 0$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

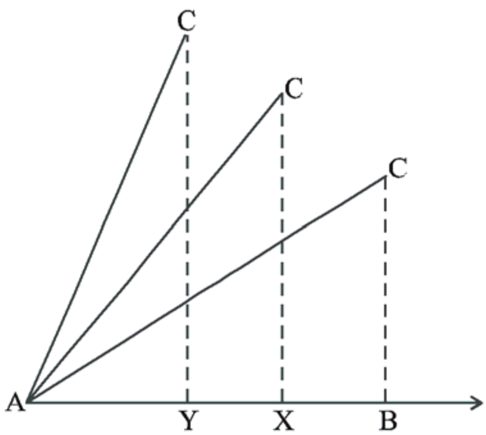
حسب ذیل پر اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کیجیے

1۔ $\operatorname{cosec} 0^o = \frac{1}{\sin 0^o}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟ کیا اس کی تعریف کی جاسکتی ہے؟ کیوں؟

SCERT TELANGANA

2۔ $\cot 0^o = \frac{1}{\tan 0^o}$ کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ کیا اس کی تعریف ممکن ہے؟ کیوں؟

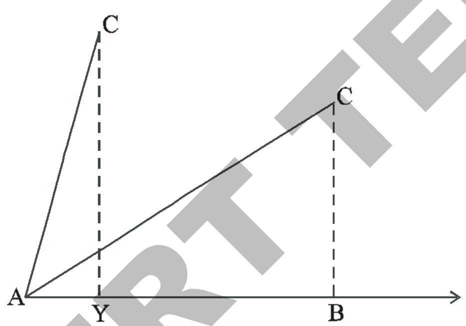
3۔ $\sec 0^o = 1$ کیوں؟



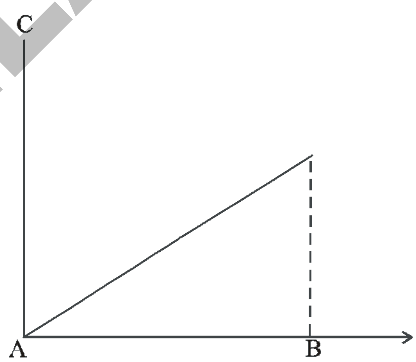
قدم (I)

اب تک ہم نے زاویہ کو گھٹاتے ہوئے 0^o کی مثلثی نسبتوں کا مطالعہ کیا ہے۔ آیئے اب ہم یہ معلوم کریں گے کہ جب خطی قطعہ AC اور شعاع AB کے درمیان بننے والے زاویئے میں اضافہ ہونے پر کیا ہوگا؟ جب زاویہ A میں اضافہ ہوتا ہے تب نقطہ C کی بلندی میں بھی اضافہ ہوتا ہے اور عمود کا قدم B مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے پہلے X اور پھر Y پر پہنچتا ہے۔ بالالفاظ دیگر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ A میں مسلسل اضافہ سے مقابل کے ضلع کی بلندی BC میں بھی بتدریج اضافہ ہونے لگتا ہے اور متصلہ ضلع کے طول میں کمی واقع ہوتی ہے۔ اور ایک وقت زاویہ A، 90^o کے مساوی ہوجائے گا تب نقطہ B، نقطہ A سے منطبق ہوجاتا ہے اور AC، BC کے مساوی ہوجاتا ہے۔

پس جب زاویہ A، 90^o ہوجاتا ہے تب قاعدہ (زاویہ کا متصلہ ضلع) کا طول صفر ہوجائے گا اور نقطہ C کی بلندی شعاع AB سے مسلسل بڑھتی ہوئی AC کے مساوی ہوجاتی ہے جس کا طول r ہے۔



قدم (II)



قدم (III)

آیئے اب ہم مثلثی نسبتوں سے کی قدریں واقفیت حاصل کریں گے۔

$\cos A = \frac{BC}{AC}$ اور $\sin A = \frac{AB}{AC}$

اگر $A = 90^o$ تب $AB = 0$ اور $AC = BC = r$

تب $\cos 90^o = \frac{0}{r} = 0$ اور $\sin 90^o = \frac{r}{r} = 1$

کوشش کیجیے

$\tan 90^o$، $\operatorname{cosec} 90^o$ اور $\cot 90^o$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

آیئے اب ہم ان تمام مذکورہ زاویوں کے مثلثی نسبتوں کی قدروں کو جدول کی شکل میں مشاہدہ کرتے ہیں۔

جدول 11.1

$\angle A$	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sinA	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosA	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanA	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	لامتناہی (∞)
cotA	لامتناہی (∞)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secA	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	لامتناہی (∞)
cosecA	لامتناہی (∞)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

SCERT TELANGANA

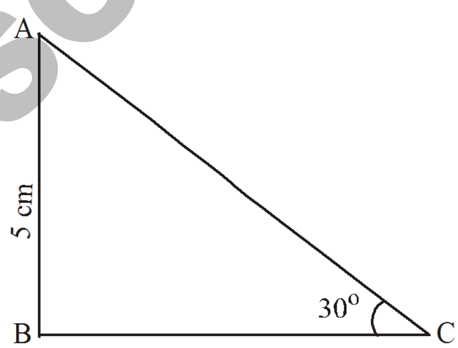
سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

زاویہ A کی قدریں 0^o سے 90^o تک اضافے سے sinA اور cosA کی قدروں میں تبدیلی سے متعلق آپ کا کیا خیال ہے (اوپر کی جدول کا مشاہدہ کیجیے)

اگر $A \geq B$ تب $\sin A \geq \sin B$ کہ کیا یہ درست ہے؟

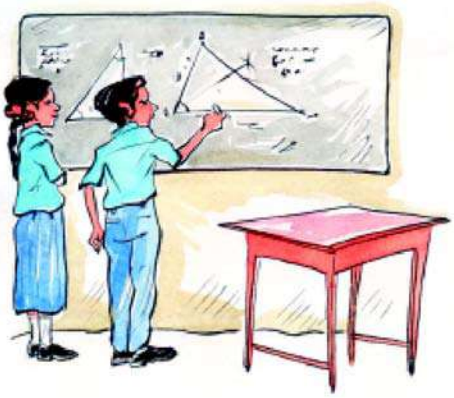
اگر $A \geq B$ تب $\cos A \geq \cos B$ کہ کیا یہ درست ہے؟

مثال-4: ایک مثلث ABC میں جو B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے $AB = 5cm$ اور $\angle ACB = 30^o$ ہے تب ضلع BC اور AC کا طول معلوم کیجیے۔



حل: دیا گیا ہے کہ $AB = 5cm$ اور $\angle ACB = 30^o$ ضلع BC کا طول معلوم کرنے کے لیے ہم ایسی مثلثی نسبت منتخب کریں گے جس میں ضلع BC اور دیا گیا ضلع AB شامل ہوں چونکہ ضلع BC زاویہ 'C' کا متصلہ ضلع اور AB کے مقابل کا ضلع ہے۔

اس لیے $\tan C = \frac{AB}{BC}$



$$\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = 5\sqrt{3}\ cm$$

مثلث ABC میں مثلثی نسبتوں کے استعمال سے

$$\sin 30^0 = \frac{5}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

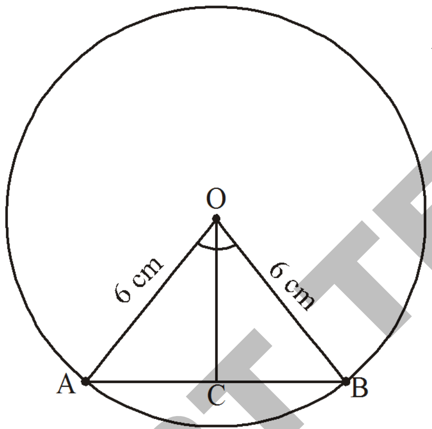
$$AC = 10cm$$

مثال- 5: 6 سمر نصف قطر والے دائرے کا ایک وتر مرکز سے 60^0 کا زاویہ بناتا ہے اس وتر کا طول معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ دائرے کا نصف قطر $6cm = OB = OA$ اور $\angle AOB = 60^0$

OC، AB پر $\angle AOB$ زاویائی ناصف OC کھینچا گیا ہے۔

تب $\angle COB = 30^0$



مثلث COB میں

$$\sin 30^0 = \frac{BC}{OB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{6}$$

$$BC = \frac{6}{2} = 3$$

لیکن وتر کا طول $AB = 2BC$

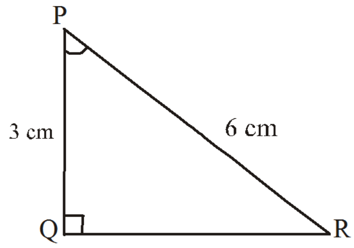
$= 2 \times 3 = 6cm$

$\therefore$ وتر کا طول $= 6cm$

دورِ حاضر میں زیرِ استعمال نسبت "sine" کا تصور AD500 میں آریہ بھٹ نے اپنی کتاب آریہ بھٹم میں پیش کیا تھا۔ آریہ بھٹ نے نصف وتر کو ''آردھا جیا'' کی اصطلاح دی جس کو آگے چل کر ''جیا'' یا ''جیوا'' کہا جانے لگا۔ کتاب آریہ بھٹم کے عربی ترجمے میں لفظ ''جیوا'' کو ہی استعمال کیا گیا۔ جب اس کتاب کا عربی سے لاطینی زبان میں ترجمہ کیا گیا تب اس میں لفظ ''جیوا'' کے لیے لفظ "sinus" لیا گیا۔ اس کو بعد میں sine بھی کہا گیا جو سارے یورپ میں ریاضی کی کتابوں میں عام ہوگئی۔ فلکیات کے انگریز پروفیسر ایڈمنڈ گنسٹر (1581-1626) نے سب سے پہلے مختصر اظہار کے طور پر "sin" کا استعمال کیا۔

SCERT TELANGANA

مثال-6: ایک قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں جو راس Q زاویہ پر قائمہ بناتا ہے' اگر PQ=3cm اور PR=6cm' ∠QPR اور ∠PRQ معلوم کیجیے۔



حل: دیا گیا ہے کہ PQ = 3cm اور PR = 6cm

$\therefore \quad \sin R = \dfrac{PQ}{PR}$

$\sin R = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

لہٰذا $\angle PRQ = 30^o$ اور

$\angle QPR = 60^o$ (کیوں؟)

نوٹ: اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دوسرا حصہ (زاویہ حادہ یا کوئی ضلع) معلوم ہو تب ماباقی زاویہ اور اضلاع کو معلوم کیا جاسکتا ہے؟

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

اگر کسی بھی قائم الزاویہ مثلث میں ایک ضلع اور کوئی دوسری پیائش (یا تو ایک ضلع یا زاویہ) معلوم ہو تو کیا مثلث کے باقی ضلع اور زاویے معلوم کر سکتے ہیں۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں۔ ایک مثال کے ذریعہ وضاحت کیجیے۔

مثال-7: اگر $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}, \cos(A+B) = \dfrac{1}{2}, 0^o < A+B \le 90^o, A > B$ تب A' اور B' کی قدریں کیا ہوں گی؟

حل: چونکہ $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow A - B = 30^o$ .... (1) (کیوں؟)

اور $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow A + B = 60^o$ ....(2)

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر

$A = 45^o$ اور $B = 15^o$ (کیسے؟)

مشق 11.2

1۔ حسب کی قدر س محسوس کیجیے؟

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$

(ii) $\dfrac{\cos 45^o}{\sec 30^o + \text{cosec}\, 60^o}$

(iii) $\dfrac{\sin 30^o + \tan 45^o - \text{cosec}\, 60^o}{\cot 45^o + \cos 60^o - \sec 30^o}$

(iv) $2\tan^2 45^o + \cos^2 30^o - \sin^2 60^o$

(v) $\dfrac{\sec^2 60^o - \tan^2 60^o}{\sin^2 30^o + \cos^2 30^o}$

2۔ صحیح جواب کا انتخاب کیجیے اور اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $\dfrac{2\tan 30^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\sin 60^o$ (b) $\cos 60^o$ (c) $\tan 30^o$ (d) $\sin 30^o$

SCERT TELANGANA

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^o}{1+\tan^2 45^o}$

(a) $\tan 90^o$ (b) 1 (c) $\sin 45^o$ (d) 0

(iii) $\dfrac{2\tan 30^o}{1-\tan^2 30^o}$

(a) $\cos 60^o$ (b) $\sin 60^o$ (c) $\tan 60^o$ (d) $\sin 30^o$

3۔ $\sin 60^o \ \cos 30^o + \sin 30^o \cos 60^o$ کو محسوب کیجیے؟ $\sin(60^o + 30^o)$ کی قدر کیا ہوگی آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

4۔ کیا یہ بیان $\cos(60^o + 30^o) = \cos 60^o \cos 30^o - \sin 60^o \sin 30^o$ صادق ہے؟

5۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث PQR میں جو راس Q پر قائمۃ الزاویہ بناتا ہے اور $\angle RPQ = 60^o$ $PQ = 6cms$ ضلع QR اور PR کا طول معلوم کیجیے۔

6۔ مثلث XYZ میں جو راس Y پر قائمہ بناتا ہے $YZ = x$ اور $XZ = 2x$ تب $\angle YXZ$ اور $\angle YZX$ معلوم کیجیے۔

7۔ کیا یہ بیان $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$ صادق ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

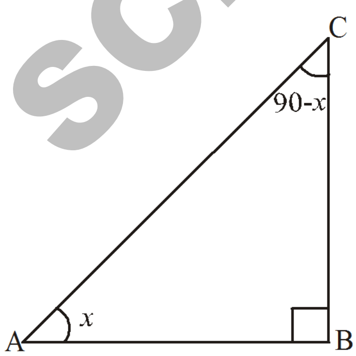
سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

بیان $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 4$ حادہ زاویہ θ کی کس قدر کے لیے صادق ہے؟

$0^o \leq \theta \leq 90^o$ کی کس قدر کے لیے مندرجہ بالا مساوات نا قابل تعریف ہے؟

11.4 اتمامی زاویوں کی مثلثی نسبتیں

ہم پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر کوئی دو زاویوں کا مجموعہ 90^o ہو تب وہ زاویے اتمامی زاویے کہلاتے ہیں۔ مان لیجیے کہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں جو راس B پر قائمہ بناتا ہے اس مثلث میں کیا کوئی اتمامی زاویہ ہے۔



چونکہ زاویہ B، 90^o ہے ما باقی دو زاویوں کا مجموعہ 90^o ہوگا

(کیونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^o ہوتا ہے)

لہذا $\angle A + \angle C = 90^o$

$\angle A$ اور $\angle C$ اتمامی زاویہ کہلاتے ہیں۔

آیئے! فرض کرتے ہیں کہ $\angle A = x$ تب زاویہ x کے مقابل کا ضلع BC اور متصلہ ضلع AB ہے۔

$\sin x = \frac{BC}{AC}$ $\quad \cos x = \frac{AB}{AC}$ $\quad \tan x = \frac{BC}{AB}$

$\text{cosec}\, x = \frac{AC}{BC}$ $\quad \sec x = \frac{AC}{AB}$ $\quad \cot x = \frac{AB}{BC}$

اگر $\angle A + \angle C = 90^o$ تب $\angle C = 90^o - \angle A$ اور $\angle A = x$ تب $\angle C = 90^o - x$

آیئے! اب ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ABC میں زاویہ $(90^o - x)$ کے مقابل کا ضلع اور متصلہ ضلع کونسے ہوں گے۔

$\sin(90^o - x) = \frac{AB}{AC}$ $\quad \cos(90^o - x) = \frac{BC}{AC}$ $\quad \tan(90^o - x) = \frac{AB}{BC}$

$\text{Cosec}(90^o - x) = \frac{AC}{AB}$ $\quad \sec(90^o - x) = \frac{AC}{BC}$ $\quad \cot(90^o - x) = \frac{BC}{AB}$

اب اگر ہم زاویہ x^o اور $(90^o - x)$ کے مندرجہ بالا مختلف مثلثی نسبتوں کا تقابل کریں تب ہمیں مثلث ABC کے لیے تین ممکن صورتیں ہوں گی۔

$\sin(90^o - x) = \frac{AB}{AC} = \cos x$ اور $\cos(90^o - x) = \frac{BC}{AC} = \sin x$

$\tan(90^o - x) = \frac{AB}{BC} = \cot x$ اور $\cot(90^o - x) = \frac{BC}{AB} = \tan x$

$\text{cosec}(90^o - x) = \frac{AC}{AB} = \sec x$ اور $\sec(90^o - x) = \frac{AC}{BC} = \text{cosec}\, x$

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مندرجہ بالا رشتوں/بیانات کو 0^o اور 90^o کے لیے جانچیئے کہ یہ صادق ہیں یا نہیں۔

$\sin(90^o - A) = \cos A$		$\cos(90^o - A) = \sin A$
$\tan(90^o - A) = \cot A$		$\cot(90^o - A) = \tan A$
$\sec(90^o - A) = \text{cosec}\, A$	اور	$\text{cosec}(90^o - A) = \sec A$

SCERT TELANGANA

آیئے چند مزید مثالوں پر غور کریں

مثال-8: $\frac{\sec 35^\circ}{\operatorname{cosec} 55^\circ}$ کی قدر محسوب کیجیے۔

حل: $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$

$$\operatorname{cosec} 55^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 35^\circ)$$

$$\operatorname{cosec} 55^\circ = \sec 35^\circ$$

تب $\frac{\sec 35^\circ}{\operatorname{cosec} 55^\circ} = \frac{\sec 35^\circ}{\sec 35^\circ} = 1$

مثال- 9: اگر $\cos 7A = \sin(A - 6^\circ)$ جہاں $7A$ ایک حادہ زاویہ ہے تب A کی قدر معلوم کیجیے؟

حل: دیا گیا ہے کہ $\cos 7A = \sin(A - 6^\circ)$

$$\sin(90 - 7A) = \sin(A - 6^\circ)$$

چونکہ $(90 - 7A)$ اور $(A - 6^\circ)$ دونوں حادہ زاویے ہیں

اس لیے $90^\circ - 7A = A - 6^\circ$

$$8A = 96^\circ$$

$$\Rightarrow A = 12^\circ$$

مثال-10: اگر $\sin A = \cos B$ تب ثابت کیجیے کہ $A + B = 90^\circ$

حل: دیا گیا ہے کہ $\sin A = \cos B \; ...(1)$

ہم جانتے ہیں کہ $\cos B = \sin(90^\circ - B)$ تب ہم مساوات (1) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin A = \sin(90^\circ - B)$$

اگر 'A' اور 'B' دونوں حادہ زاویہ ہیں تب $A = 90^\circ - B$

$$\Rightarrow A + B = 90^\circ$$

مثال-11: $\sin 81^\circ + \tan 81^\circ$ کو زاویہ 0° اور 45° کے درمیانی زاویوں کی ثلثی نسبتوں میں ظاہر کیجیے۔

حل: ہم $\sin 81^\circ = \sin(90^\circ - 9^\circ) = \cos 9^\circ$ لکھ سکتے ہیں اور

$$\tan 81^\circ = \tan(90^\circ - 9^\circ) = \cot 9^\circ$$

تب $\sin 81^\circ + \tan 81^\circ = \cos 9^\circ + \cot 9^\circ$

SCERT TELANGANA

مثال-12: ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC کے زاویے A‘ B اور C ہیں تب بتلائیے کہ $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$

حل: دیا گیا ہے کہ A‘ B اور C ایک مثلث کے زاویے ہیں تب

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

اوپر کی مساوات کو دونوں جانب '2' سے تقسیم کرنے پر

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^{\circ}$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^{\circ} - \frac{A}{2}$$

دونوں جانب 'sin' نسبت لینے پر

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^{\circ} - \frac{A}{2}\right)$$

لہذا ثابت ہوا کہ $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

مشق 11.3

1۔ محسوب کیجیے۔

(i) $\frac{\tan 36^{\circ}}{\cot 54^{\circ}}$ (ii) $\cos 12^{\circ} - \sin 78^{\circ}$ (iii) $\operatorname{cosec} 31^{\circ} - \sec 59^{\circ}$

(iv) $\sin 15^{\circ} \sec 75^{\circ}$ (v) $\tan 26^{\circ} \tan 64^{\circ}$

2۔ بتلائیے کہ

(i) $\tan 48^{\circ} \tan 16^{\circ} \tan 42^{\circ} \tan 74^{\circ} = 1$

(ii) $\cos 36^{\circ} \cos 54^{\circ} - \sin 36^{\circ} \sin 54^{\circ} = 0$

3۔ اگر $\tan 2A = \cot(A - 18^{\circ})$ جہاں 2A ایک زاویہ حادہ ہے تب 'A' کی قدر معلوم کیجیے۔

4۔ اگر $\tan A = \cot B$ جہاں A اور B حادہ زاویے ہیں تب ثابت کیجیے کہ $A + B = 90^{\circ}$

5۔ ایک مثلث ABC کے زاویے A‘ B اور C ہیں تب ثابت کیجیے $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$

6۔ $\sin 75^{\circ} + \cos 65^{\circ}$ کو زاویہ 0° اور 45° کی درمیانی زاویوں کے مثلثی نسبتوں میں ظاہر کیجیے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

مساوات $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 4$ میں $\theta = 0^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}$ درج کرنے پر کونسی قدر اس کو مطمئن کرتی ہے، کونسی نہیں۔

SCERT TELANGANA

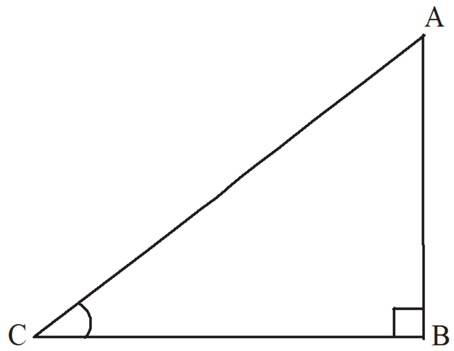
11.5 علم مثلث کی متماثلات

ہم جانتے ہیں کہ متماثلہ (Identity) ایک ریاضی کی وہ مساوات جو متغیرات کی ہر قدر کے لیے صادق ہوتی ہے۔

مثال کے طور پر $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ایک متماثلہ ہے

اسی طرح سے ایسی متماثلہ جس میں مثلثی نسبتیں پائی جاتی ہیں علم مثلث کی متماثلہ کہلاتی ہے اور یہ اپنے زاویوں کی تمام قدروں کے لیے صادق ہوتی ہے۔

یہاں پر ہم ایک متماثلہ کو اخذ کریں گے اور ما باقی تمام اسی کی بنیاد پر ہوں گے۔



مان لیجیے کہ مثلث ABC ‘B پر زاویہ قائمہ بناتا ہے لہذا

فیثا غورث کے مسئلہ کی رو سے

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad ....(1)$$

دونوں جانب AC^2 سے تقسیم کرنے پر

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

یعنی $$\left[\frac{AB}{AC}\right]^2 + \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 = \left[\frac{AC}{AC}\right]^2$$

یعنی $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

یہاں ہم عام طور پر $(\cos A)^2$ کی بجائے $\cos^2 A$ لکھتے ہیں

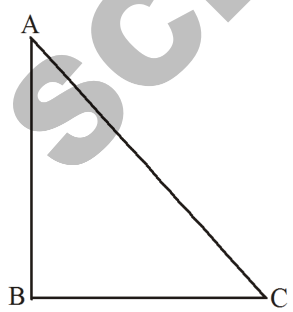
یعنی $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ ($\cos A^2$ نا لکھیں)

لہذا اوپر کی مساوات اس طرح ہوگی

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

اس مساوات میں متغیر A (زاویہ) استعمال کیا گیا ہے یہ مساوات A کی تمام قدروں کے لیے صادق ہے۔ لہذا یہ مساوات علم مثلث کی ایک متماثلہ ہے۔

لہذا **$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$** علم مثلث کی متماثلہ ہے۔



آیئے اب ہم دوسری متماثلہ پر غور کرتے ہیں۔

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ (مساوات 1 سے)

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$ (مساوات 1 کو AB^2 سے تقسیم کرنے پر)

SCERT TELANGANA

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

یعنی $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

اسی طرح سے مساوات 1 کو BC^2 سے تقسیم کرنے پر ہمیں یہ حاصل ہوگا

$$\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$$

ان متماثلات کی مدد سے ہم ایک مثلثی نسبت کو ہم دوسری نسبت میں ظاہر کر سکتے ہیں اگر ہمیں کسی بھی ایک نسبت کی قدر معلوم ہو تب ہم ان متماثلات کے استعمال سے مابقی تمام مثلثی نسبتوں کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

کیا ذیل میں دی گئیں متماثلات $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ کے لیے صادق ہیں؟ اگر نہیں تب 'A' کی کن قدروں کے لیے صادق ہے؟

- $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
- $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

یہ کیجیے

(i) اگر $\sin C = \frac{15}{17}$, تب $\cos C$ معلوم کیجیے

(ii) اگر $\tan x = \frac{5}{12}$, تب $\sec x$ معلوم کیجیے۔ (iii) اگر $\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{7}$ تب $\cot\theta$ معلوم کیجیے۔

کوشش کیجیے

حسب ذیل کی قدر محسوب کیجیے اور اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

(i) $\dfrac{\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ}{\cos^2 36^\circ + \cos^2 54^\circ}$ (ii) $\sin 5^\circ \cos 85^\circ + \cos 5^\circ \sin 85^\circ$

(iii) $\sec 16^\circ \operatorname{cosec} 74^\circ - \cot 74^\circ \tan 16^\circ$

مثال-13: ثابت کیجیے کہ $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

حل:

$$\text{LHS} = \cot\theta + \tan\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{(کیوں؟)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

SCERT TELANGANA

$$= \frac{1}{\sin\theta \ \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \ \frac{1}{\cos\theta} = \operatorname{cosec}\theta \ \sec\theta$$

مثال-14: ثابت کیجیے $\tan^2\theta + \tan^4\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

حل: $\text{L.H.S} = \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

$= \tan^2\theta \,.\, \sec^2\theta$ (کیوں؟)

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$ (کیوں؟)

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta = \text{R.H.S}$

مثال-15: ثابت کیجیے $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

حل:

$$\text{LHS} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \text{ (کیوں؟)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \text{R.H.S.}$$

مشق 11.4

1۔ ذیل کو محسوب کیجیے؟

(i) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$

(ii) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

(iii) $(\sec^2\theta - 1)(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)$

SCERT TELANGANA

2۔ ثابت کیجیے $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

3۔ بتلایئے کہ $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

4۔ بتلایئے کہ $\dfrac{1-\tan^2 A}{\cot^2 A - 1} = \tan^2 A$

5۔ بتلایئے کہ $\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \tan\theta . \sin\theta$

6۔ مختصر کیجیے $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$

7۔ ثابت کیجیے $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

8۔ مختصر کیجیے $(1 - \cos\theta)\,(1 + \cos\theta)\,(1 + \cot^2\theta)$

9۔ اگر $\sec\theta + \tan\theta = p$ تب $\sec\theta - \tan\theta$ کی قدر کیا ہوگی؟

10۔ اگر $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = k$ تب ثابت کیجیے $\cos\theta = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\cot\theta - \cos\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}$

2۔ ثابت کیجیے کہ $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$ (متماثلہ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ کو استعمال کرتے ہوئے)

3۔ ثابت کیجیے $(\operatorname{cosec} A - \sin A)\,(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

4۔ ثابت کیجیے $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

5۔ بتلایئے $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1+\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

6۔ ثابت کیجیے $\left(\dfrac{(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)}\right) = \left(\dfrac{(1-\cos A)}{(1+\cos A)}\right)$

SCERT TELANGANA

ہم نے کیا سیکھا

1۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں جو راس B پر قائمہ بناتا ہے

$\sin A = \dfrac{\text{A کے مقابل کا ضلع}\angle}{\text{وتر}}$ $\quad \cos A = \dfrac{\text{A کا متصلہ ضلع}\angle}{\text{وتر}}$ $\quad \tan A = \dfrac{\text{A کے مقابل کا ضلع}\angle}{\text{A کا متصلہ ضلع}\angle}$

2۔ $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$

3۔ اگر ایک قائمۃ الزاویہ مثلث میں کسی حادہ زاویہ کی کوئی بھی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تب اس زاویے کی ما باقی تمام مثلثی نسبتوں کو معلوم کیا جا سکتا ہے۔

4۔ $0^o, 30^o, 45^o, 60^o$ اور 90^o زاویوں کے تمام مثلثی نسبتوں کی قدر

5۔ sinA یا cosA کی قدر '1' سے کم یا '1' سے زیادہ ہوتی ہے اور کبھی 1 سے زیادہ نہیں ہوتی جبکہ secA یا cosecA کی قدر ہمیشہ 1 کے مساوی یا زیادہ ہوتی ہے۔

6۔ $\sin(90^o - A) = \cos A,\ \cos(90^o - A) = \sin A$

$\tan(90^o - A) = \cot A,\ \cot(90^o - A) = \tan A$

$\sec A\,(90^o - A) = \operatorname{cosec} A,\ \operatorname{cosec}(90^o - A) = \sec A$

7۔ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ جب کہ $0^o < A < 90^o$

$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ جب کہ $(0^o < A < 90^o)$

SCERT TELANGANA

باب 12

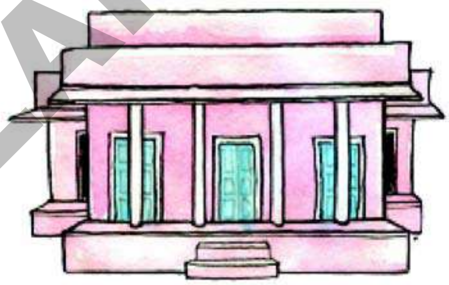
علم مثلث کا اطلاق
Applicatoins of Trigonometry

12.1 تمہید

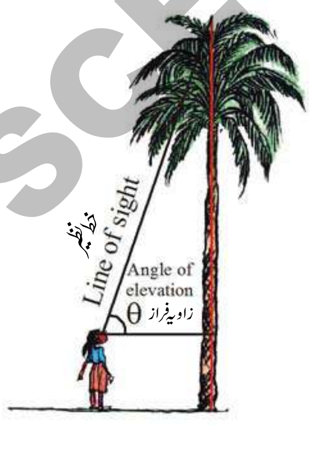
آپ نے سماجی علم میں پڑھا ہے کہ دنیا کے سب سے بلند ترین پہاڑ کی چوٹی ماؤنٹ ایورسٹ ہے اور اس کی بلندی 8848 میٹر ہے۔

ضلع عادل آباد کا کنٹالا آبشار ریاست تلنگانہ کا سب سے بلند ترین قدرتی آبشار ہے جس کی بلندی 147 فٹ ہے۔

ان بلندیوں کی پیائش کس طرح کی گئی ہوگی؟ کیا آپ اپنے اسکول کے عمارت کی بلندی کی پیائش یا آپ کے اسکول میں یا اسکے قرب وجوار میں موجود قد آور درخت کی بلندی پیائش کر سکتے ہیں؟ آیئے اب اس طریقہ کار کو مثالوں کے ذریعہ سمجھیں گے۔



شازیہ کھجور کے درخت کے بلندی کی پیائش کرنا چاہتی ہے وہ درخت کے بلند ترین مقام کی نشاندہی کرنے کی کوشش کرتی ہے اور وہ بلند ترین مقام اور اپنی آنکھ کے درمیان ایک خیالی خط کو تصور کرتی ہے۔



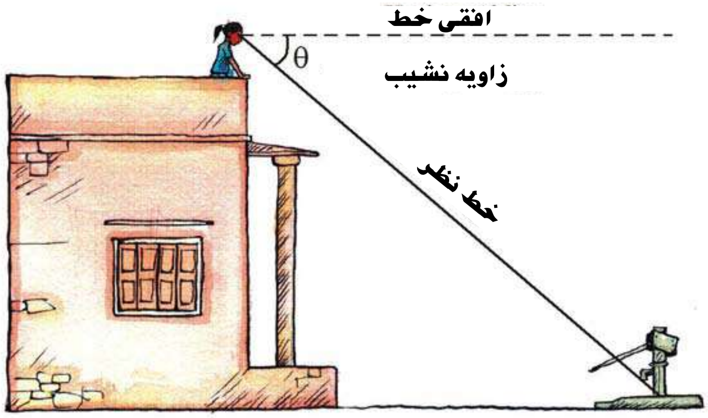
یہ خیالی خط ''خط نظر'' کہلاتا ہے وہ ایک افقی خط'' جو درخت اور آنکھ کے درمیان زمین کے متوازی ہوتی ہے۔

یہاں پر ''خط نظر'' ''افقی خط'' اور درخت ایک قائم الزاویہ مثلث بناتے ہیں

درخت کی بلندی معلوم کرنے کے لیے شازیہ کو اس مثلث کے ایک ضلع اور ایک زاویہ کو معلوم کرنا ہوگا۔

''خط نظر'' افقی خط کے اوپر واقع ہے اور خط نظر اور افقی خط کے درمیان بننے والا زاویہ ''**زاویہ فراز**'' کہلاتا ہے۔

SCERT TELANGANA



فرض کرو کہ آپ اپنے اسکول کے عمارت کی چھت پر کھڑے ہیں اس عمارت سے جس پر کھڑے ہیں ایک بورویل کا فاصلہ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اس کے لیے آپ کو اس بورویل کے قدم کا مشاہدہ کرنا ہوگا۔

تب آپ کی آنکھ سے بورویل تک، خط نظر آپ کی آنکھ سے افقی خط کے نیچے ہے یہاں خط نظر اور افقی خط کے درمیان بننے والا زاویہ **"زاویہ نشیب"** کہلاتا ہے۔

اراضی کی پیمائش کرنے والے اشخاص ((Surveyors) صدیوں سے علم مثلث کا استعمال کرتے آ رہے ہیں وہ لوگ سروے کے دوران Theodelites (افقی وعمودی پیمائش کرنے والا آلہ) کے استعمال سے زاویہ نشیب وزاویہ فراز کی پیمائش کرتے تھے۔ ہندوستان میں 19 ویں صدی عیسوی میں سروے پراجکٹ Great Trignometric survey کے لیے ہندوستانی انگریزی حکومت نے دو بڑے Theodolites بنوائے۔ 1852 میں سروے کے دوران ہمالیہ پہاڑ میں دنیا کی سب سے بلندترین چوٹی ماؤنٹ ایورسٹ دریافت ہوئی۔ 160km کے فاصلہ سے چھ مختلف مقامات سے اس چوٹی کا مشاہدہ کیا گیا اور اس چوٹی کی بلندی محسوب کی گئی۔ 1856ء میں اس چوٹی کو سرجارج ایورسٹ کے نام سے موسوم کیا گیا۔ جنہوں نے اس قوی Theodolites کو تیار کرنے میں اہم رول ادا کیا اور اس کو سب سے پہلے استعمال کیا۔ وہ قومی Theodolites نمائش کے لیے سروے آف انڈیا کے عجائب گھر (میوزیم) دہرادون میں رکھا گیا ہے۔

12.2 مسائل کے حل کے لیے خاکہ بنانا

فاصلہ اور بلندی کے (سوالات) مسائل حل کرنے کے لیے اشکال بناتے وقت ہمیں حسب ذیل نکات کو ملحوظ رکھنا چاہیے۔

(i) تمام اجسام جیسے مینار، درخت، عمارتیں، پانی کا جہاز، پہاڑ وغیرہ کو ریاضیاتی سہولت کے لیے میں بطور ایک خط لیا جانا چاہیے

(ii) زاویہ فراز یا زاویہ نشیب کی پیمائش افقی خط کی اساس پر لی جاتی ہے۔

(iii) اگر مشاہد کا قد سوال میں نہ دیا جائے تب اسکو نظرانداز کر دیا جاتا ہے۔

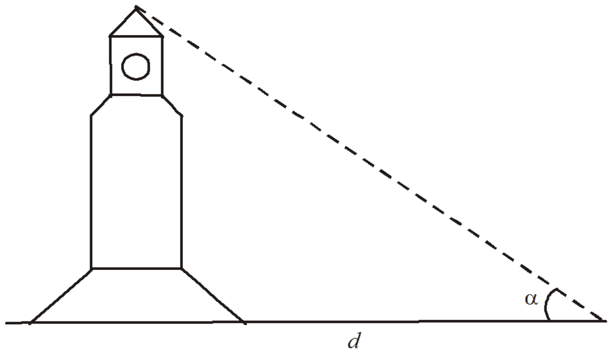
جب ہم کسی فاصلہ اور بلندی کو زاویہ نشیب یا زاویہ فراز کے استعمال سے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں تب ہمیں جیومٹریہ تخیل کی ضرورت ہوگی۔ فاصلہ اور بلندی معلوم کرنے کے لیے ہمیں پہلے خاکہ بنانا ہوگا اور ان خاکوں کی مدد سے ہم مسائل حل کر سکتے ہیں۔

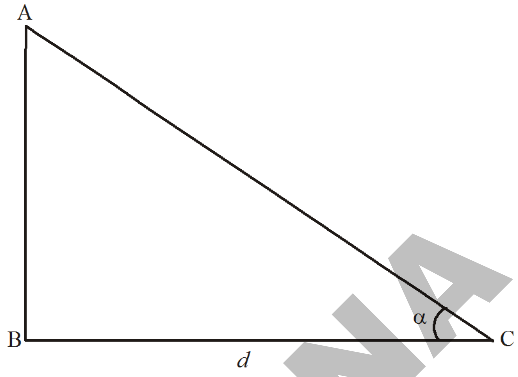
آیئے چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال-1: مشاہدہ کار سے d میٹر فاصلہ پر موجود (Clock tower) گھڑیال کے مینار کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز α^o ہے۔ اس کے لیے ایک کچہ خاکہ بنایئے۔

SCERT TELANGANA

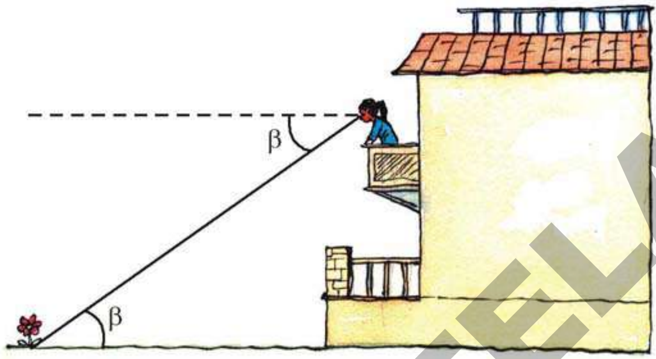
حل: سوال کے مطابق حسب ذیل کچہ خاکہ بنایا جاسکتا ہے۔

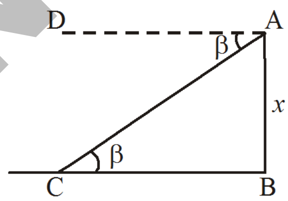




مثال-2: نازیہ اپنے مکان کی پہلی منزل کی بالکنی سے سطح زمین پر موجود پھول کا مشاہدہ کرتی ہے جس کا زاویہ نشیب β^o بنتا ہے۔اس عمارت کی پہلی منزل کی بلندی x میٹر ہے۔اس کے لیے ایک کچہ خاکہ بنائیے۔

حل:



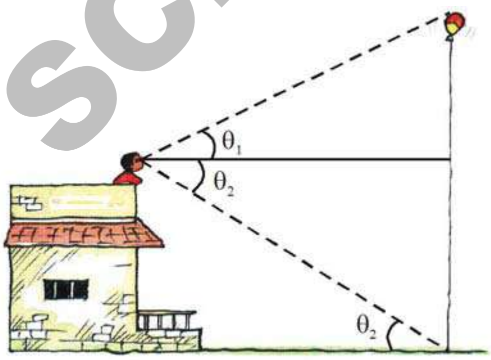


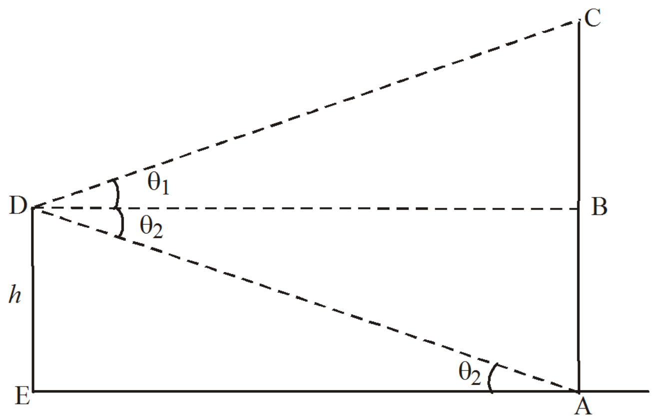
یہاں $\angle DAC = \angle ACB = \beta$ (کیوں)؟

مثال-3: ایک بڑا غبارہ ایک رسی سے باندھا گیا جو ہوا میں لہرا رہا ہے ایک شخص عمارت کی چھت سے اس غبارہ کا مشاہدہ کرنے پر زاویہ فراز θ_1 بنتا ہے جب وہ اس کے قدم کا مشاہدہ کرتا ہے تب زاویہ نشیب θ_2 بنتا ہے۔عمارت کی بلندی h فٹ ہے۔اس کے لیے ایک کچا خاکہ بنائیے۔

حل: یہاں ہم یہہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$\angle BDA = \angle DAE$ (کیوں؟)





SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

1۔ حسب ذیل صورتوں کے اشکال اتاریئے۔

(i) ایک شخص پتنگ اڑا رہا ہے جس کا زاویہ فراز α ہے۔ اور اس شخص کے ہاتھ سے پتنگ کا فاصلہ 'ℓ' ہے۔

2۔ ایک شخص ایک ندی کے کنارے موجود ایک h بلندی والے درخت کے اوپر سے ندی کے دونوں کناروں کا مشاہدہ کرتا ہے۔ جہاں پر ندی کی چوڑائی d ہے زاویہ نشیب θ_1 اور θ_2 جہاں $Q_2 < Q_1$ ہے

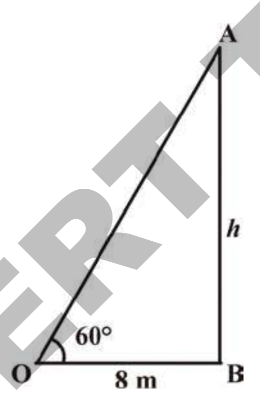
سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ آپ اپنے اسکول کی عمارت کی چھت کا d میٹر کے فاصلہ سے مشاہدہ کر رہے ہیں جس کا زاویہ فراز α ہے۔ اس عمارت کی بلندی معلوم کرنے کے لیے آپ کس مثلثی نسبت کا استعمال کریں گے۔

2۔ ایک x میٹر طول والی سیڑھی ایک انتصابی دیوار سے ٹکی ہوئی ہے جو سطح زمین سے θ کا زاویہ بناتی ہے دیوار کے اس مقام تک کی بلندی جہاں سیڑھی ٹکی ہوئی ہے، معلوم کرنے کے لیے آپ کس مثلثی نسبت کا استعمال کریں گے۔

اب تک ہم دی گئی تفصیلات کے مطابق فاصلے اور بلندیوں سے متعلق کچے خاکے بنانے کے علاوہ جیومٹریائی طرز پر تبادلہ خیال کیا۔ اب ہم فاصلہ اور بلندی کو محسوب کرنے کے طریقہ عمل کے بارے میں واقفیت حاصل کریں گے۔

مثال-4: ایک لڑکا ایک برقی کھمبے کے قدم سے 8 میٹر فاصلہ پر موجود ایک نقطہ سے برقی کھمبے کے اوپری حصہ کا مشاہدہ کرتا ہے جس کا زاویہ فراز 60^o ہے۔ کھمبے کی بلندی معلوم کیجیے۔



حل: شکل کے مطابق مثلث OAB میں

$OB = 8$ میٹر

$\angle AOB = 60^o$

فرض کرو کہ کھمبے کی بلندی = $h = AB$ میٹر

(ΔOAB میں $\angle AOB$ کے متصلہ ضلع کا طول ہمیں معلوم ہے۔ ہمیں مقابل کے ضلع کا طول مطلوب ہے۔ لہٰذا اس مسئلہ (سوال) کو حل کرنے کے لیے ہمیں tan مثلثی نسبت کو استعمال کرنا ہوگا)

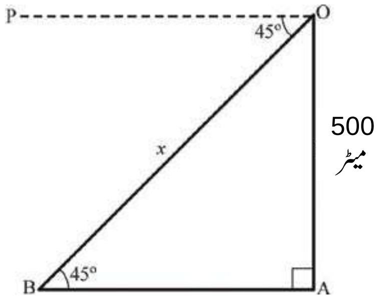
$$\tan 60^o = \frac{AB}{OB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8}$$

$$h = 8\sqrt{3}m.$$ میٹر

SCERT TELANGANA

مثال-5: حبیب ایک ہیلی کاپٹر سے زمین پر کھڑے ایک شخص کا مشاہدہ کرتا ہے جس کا زاویہ نشیب 45^{o} ہے۔ اگر ہیلی کاپٹر سطح زمین سے 500 میٹر کی اونچائی پر اُڑ رہا ہو تب حبیب سے اس شخص کا فاصلہ معلوم کیجیے۔



حل: کچے خاکے کے مطابق مثلث OAB میں

OA = 500 میٹر

$\angle POB = \angle OAB = 45^{o}$ (کیوں؟)

OB = حبیب سے شخص کا فاصلہ = x

(ہم $\angle OBA$ کے مقابل کے ضلع سے واقف ہیں اور ہم کو مثلث OAB میں وتر OB کو معلوم کرنا ہوگا۔ لہٰذا اس مسئلہ کو حل کرنے کے لیے مثلثی نسبت 'sin' کا استعمال کرنا ہوگا۔

$$\sin 45^{o} = \frac{OA}{OB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500}{x}$$

$$x = 500\sqrt{2}\,m$$

(لہٰذا حبیب سے شخص کا فاصلہ $500\sqrt{2}$ میٹر ہے۔

مشق - 12.1

1۔ ایک مینار زمین پر انتصاباً ہے اس کے قدم سے 15 میٹر کی دوری پر ایک نقطہ سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 45^{o} ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کیجیے؟

2۔ ایک درخت کا اوپری حصہ ہوا کی وجہ سے ٹوٹ کر 30^{o} کے زاویہ سے زمین پر ٹک گیا۔ درخت کے قدم سے زمین پر ٹکے ہوئے اوپری حصہ کے سرے کا درمیانی فاصلہ 6 میٹر ہے۔ ٹوٹنے سے پہلے درخت کی بلندی معلوم کیجیے۔

3۔ ایک کھیل کے میدان میں بچوں کے کھیلنے کے لیے ایک کنٹراکٹر ایک پھسل بنڈہ (Slider) بنانا چاہتا ہے۔ وہ پھسل بنڈے کی بلندی 2 میٹر رکھنا چاہتا ہے جو زمین سے 30^{o} کا زاویہ بناتا ہو تب اُس پھسل بنڈہ (Slider) کا طول کیا ہوگا؟

4۔ ایک انتصابی کھمبا 15 میٹر اونچا ہے صبح 8 بجے اس کے سایہ کی لمبائی $15\sqrt{3}$ میٹر ہے اس وقت زمین سے سورج کی کرنوں کا زاویہ فراز کیا ہوگا؟

5۔ آپ ایک 10 میٹر بلندی والے کھمبے کو تین مضبوط رسیوں کی مدد سے نصب کرنا چاہتے ہیں اگر ہر رسی کھمبے کے ساتھ 30^{o} کا زاویہ بناتی ہے تب رسی کا طول کیا ہوگا؟

SCERT TELANGANA

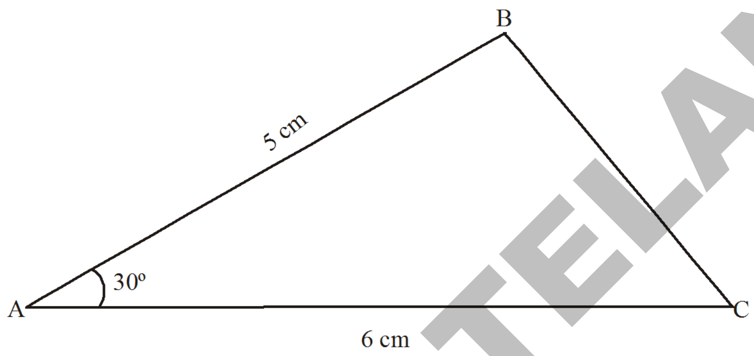
6۔ مان لیجیے کہ آپ ایک 6 میٹر بلند عمارت کے اوپر سے زمین پر موجود ایک شئے پر 60^o زاویہ نشیب سے تیر چلا رہے ہیں۔ تب آپ کے اور شئے کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

7۔ 9 میٹر بلند برقی کھمبے پر ایک الکٹریشن کنکشن کو درست کرنا چاہتا ہے۔ جس کے لیے اسے اس کھمبے کی بلندی سے 1.8 میٹر نیچے پہنچنا ہے۔ جب وہ سطح زمین سے 60^o زاویہ سے ایک سیڑھی کو استعمال کرنا چاہتا ہے تب اس سیڑھی کا طول کیا ہوگا؟ سیڑھی کے قدم اور کھمبے کے قدم کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک کشتی دریا کو عبور کرتی ہے پانی کے بہاؤ کی وجہ سے کشتی ایک کنارے سے 60^o زاویہ سے 600 میٹر فاصلہ طئے کرتے ہوئے دوسرے کنارے پر پہنچتی ہے تب دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

9۔ ایک مشاہدہ کار جس کا قد 1.8 میٹر ہے۔ ایک کھجور کے درخت سے 13.2 میٹر فاصلہ پر کھڑا ہے۔ اس کی آنکھ سے درخت کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 45^o ہے۔ کھجور کے درخت کی بلندی معلوم کیجیے۔

10۔ متصلہ شکل میں AC= 6 سنٹی میٹر، AB = 5 سنٹی میٹر اور $\angle BAC=30^o$ ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

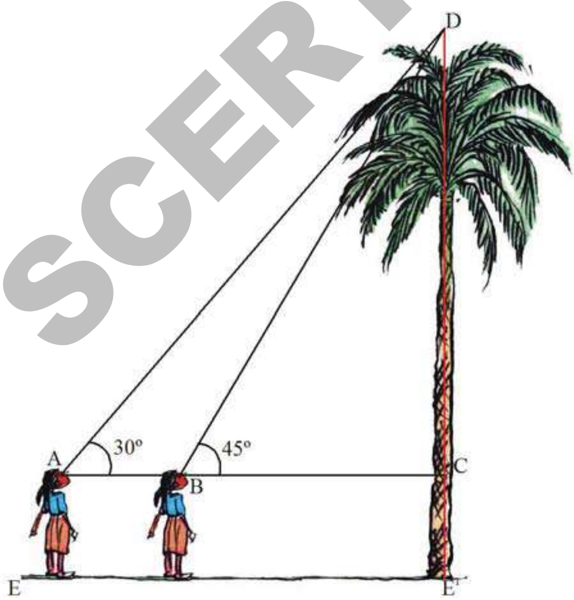


12.3 دو قائم الزاویہ مثلثات پر مبنی سوالات کا حل

اب تک ہم نے ایک مثلث کے ذریعہ سوالات کے حل کا مطالعہ کیا ہے۔ اگر دو مثلثات ہوں تب اس کو کس طرح حل کیا جانا چاہیے۔

فرض کرو کہ آپ ایک کھجور کے درخت کی ایک جانب کھڑے ہیں اور آپ اس درخت کی بلندی معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کے لیے آپ مختلف مقامات سے درخت کا مشاہدہ کرتے ہیں

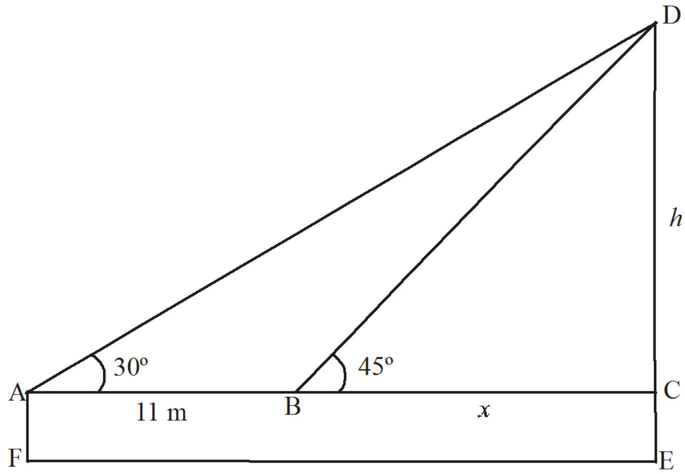
آپ یہ کس طرح معلوم کریں گے؟ فرض کرو کہ آپ اس کھجور کے درخت کا زاویہ فراز 45^o مشاہدہ کرتے ہیں۔ جب آپ 11 میٹر (درخت کے مخالف سمت) آگے بڑھتے ہیں تب زاویہ فراز 45^o سے 30^o درجہ ہو جاتا ہے۔



SCERT TELANGANA

آیئے! ہم دیکھیں گے کہ درخت کی بلندی کس طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔

کچے خاکے کے مطابق



AB = 11 میٹر

$\angle DAC = 30^o$

$\angle DBC = 45^o$

فرض کرو کہ کھجور کے درخت کی بلندی CD = h میٹر

اور BC کا طول = x میٹر

تب $AC = 11 + x$

مثلث BDC سے

$$\tan 45^o = \frac{DC}{BC}$$

$$1 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \quad .... (1)$$

مثلث ADC رو سے

$$\tan 30^o = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{11+x}$$

$$h = \frac{11+x}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \text{((1)مساوات)}$$

$$h - \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{11}{\left(\sqrt{3}-1\right)} \quad \text{m}$$

نوٹ: کھجور کے درخت کی کل بلندی CE ،CD + CE ہے جہاں CE = AF آپ کا قد ہے۔

SCERT TELANGANA

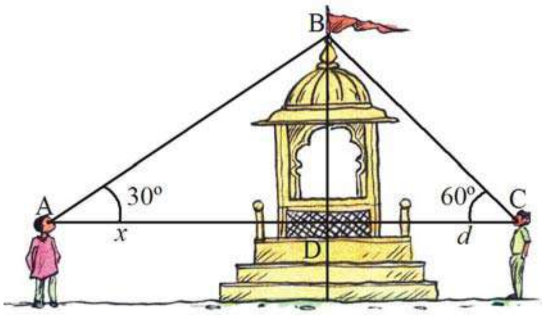
مثال-6: ایک 30 میٹر بلند مسجد کے دونوں جانب کھڑے ہوئے دو اشخاص مسجد کے بالائی حصے کا زاویہ فراز 30^o اور 60^o مشاہدہ کرتے ہیں۔ دو اشخاص کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ مسجد کی بلندی BD=30 میٹر

پہلے شخص کا زاویہ فراز $\angle BAD = 30^o$

دوسرے شخص کا زاویہ فراز $\angle BCD = 60^o$

فرض کرو کہ پہلے شخص اور مسجد کے درمیان کا فاصلہ AB=x میٹر اور دوسرے شخص اور مسجد کے درمیان کا فاصلہ CD=d میٹر



مثلث BAD سے

$$\tan 30^o = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{x}$$

$$x = 30\sqrt{3} \text{ ....(1)}$$

مثلث BCD سے

$$\tan 60^o = \frac{BD}{d}$$

$$\sqrt{3} = \frac{30}{d}$$

$$d = \frac{30}{\sqrt{3}} \text{ ....(2)}$$

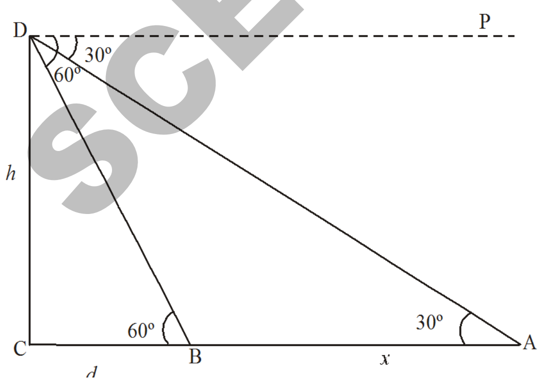
مساوات (1) اور (2) سے دو اشخاص کے درمیان فاصلہ

$$BC + BA = x + d$$

$$= 30\sqrt{3} + \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\times 4}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}\, m$$

مثال-7: ایک مینار کے قدم تک سیدھا راستہ ہے۔ مینار کے اوپر ٹھہر کر راشد ایک کار کا مشاہدہ کرتا ہے۔ جس کا زاویہ نشیب 30^o پاتا ہے۔ مینار کی جانب ہموار رفتار سے آرہی کار سے زاویہ نشیب 6 سکنڈ بعد 60^o ہوجاتا ہے۔ تب کار کا اس مقام سے مینار تک پہنچنے کے لیے درکار وقت معلوم کیجیے۔

حل: کچے خاکے کے مطابق



فرض کرو کہ 6 سکنڈ میں کار کا طئے شدہ فاصلہ = AB = x میٹر

مینار کی بلندی = CD = h میٹر

6 سکنڈ بعد کار اور مینار کے درمیان کا باقی فاصلہ d=BC میٹر

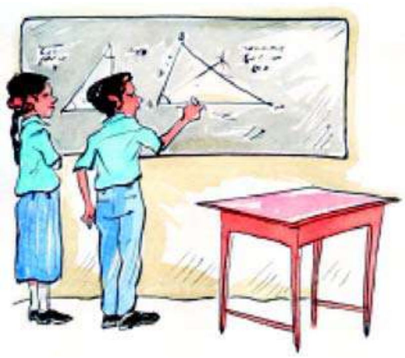
اور $AC = AB + BC = (x + d)$m

$\angle PDA = \angle DAP = 30^o$ (کیوں؟)

$\angle PDB = \angle DBP = 60^o$

مثلث ΔBCD سے

SCERT TELANGANA



$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{d}$$

$$h = \sqrt{3}d \quad \text{.................}(1)$$

مثلث ΔACD سے

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(x+d)}$$

$$h = \frac{(x+d)}{\sqrt{3}} \quad \text{.................}(2)$$

مساوات (1) اور (2) سے

$$\frac{x+d}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}d$$

$$x + d = 3d$$

$$x = 2d$$

$$d = \frac{x}{2}$$

'x' میٹر فاصلہ طئے کرنے کے لیے درکار وقت = 6 سکنڈ

'd' میٹر فاصلہ طئے کرنے کے لیے درکار وقت $= \frac{x}{2} = 3$ سکنڈ

مشق - 12.2

1۔ سڑک کے کنارے ایک ٹی وی ٹاور عموداً نصب کیا گیا ہے۔ سڑک کے دوسرے کنارے سے ٹاور کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 60° ہے۔ اس نقطہ سے $10m$ کے فاصلہ پر ایک اور نقطہ سے ٹاوَر کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 30° ہے۔ ٹاوَر کی بلندی اور سڑک کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

2۔ ایک 1.5 میٹر قد والا لڑکا کچھ فاصلہ سے 30 میٹر بلند ایک مسجد کے بالائی حصہ کا مشاہدہ کر رہا ہے جب وہ اس مقام سے کچھ دور مسجد کی جانب بڑھتا ہے تب لڑکے اور مینار کے کلس کے درمیان بننے والا زاویہ 30^o سے 60^o ہو جاتا ہے لڑکے کا مسجد کی جانب طئے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے۔

3۔ ایک لہکنا 2 میٹر بلند قاعدے پر کھڑا ہے زمین پر کسی نقطہ سے لہکنا کے اوپری حصہ کا زاویہ فراز 60^o اور اسی نقطہ سے قاعدے کے اوپری حصے کا زاویہ فراز 45^o ہے۔ لہکنا کی بلندی معلوم کیجیے۔

4۔ ایک عمارت کے اوپری حصہ سے ایک سیل فون ٹاور کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 60^o ہے۔ اور اس کے قدم کا زاویہ نشیب 45^o ہے۔ اگر عمارت سے ٹاور کا درمیانی فاصلہ 7 میٹر ہے تب ٹاور کی بلندی معلوم کیجیے۔

5۔ ایک برقی کھمبے کو 18 میٹر طول والے تار کے سہارے سے نصب کیا گیا ہے جو سطح زمین سے 30^o کا زاویہ بناتا ہے کیونکہ وائر کا طول زیادہ ہونے کی وجہ سے اس کو کاٹ کر کھمبے سے قریب کسا گیا ہے جو سطح زمین سے 60^o کا زاویہ بناتا ہے۔ بتائیے کہ کاٹے گئے تار کا طول کا کتنا ہے۔

6۔ ایک مینار کے قدم سے ایک عمارت کی چھت کا زاویہ فراز 30^o ہے اور اس عمارت کے قدم سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 60^o ہے اگر مینار کی بلندی 30 میٹر ہے تب عمارت کی بلندی کیا ہوگی؟

7۔ ایک سڑک کے دونوں کنارے دو مساوی بلندیوں والے ستون ایک دوسرے کے مقابل کھڑے ہیں سڑک کی چوڑائی 120 میٹر ہے۔ ان ستونوں کے درمیان سڑک پر کسی نقطہ سے ان کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز بالترتیب 30^o اور 60^o ہے۔ دونوں ستون کی بلندی اور دونوں ستون سے نقطہ کے مشاہدہ کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک مینار کے قدم سے 4 میٹر اور 9 میٹر کے فاصلہ پر واقع دو نقاط سے اس مینار کے بالائی حصہ کے زاویے فراز اتمامی ہیں (دونوں زاویوں کا مجموعہ 90^o ہے) مینار کی بلندی معلوم کیجیے؟

9۔ زمین پر ایک نقطہ A سے جٹ ہوائی جہاز کا زاویہ فراز 60^o مشاہدہ کیا گیا۔ 15 سکنڈ بعد زاویہ فراز 30^o ہو جاتا ہے اگر جٹ ہوائی جہاز سطح زمین سے مستقل بلندی $1500\sqrt{3}$ میٹر پر سفر کر رہا ہو تب جٹ کی رفتار معلوم کیجیے؟ $\left(\sqrt{3} = 1.732\right)$

10۔ ایک عمارت کے قدم سے مینار کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 30^o ہے اور چمنیور کے قدم سے عمارت کے بالائی حصہ کا زاویہ فراز 60^o ہے۔ تب مینار اور عمارت کی بلندیوں میں نسبت معلوم کیجیے۔

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

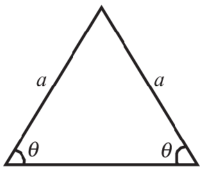
1۔ ایک لڑکی جس کا قد 1.2 میٹر ہے۔ زمین سے 88.2 میٹر بلندی پر ہوا میں اُفقی سمت میں حرکت کرنے والے ایک غبارے کا مشاہدہ کرتی ہے۔ لڑکی کی آنکھ سے غبارے کا زاویہ فراز 60^o بنتا ہے۔ کچھ دیر بعد زاویہ فراز گھٹ کر 30^o ہو جاتا ہے۔ اس وقفہ کے دوران غبارے کا طئے کردہ فاصلہ معلوم کیجیے؟

SCERT TELANGANA

2۔ A، B اور C تین کشتیاں ایک خط مستقیم میں لائٹ ہاؤز کی جانب سفر کررہی ہیں۔اور کشتی B اور کشتی C کا درمیانی فاصلہ y میٹر ان کشتیوں سے لائٹ ہاؤز پر بننے والے زاویئے فراز بالترتیب a، $2a$ اور $3a$ ہیں۔اگر کشتی A اور کشتی B کا درمیانی فاصلہ x میٹر ہو تب لائٹ ہاؤز کی بلندی معلوم کیجیے؟

3۔ ایک مکعب نما شکل کا محراب جس کے اندرونی حصہ کے طول، عرض اور بلندی میں $1:\sqrt{2}:1$ کی نسبت ہے۔اس بڑے سے بڑے بڑے چھڑی کا طول والی چھڑی کا زاویہ کیا ہوگا جو اس محراب میں رکھی جا سکے۔معلوم کیجیے۔

4۔ ایک 232848 مکعب سمر حجم والے لوہے کے کرے کو پگھلا کر ایک مخروط تیار کیا گیا۔جس کا راسی زاویہ 120^{o} ہے۔اس کا قاعدہ اور بلندی معلوم کیجیے۔



5۔ ثابت کرو کہ مساوی الساقین مثلث کا رقبہ $A = a^2 Sin\theta Cos\theta$ ہے جہاں دو مساوی ضلعوں میں سے ایک ضلع A ہے اور ان دونوں ضلعوں میں سے ایک ضلع کا زاویہ θ ہے۔

6۔ ایک قائم مدوری مینار جس کی بلندی h اور نصف قطر r ہے۔سطح زمین پر کھڑا ہوا ہے۔اگر سطح زمین پر کوئی نقطہ P ہے۔مینار کے اوپری سطح کا نصف دائروی کنارہ ABC ہے۔اس طرح کے نقطہ B، P سے قریب ہے۔اگر A اور B کے زاویہ فراز ترتیب وار 45^{o} اور 60^{o} ہیں تو ثابت کرو۔ $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$

تجویز کردہ منصوبہ کام:

☆ مینار / درخت / عمارت کی بلندی (Clonometer) کی مدد سے معلوم کیجیے۔

ہم نے کیا سیکھا

اس باب میں ہم نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا ہے۔

1۔ (i) ''خط نظر'' وہ خط مستقیم ہے جو مشاہد کی آنکھ اور زیر مشاہدہ نقطہ کے درمیان اس طرح بنتی ہے جس طرح وہ اس کو دیکھتا ہے۔

(ii) کسی مشاہدہ جسم کا زاویہ فراز'' وہ زاویہ ہے جو خط نظر اور افقی خط کے درمیان بنتا ہے جب کہ جسم افقی سطح سے اوپر واقع ہو یعنی ایسی صورت جس میں مشاہدہ کار جسم کو دیکھنے کے لیے اپنا سر اوپر اٹھاتا ہو۔

(iii) ''کسی جسم کا زاویہ نشیب'' وہ زاویہ ہے جو خط نظر اور افقی خط کے درمیان بنتا ہے جبکہ جسم افقی سطح کے نیچے واقع ہو یعنی ایسی صورت جس میں مشاہدہ کار جسم کا دیکھنے کے لیے اپنا سر نیچے جھکاتا ہو۔

2۔ کسی جسم کا طول یا بلندی معلوم کرنا اور دو اجسام کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنے کے لیے مثلثی نسبتوں کو استعمال کیا جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

باب
13

قیاسیات
Probability

13.1 تمہید

ریاض اور واجدہ کیرم (Carrom) کھیلنے کے دوران گفتگو کر رہے تھے

ریاض : کیا آپ سمجھتے ہیں کہ ہم اس کھیل میں جیت حاصل کریں گے؟

واجدہ : جیت حاصل کرنے کے 50 فیصد امکانات ہیں۔ہم جیت سکتے ہیں۔

ریاض : آپ 50 فیصد کے امکانات کس طرح کہیں گے؟

آپ کیا سمجھتے ہیں؟ کیا واجدہ نے صحیح کہا۔

کیا ان کی جیت حاصل کرنے کے صرف 50 فیصد امکانات ہیں؟

اس باب میں ہم اس قسم کے سوالات سے متعلق مطالعہ کریں گے۔اس دوران ہم الفاظ جیسے ممکنہ ''غالباً'' حتی الامکان' وغیرہ جیسے الفاظ پر گفتگو کریں گے۔ جماعت نہم میں ہم نے حتی الامکان ہونے والے یا یقینی واقعات اور غیر یقینی اور ناممکن واقعات سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں اس کے علاوہ کسی واقعہ کے امکان سے متعلق اور کسی واقعہ کے نتائج ہمیشہ یکساں ہونا ضروری نہیں ہے۔اس سے متعلق بھی گفتگو کر چکے ہیں۔فی الوقت کسی واقعہ کے امکانی معیار سے متعلق سیکھیں گے۔

اس طرح معیاری امکانات کے مقداری تعین کے اظہار کے مطالعہ کو قیاسیات کہتے ہیں۔

13.1.1 قیاسیات سے کیا مراد ہے؟

آیئے! ایک تجربہ کرتے ہیں ایک سکہ کو ہزار دفعہ اچھالنے پر 455 مرتبہ چت اور 545 مرتبہ پٹ حاصل ہوا ہے۔اگر ہم چت حاصل ہونے کے امکانات معلوم کرنے کی کوشش کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ 1000 میں سے 455 ہے یا $\frac{455}{1000}$ یا 0.455 ہے۔

یہ قیاس کرنے کا تجربہ دراصل حقیقی تجربہ پر حاصل کردہ نتائج پر منحصر ہے جو کہ 1000 مرتبہ کسی سکہ کو اچھالنے سے حاصل ہوا۔ یہ اندازہ دراصل تجرباتی قیاس (Experimental probability) کہلاتا ہے اس تجرباتی قیاس کا اندازہ دراصل کسی ایک تجربہ کے نتائج کی اساس پر ہوتا ہے یعنی اگر اسی تجربہ کو دوبارہ ہزار مرتبہ سکہ اچھال کر وہی نتیجہ برآمد ہونا ضروری ہے بلکہ نتائج میں کچھ نہ کچھ فرق پایا جائے گا۔

SCERT TELANGANA

اسی طرح دنیا کے بیشتر ممالک کے افراد کے ذریعہ اس تجربہ کو دہرایا گیا اور نتائج کو چت کی اساس پر ریکارڈ کیا گیا۔

مثال کے طور پر اٹھارویں صدی میں فرانس کے ماہرین فطرت ڈی۔بفان (D.Buffan) نے ایک سکہ کو 4040 مرتبہ اچھالا تب اس کو 2048 مرتبہ چت حاصل ہوا۔اس تجربہ میں تجرباتی قیاسی چت پانے کا امکان $\frac{2048}{4040}$ یعنی 0.507 حاصل ہوا۔

برطانیہ کے سائنسداں جے۔ای کریچ J.E.Kerrich نے سکہ کو 10000 مرتبہ ٹاس کر کے 5067 چت حاصل کئے، چت تجرباتی قیاس $\frac{5067}{10000}$ یعنی 0.5067 حاصل ہوا۔ ماہر شماریات کارل پیرسن Carl Pearson نے زائد وقت دے کر 24000 مرتبہ ٹاس کیا۔اس نے 12012 مرتبہ چت حاصل کیا۔اس نے چت کے لیے تجرباتی قیاس کے تحت 0.5005 حاصل کیا۔

فرض کیجیے کہ آپ سے پوچھا گیا کہ چت کی اساس پر تجرباتی قیاس کیا ہے؟ تجربہ کی تکمیل کے بعد کیا کہا جائے؟ ایک ملین مرتبہ؟ 10 ملین مرتبہ؟ آپ غور کریں گے کہ جیسے جیسے ٹاس کی تعداد میں اضافہ ہوگا چت یا پٹ کا تجرباتی قیاس 0.5 یا $\frac{1}{2}$ کے قریب تر ہوسکتا ہے جو کہ چت (یا پٹ) حاصل کرنے کا نظریاتی قیاس (theoretical probability) کہلاتا ہے۔

اب ہم نظریاتی قیاس کس طرح معلوم کرتے ہیں؟ سیکھیں گے۔

یہ باب دراصل کسی واقعہ کے نظریاتی قیاس کا تعارف ہے۔

اب ہم اس تصور کی بنیاد پر چند آسان وسہل سوالات سے متعلق گفتگو کریں گے۔

13.2: قیاسیات۔نظریاتی طرز رسائی

آیئے حسب ذیل صورتحال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔فرض کرو کہ ایک سکہ کو بے ترتیب اچھالا گیا ہے۔

جب ہم کسی سکہ کی بات کرتے ہیں تب اسکو Fair (بے داغ) تصور کرتے ہیں یعنی یہ تشاکلی ہوتا ہے جس سے وہ نیچے کی جانب گرتے وقت کسی امتیاز کا شکار نہیں ہوتا۔اس خصوصیت کو ہم سکہ کی غیر جانبداری کہتے ہیں۔یعنی اس سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ جب سکہ کو بے ترتیب انداز میں اچھالا جاتا ہے تب وہ سکہ آسانی سے بغیر کسی روکاٹ کے نیچے کی جانب گرتا ہے۔(یہاں پر یہ قیاس کیا جاتا ہے کہ سکہ نیچے گرتے وقت اس کے کنارے دونوں جانب چت یا پٹ کسی بھی سمت ہی گر سکتا ہے)

قیاسیات کے بنیادی تصورات کی تفہیم کے لیے اس باب میں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ تمام تجربات کے نتائج مساوی ممکنہ حتی الامکان حاصل ہوتے ہیں۔

اب ہم جانتے ہیں کہ کسی صورتحال یا واقعہ (E) کا تجرباتی قیاس P(E) ہے

$$P(E) = \frac{\text{موافق ممکنہ نتائج کے لیے کی گئی کوششوں کی تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

SCERT TELANGANA

یہ کیجیے

a) حسب ذیل تجربات کے لیے ممکنہ/حتی الامکان نتائج مساوی ہوتے ہیں۔

1۔ پانسہ اچھالنے کے بعد ہندسہ 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 حاصل ہونا۔

2۔ 5 سرخ، 4 نیلے اور 1 کالی گیند کے بکسے سے کسی بھی رنگ کی گیند کا انتخاب

3۔ کیرم بورڈ کے کھیل میں جیت کا امکان

4۔ دو ہندسی عدد میں اکائی کے مقام پر کوئی بھی ہندسہ 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 یا 9 کا انتخاب

5۔ 10 سرخ، 10 نیلے، 10 کالی گیندوں کے بیاگ میں سے کسی ایک گیند کا انتخاب

6۔ ماہ جولائی کے کسی مخصوص دن بارش کا امکان

b) کیا مندرجہ بالا ہر تجربہ کا امکان یکساں/مساوی ہوگا؟

c) پانچ (5) ایسی مثالیں دیجیے جس کا نتیجہ یکساں اور، 5 ایسی مثالیں دیجیے جس کا نتیجہ یکساں نہیں ہونے کا امکان ہو۔

مشغلہ

i) ایک سکہ 50 مرتبہ، 100 مرتبہ اور 150 مرتبہ اچھالیے اور چت یا پٹ کے حصول کی گنتی کیجیے۔ اپنے مشاہدات کو ذیل کے جدول میں درج کیجیے۔

سلسلہ نشان	تجربات کی تعداد	چت کی تعداد	چت کے وقوع کا قیاس	پٹ کی تعداد	پٹ کے وقوع کا قیاس
1	50				
2	100				
3	150				

آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ یقیناً جیسے جیسے تجربات کی تعداد بڑھتی جائے گی چت یا پٹ واقع ہونے کا قیاس 50% یا $\frac{1}{2}$ کے قریب ہوگا جائے گا۔ قیاس کا یہ تجرباتی پہلو ہر موقعہ/ واقعہ/صورتحال کے لیے استعمال ہوگا جس میں تجربات کی تعداد بے زیادہ ہو۔

قیاسیات اور ماڈلنگ Probability and Modelling:

کسی بھی تجربے کو دہرانے کی کچھ پابندیاں ہوتی ہیں۔ چونکہ چند تجربات انتہائی قیمتی، اور چند نا قابل عمل ہوتے ہیں۔ حالاں کہ سکہ اچھالنے اور پانسہ ڈالنے کے تجربات دہرائے جاسکتے ہیں۔ لیکن کیا سٹیلائیٹ کی تنصیب کے تجربہ کو بار بار دہرا کر اسکی ناکامی کی تعداد کا قیاس کیا جاسکتا ہے۔

SCERT TELANGANA

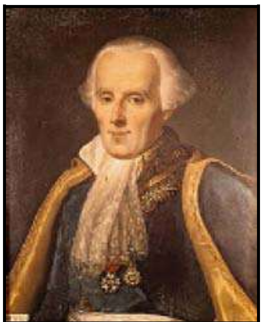
تجرباتی قیاس کا شمار اس وقت بھی نا کام ہوتا ہے جب دیکھا جائے کہ زلزلہ کے ظہور کی صورتحال کو بار بار دہرا کر یہ اندازہ لگانے کی کوشش کی جائے کہ ہمہ منزلہ عمارت مسمار ہوتی ہے؟ ان قیاسیات کے حصول کے لیے مصنوعی طور پر ان تجربات کو انجام دے کر ان کے نتائج کا قیاس لگایا جاتا ہے۔ یہ ماڈلس(models) قیاس اور نتیجہ کی معقولیت کا مرکب ہوتے ہیں۔ موسم کی پیش قیاسی' انتخابی نتائج کے امکانات' آبادی کے اعداد و شمار' زلزلے' فصل کی پیداوار وغیرہ تمام ماڈلس اور قیاسیات پر منحصر ہوتے ہیں۔

مساوی' یکساں نتائج کا امکان (جو کہ کئی تجربات جیسے سکہ اچھالنے اور پانسہ ڈالنے میں معقول ہے) قیاسیات کی ایک قسم ہے جس میں کسی صورتحال کے قیاسیات سے متعلق ذیل میں دیا گیا ہے۔

کسی وقوع T کے نظریاتی قیاس کو (P(T)) سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی تعریف اس طرح ہے۔

$$P(T) = \frac{\text{T کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربے کے ممکنہ تمام نتائج کی تعداد}}$$

جہاں پر ہم یہ جان چکے ہیں کہ ان تجربات کے نتائج تقریباً و غالباً یکساں ہوتے ہیں۔ عام طور پر ہم نظریاتی قیاسیات کو ہی قیاسیات تصور کرتے ہیں۔



پیر سیمن لیپ لیس
(1749 - 1827)

لفظ قیاسیات(Probability) کو 1795ء میں سب سے پہلے پیر سیمن لا پ لیس(Pierre simon laplace) نے متعارف کیا۔

قیاسیات کے نظریہ کا مرکز 16 ویں صدی سے ملتا ہے جس میں اطالوی ماہر طبعیات و ریاضی جے۔ کارڈن (J.Cardon) نے اس عنوان پر پہلی کتاب تحریر کی۔ جس کا نام The Book on Games of Chance تھا۔ جیمس برنولی(James Bernoulle) (1654-1705) اے۔ ڈی۔ ماویر (1667-1754) اور پیر سیمن لیپ لیس ان ماہرین میں شامل ہے جنہوں نے اس میدان میں گراں قدر خدمات انجام دیں۔ حالیہ برسوں میں قیاسیات کے استعمال کی وسعت کئی میدانوں جیسے حیاتیات' معاشیات' جنینیات' طبیعات' سماجیات وغیرہ میں دیکھی جا رہی ہے۔

13.3: باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ (Mutually Exclusive Events):

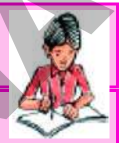
اگر سکے کو اچھالا جائے تب چت یا پٹ حاصل ہوتا ہے لیکن دونوں نہیں' اسی طرح ہم کسی فوقانوی سطح کے طالب علم کا انتخاب کریں تو' اس کا تعلق ششم، ہفتم، ہشتم، نہم یا دہم میں کسی ایک جماعت سے ہے۔ نا کہ کسی دو یا دو سے زائد جماعتوں سے۔ ان دونوں مثالوں سے یہ بات واضح ہو جاتی ہے کہ کسی ایک واقعہ کا وقوع ہونا دوسرے واقعہ کے وقوع ہونے کو روکتا ہے ایسے وقوعے ہی باہمی غیر مشمولی وقوعہ کہلاتے ہیں

دو یا دو سے زائد وقوعہ کے کسی تجربے میں کسی ایک واقعہ کا وقوع ہونا دوسرے وقوعہ کا روکنا، باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ کہلاتا ہے اس سے متعلق اس باب کے اواخر میں گفتگو کریں گے۔

SCERT TELANGANA

13.4.1: قیاس معلوم کرنا Finding Probability

ہم یکساں وقوع ہونے والے وقوعہ کا کس طرح قیاس معلوم کریں گے۔ سکہ اچھالنے کو ہم ایک واقعہ جو کہ تجربات سے مربوط ہے لیتے ہیں جہاں پر کہ قیاسیات یکساں طور پر ہوتے ہیں۔ مزید ہم جانتے ہیں کہ ہر موقع پر صرف دو ممکنہ نتائج ہوسکتے ہیں۔ ان حاصل نتائج کے سٹ کو (Sample space) کہتے ہیں۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک مرتبہ سکہ اچھالنے کا Sample Space {H,T} ہے۔ کسی بکسے سے جس میں سرخ، نیلے زرد، سفید رنگ کی گیندیں موجود ہوں ایک گیند نکالنے کا Sample Space {R,B,Y,W} ہے پانسہ ڈالنے کا Sample Space کیا ہوگا؟



یہ کیجیے

5 واقعے لیجیے جس میں یکساں مواقع موجود ہوں اور ان کا Sample Space معلوم کیجیے۔

آیئے ہم یکساں مواقع رکھنے والے باہمی غیر مشمولی قیاسیات سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔

مثال-1: ایک سکہ ایک مرتبہ اچھالنے پر چت حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔ اسی طرح پٹ حاصل ہونے کا قیاس بھی معلوم کیجیے۔

حل: اس تجربے میں ایک مرتبہ سکہ اچھالنے پر متوقع نتائج چت (H) اور پٹ (T) ہیں۔ فرض کرو کہ چت (H) اور حاصل ہونے کا وقوعہ (E) کے موافق حاصل ہونے والے نتیجے کی تعداد '1' ہوگی۔

$$P(E) = \frac{\text{E کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربے کے ممکنہ تمام نتائج کی تعداد}} = \frac{1}{2}$$

اسی طرح پٹ (T) حاصل ہونے کا وقوعہ F ہو تو

$$P(F) = P(T) = \frac{1}{2}$$ (اندازہ کیجیے۔ کیوں؟)

مثال-2: ایک تھیلی میں 1 سرخ، 1 نیلی اور 1 زرد گیند ہیں۔ تمام گیندوں کی جسامت یکساں ہے۔ تھیلی میں دیکھے بغیر عمران ایک گیند لیتا ہے تب وہ گیند (i) سرخ (ii) نیلی (iii) زرد گیند ہونے کے لیے قیاس دریافت کیجیے۔

حل: عمران نے بغیر دیکھے گیند اُٹھائی لہٰذا تمام نتائج کے یکساں مواقع ہوں گے۔ زرد رنگ کی گیند اُٹھانے کو Y نیلی گیند اُٹھانے کو B اور سرخ گیند اٹھانے کو R تصور کرنے پر Sample Space {Y,B,R} ہوگا۔

متوقع ممکنہ نتائج کی تعداد = 3

(i Y=1 حاصل ہونے کے ممکنہ نتائج کی تعداد

$$\therefore P(Y) = \frac{1}{3}$$

اسی طرح $P(R) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$

SCERT TELANGANA

مشاہدات:

1۔ کسی تجربے کے دوران نتیجہ کی تعداد صرف ایک ہوتو اس کو بنیادی وقوع کہتے ہیں۔

مثال (1) میں دونوں وقوعے E اور F بنیادی وقوعے ہیں اسی طرح مثال 2 کے تین وقوعے Y، B اور R بنیادی وقوعے ہیں۔

2۔ مثال (1) غور کرنے پر $P(E) + P(F) = 1$

اسی طرح مثال (2) میں $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

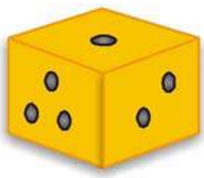
یعنی کسی تجربے کے تمام بنیادی وقوعے کا قیاس 1 ہوتا ہے۔

3۔ پانسہ ڈالنے کے وقوعے میں 3 سے کم یا حاصل ہونے والے وقوعے یا 3 سے زائد حاصل ہونے والے وقوعے بنیادی وقوعے نہیں ہے لیکن دو سکے اچھالنے پر متوقع وقوعے {HH}، {TT}، {HT}، {TH} بنیادی وقوع ہیں۔

مثال - 3: پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر (i) 4 سے بڑے عدد حاصل ہونے کا قیاس

(ii) 4 یا اس سے چھوٹا عدد حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

حل: (i) ایک پانسہ ڈالنے پر ممکنہ واقعات



Sample Space $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد $n(S) = 6$

4 سے بڑا عدد حاصل ہونے والے کے لیے موافق واقعات $E = \{5, 6\}$

موافق نتائج کی تعداد $n(E) = 2$

E کا قیاس $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) فرض کرو کہ 4 یا اس سے چھوٹا عدد حاصل ہونے والا متوقع نتیجہ F ہے تو

Sample Space $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد $n(s) = 6$

4 سے چھوٹا عدد حاصل ہونے والے کے لیے موافق واقعات $F = \{1, 2, 3, 4\}$

موافق نتائج کی تعداد $n(F) = 4$

واقعہ کا قیاس $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

SCERT TELANGANA

نوٹ: کیا اوپر کی مثال میں بتائے گئے واقعات E اور F بنیادی وقوعے ہیں؟

نہیں۔ یہ بنیادی وقوعے نہیں ہیں چونکہ واقعہ E میں 2 متوقع نتائج جبکہ واقعہ F میں 4 متوقع نتائج ہیں

13.4.2 تکمیلی وقوعہ اور قیاسیات Complementary Events And Probability:

اس سے قبل ہم نے بنیادی وقوعہ سے متعلق معلومات حاصل کر چکے ہیں۔ مثال 3 کے واقعات بنیادی وقوعے نہیں ہیں لیکن ان کے قیاسیات کا مشاہدہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$P(E)+P(F)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

یہاں پر F کا وقوع ''E نہیں'' کے مساوی ہے۔ ہم ''E نہیں'' کو E سے ظاہر کرتے ہیں اسکو وقوعہ E کا تکمیلی وقوعہ کہتے ہیں۔

لہذا $P(E) + P(\text{نہیں } E)=1$

یعنی $P(E) + P(\overline{E})=1$

جس سے $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر E اگر کوئی واقعہ ہو تب $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ ہوگا۔

یہ کیجیے

(i) کیا چت کا حاصل ہونا پٹ حاصل ہونے کا تکمیلی وقوعہ ہے؟ وجوہات بتلائیے۔

(ii) پانسہ کی صورت میں ایک حاصل ہونے کا وقوعہ 2, 3, 4, 5, 6 حاصل ہونے کا تکمیلی وقوعہ ہے؟ وجوہات بتلائیے۔

(iii) پانچ باہمی تکمیلی واقعات کی کوئی 5 مثالیں دیجیے۔

13.4.3 ناممکن اور یقینی وقوعے

فرض کرو کہ 1,2,3,4,5,6 ہندسے لکھا ہوا پانسہ ڈالا گیا ہے۔

(i) پانسہ ڈالنے پر ہندسہ 7 حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے۔

ایک پانسہ میں 1,2,3,4,5,6 یعنی 6 ہی رخ ہیں جن پر ہندسے لکھے ہوئے ہیں اس پانسہ کا 7 واں رخ یا 7 لکھا ہوا رخ موجود نہیں ہے۔ لہذا 7 حاصل ہونا، ناممکن ہے۔ یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر 'O' ہوتی ہے لہذا پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر وقوعہ 7 حاصل ہونا ناممکن ہے۔

$$\therefore \quad P(\text{7 حاصل ہونا}) = P(7)=\frac{0}{6}=0$$

یعنی 7 کا وقوع ناممکن ہے اس وقوعہ کو ناممکن وقوعہ کہتے ہیں۔

(ii) پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا اس سے چھوٹے ہندسے حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟ کتنے ممکنہ وقوع ہوں گے۔

SCERT TELANGANA

چونکہ پانسے کے ایک رخ پر 6 اور باقی رخوں پر 6 سے چھوٹے ہندسے یعنی 1,2,3,4,5 کی نشاندہی کی گئی ہے لہٰذا پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا 6 سے کم ہندسوں کا وقوع ممکن ہے یعنی موافق اور جملہ وقوع کی تعداد مساوی ہے۔

$\therefore$ P(E)=P(6 یا اس سے چھوٹا ہندسہ) $= \frac{6}{6} = 1$

اس واقعہ میں یقینی موافقت کا قیاس 1 ہے،اس کو یقینی وقوعہ کہتے ہیں۔

نوٹ: قیاس P(E) کی تعریف سے ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے کم یا مساوی ہوتا ہے۔اس لیے $0 \le P(E) \le 1$

کوشش کیجیے

1۔ ایک بچے کے پاس موجود پانسہ کے رخوں پر A,B,C,D,E,F لکھا ہوا ہے۔ پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر (i) A اور (ii) D کے واقعہ ہونے کا قیاس لکھیے؟

2۔ ذیل میں کونسا عدد وقوعہ کے قیاس کو ظاہر نہیں کرتا؟

(a) 2.3 (b) -1.5 (c) 15% (D) 0.7

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ کسی بھی کھیل کے آغاز میں گیند کے حصول کے لیے غیر جانبدار عمل کے طور پر ہمیشہ سکہ اچھالا جاتا ہے کیوں؟

2۔ کیا کسی وقوعہ کا قیاس $\frac{7}{2}$ ممکن ہے؟ وضاحت کیجیے؟

3۔ ذیل کے کونسے جملے صادق ہیں یا کاذب؟ وجوہات بتلائیے؟

i) دو سکے اچھالنے پر ان کے تین متوقع نتائج ہوں گے؟ دو چت یا دو پٹ یا ایک چت یا ایک پٹ۔اس طرح ہر نتیجہ کے لیے قیاس $\frac{1}{3}$ ہوگا۔

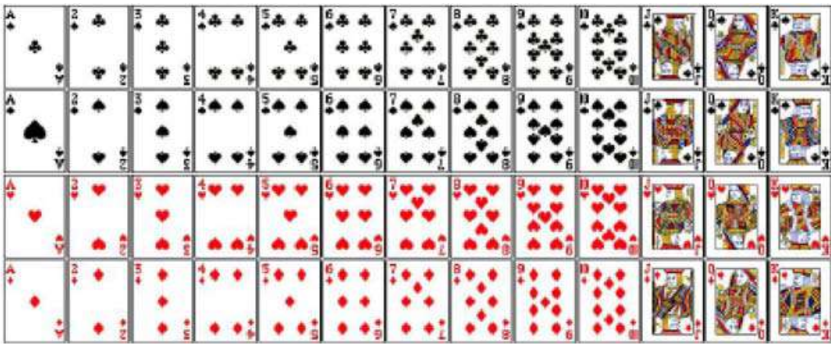
ii) ایک پانسہ ڈالنے پر صرف 2 متوقع نتائج ہوں گے طاق عدد یا جفت عدد۔اسطرح طاق عدد کا متوقع نتیجہ $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

13.5 تاش کے پتے۔قیاسات

کیا آپ نے تاش کے پتے دیکھیں ہیں؟ ایک سیٹ میں 52 کارڈ ہوتے ہیں جس میں 4 حصے ہوتے ہیں ہر حصہ میں 13 پتے ہوں گے جن میں بلاک سپیڈ (Black Spade) (♠) لال دل (♥) لال ہیرے (♦) اور بلاک کلب Black club (♣) ڈیزان والے پتے ہوتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

کارڈ کے ہر حصے میں Ace (یکہ)، King (بادشاہ)، Queen (بیگم)، Jack (غلام)، 3,4,5,6,7,8,9,10 اور 2 ہوتے ہیں۔



بادشاہ، بیگم اور غلام کومہرے (Face cards) کہتے ہیں۔ ان تاش کے پتوں سے مختلف قسم کے کھیل کھیلے جاتے ہیں۔ بعض کھیل تاش کے چند پتوں سے کھیلتے ہیں جبکہ اور چند کھیل پتوں کے 2 سیٹس سے کھیلتے ہیں اس کھیل میں پتے بانٹتے وقت حزب مخالف کے پاس موجود پتوں کے امکانات کے مطابق بھی چال چلنے کے لیے قیاسیات کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال - 4: تاش کے پتوں کو اچھی طرح منتشر (Shuffle) کرکے اس میں اسے ایک کارڈ لیا گیا ہے یہ کارڈ۔

i) یکہ Ace ہوگا ii) یکہ (Ace) نہیں ہوگا کے لیے قیاس محسوب کیجیے۔

حل: i) ''تاش کے پتوں میں 4 یکے ہوتے ہیں'' فرض کرو کہ کارڈ یکہ ہونے کا وقوعہ E ہے۔

E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد = 4

نتائج کی جملہ ممکنہ تعداد (کیوں؟) = 52

$$\therefore\ P(E)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

ii) ''کارڈ یکہ موجود نہیں'' کو F فرض کرنے پر

موافق ممکنہ نتائج کی تعداد (F)=52−4=48 (کیوں؟)

نتائج کی جملہ ممکنہ تعداد = 52

$$\therefore\ P(F)=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$

متبادل طریقہ: غور کیجیے کہ F دراصل $\bar{E}$ ہے

لہٰذا ہم P(F) کو اس طرح بھی محسوب کر سکتے ہیں۔

$$P(F)=P(\bar{E})=1-P(E)$$

$$1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$$

کوشش کیجیے

(1) اگر اچھی طرح منتشر تاش کے پتوں میں سے ایک پتہ اٹھایا جائے تب وہ پتہ ''بیگم'' ہوگا۔ اس کا کتنا قیاس ہوگا؟

SCERT TELANGANA

2۔ وہ پتہ ''Face Card'' ہونے کا کتنا امکان ہے؟

3۔ وہ پتہ ''Spade'' ہونے کا کتنا احتمال/امکان ہوگا؟

4۔ وہ پتہ ''Spades'' کے ''Face Card'' ہونے کا کتنا امکان/احتمال ہوگا؟

5۔ وہ پتہ ''Face Card'' نہ ہونے کے کتنے امکانات ہوں گے؟

13.6۔ قیاسیات کا اطلاق

آیئے ہم مزید ان صورتحال کا جائزہ لیں گے جہاں پر قیاسیات کا استعمال/اطلاق ہوتا ہے کھیل کود کے مقابلوں میں چند ممالک طاقتور اور چند کمزور ہوتے ہیں۔ جب دو ٹیم کے کھلاڑی اپنے اپنے کھیل کا مظاہرہ کرتے ہیں تب جیت کے یکساں مواقع نہیں ہوتے۔ ایک کھلاڑی کھیل میں جیت حاصل کرنے کا قیاس لازمی طور پر دوسرے کھلاڑی یا دوسری ٹیم کے قیاس سے بہ قدرے زیادہ ہوتا ہے۔

ہمارے رشتہ دار اور دوستوں کے یوم پیدائش ایک ہی دن واقع ہوتے ہیں کیا ایسا ہونا عام بات ہے یا اتفاقی واقعہ ہے۔ اس کے کتنے امکانات ہوتے ہیں۔ ان سوالوں کے جواب کے حصول اور احتساب کرنے کے لیے روایتی قیاسیات کارآمد ہوتی ہیں۔

مثال-5: اسحاق اور عامر نے ٹینس میاچ کھیلا۔ اسحٰق کے میاچ جیتنے کا قیاس 0.62 ہو تو عامر کی جیت کا قیاس محسوب کیجیے۔

حل: اسحاق اور عامر کی جیت کے قیاس کو بالترتیب I اور A فرض کرنے پر

اسحٰق کے میاچ جیتنے کا قیاس $= P(I)=0.62$ (دیا گیا ہے کہ)

عامر کے میاچ جیتنے کا قیاس $= P(A)=1-0.62$

چونکہ A اور I تکمیلی ہیں $= 1 - 0.62=0.38$

مثال-6: آفرین اور فرحین دونوں سہیلیاں ہیں۔ ان دونوں کے (i) مختلف یوم پیدائش قیاس محسوب کیجیے (ii) ایک ہی یوم پیدائش (سال کبیسہ کو نظرانداز کیا جائے)

حل: ایک سال میں 365 ایام ہوتے ہیں۔ ان ایام میں کسی بھی دن ان دونوں کا یوم پیدائش ہوسکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ 365 ایام کے واقع ہونے کے مساوی امکانات ہیں۔

i) آفرین کا یوم پیدائش فرحین کے یوم پیدائش سے مختلف ہے۔ موافق نتائج کی تعداد $365-1=364$ ہے۔

$P($آفرین کا یوم پیدائش فرحین سے مختلف$) = \frac{364}{365}$

ii) $P($دونوں کے یوم پیدائش مختلف ہیں$) = 1-P($آفرین اور فرحین کا یوم پیدائش اگر ایک ہی دن ہے$)$

$P(\bar{E})=1-P(E)$ لینے پر $= 1-\frac{364}{365}=\frac{1}{365}$

SCERT TELANGANA

مثال-7: کسی اسکول کی جماعت دہم میں 40 طلباء وطالبات ہیں جن میں سے 25 لڑکیاں اور 15 لڑکے موجود ہیں۔ کلاس ٹیچر کو ان میں سے کسی ایک کو جماعت کا نمائندہ منتخب کرنا ہے انہوں نے ہر طالب علم کا نام الگ الگ کارڈ پر لکھا اس طرح کہ تمام کارڈس ایک جیسے لیے گئے۔ انہوں نے ان تمام کارڈس کو ایک بکسہ میں ڈالا اور خوب ہلایا۔ ان میں سے ایک کارڈ نکالنے پر (i لڑکی (ii) لڑکا ہونے کا قیاس/احتمال محسوب کیجیے۔

حل: کلاس میں جملہ طلباء وطالبات کی تعداد 40 ہے ان میں سے ایک کو منتخب کرنا ہے۔

متوقع نتائج کی جملہ تعداد 40 ہوگی۔

(i (کیوں؟) 25 = لڑکی کا نام ہونے کے موافق نتائج کی تعداد

P(لڑکی کا نام والا کارڈ) = P(لڑکی) $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii (کیوں؟) 15 = لڑکے کا نام ہونے کے موافق نتائج کا تعداد

P(لڑکے کے نام والا کارڈ) = P(لڑکا) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

یا P(لڑکا) = 1-P(لڑکا نہیں) = 1-P(لڑکی) $= 1-\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

مشق 13.1

1۔ ذیل کے بیانات کو مکمل کیجیے۔

(i وقوعہ (E نہیں) کا قیاس + وقوعہ (E) کا قیاس = ________________

(ii ایسا وقوعہ جو واقع نہیں ہوتا کا قیاس ______ ہوتا ہے ایسا وقوعہ __________ کہلاتا ہے۔

(iii ایسا وقوعہ جو یقینی ہو کا قیاس ______ ہوتا ہے اس طرح کا وقوعہ __________ کہلاتا ہے۔

(iv تمام بنیادی وقوعے کا مجموعہ ________________ ہوتا ہے۔

(v کسی وقوعہ کا قیاس ____________ سے بڑا یا مساوی ہوتا ہے اور ____________ سے چھوٹا یا مساوی ہوتا ہے۔

2۔ ذیل کے کن تجربات کے نتائج مساوی یکساں ہوتے ہیں؟ وضاحت کیجیے۔

(i ایک ڈرائیور کار اسٹارٹ (Start) کرنے کی کوشش کی۔ کار اسٹارٹ ہوگی یا نہیں۔

(ii ایک کھلاڑی باسکٹ بال کا گول (Goal) کرنا چاہا۔ وہ گول کر پائے گا یا نہیں۔

(iii صادق-کاذب پر مبنی سوالات کا جواب لکھنے پر وہ صحیح ہوگا یا غلط

(iv نومولود لڑکا ہوسکتا ہے یا لڑکی

SCERT TELANGANA

3۔ اگر $P(E)=0.05$ ہوتو ''E نہیں'' کا قیاس کیا ہوگا؟

4۔ ایک تھیلی میں لیموکی مہک کے والے چاکلیٹ ہیں۔شاہدہ نے بلا منصوبہ ایک چاکلیٹ لیا تب

i) نارنجی مہک والا ii) لیموکی مہک رکھنے والے چاکلیٹ کے قیاس کومحسوب کیجیے۔

5۔ ونا یک نے تاش کے پتوں میں سے تمام دل کے نشان (ڈیزان) والے پتے علحدہ کئے تب ذیل کا قیاس معلوم کیجیے۔

i) ایک پتہ لینے پر Ace (یکہ) ڈیزائن ہونے والے پتہ کا؟

ii) ہیرا ڈیزائن منتخب ہونے کا۔

iii) ''دل'' ڈیزائن نہ ہونیوالے پتے کا۔

iv) دل کا ڈیزائن رکھنے والے یکہ کا۔

6۔ تین طلباء میں دو طلباء کے یوم پیدائش ایک ہی دن واقع نہ ہونے کا قیاس 0.992 ہوتو بتلایئے کہ ایک ہی دن واقع ہونے کا قیاس کتنا ہوگا۔

7۔ پانسے کو ایک مرتبہ ڈالنے پر ذیل کا ممکنہ قیاس کیا ہوگا۔

i) مفرد عدد ii) 2 اور 6 کے درمیان واقع عدد iii) طاق عدد

8۔ تاش کے پتوں کے ڈھیر سے لال بادشاہ نکالنے کا قیاس کتنا ہوگا؟

9۔ پانسوں، کارڈس اور یوم پیدائش کے موقعوں کا استعمال کرتے وقت 5 مسائل (سوال) تیار کریں اور اس کے حل کے لیے ساتھیوں اور اپنے معلم سے تبادلہ خیال کیجیے۔

13.7 قیاسیات کے مزید اطلاق

ہم نے غور کیے ہیں کہ ہم نے قیاسیات کے استعمال کی چند مثالوں کا مشاہدہ کیا ان مثالوں میں دی گئی معلومات اور قیاسیات معلوم کرنے طریقہ پر غور کیجیے۔ہم کو تکمیلی وقوعے کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے۔بنیادی وقوعے کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے کیا آپ نے ان مثالوں اور مشقی سوالات میں ان نکات پر غور کیا ہے۔جو تکمیلی وقوع اور بنیادی وقوع اپناتے ہیں اپنے ساتھیوں اور معلم سے تبادلہ خیال کیجیے۔آیئے مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال-8: ایک صندوقچہ میں 3 نیلی، 2 سفید اور 4 سرخ کنچے (Marbles) ہیں۔انہیں اچھی طرح ہلا کر صندوقچہ میں سے ایک کنچہ لیا جائے تب کنچہ

i) سفید ii) نیلا iii) سرخ ہونے کا کا قیاس کیا ہوگا۔

حل: یہ کہنا اچھی طرح ہلا کر ایک کنچہ لیا گیا اس بات کی نشاندہی کرتا ہے کہ وہ کنچہ کسی بھی رنگ کا ہوسکتا ہے (کیوں؟)

(کیوں؟) $3+2+4=9$ = ممکنہ متوقع نتیجہ کی تعداد $\therefore$

فرض کرو کہ سفید کنچہ کو ''W'' نیلے کنچہ کو ''B'' اور سرخ کنچہ کو ''R'' سے ظاہر کیا گیا ہے۔

i) $W=2$ کے موافق نتائج ہونے کی تعداد

SCERT TELANGANA

$P(W)=\frac{2}{9}$

ii) اسی طرح $P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

iii) اور $P(R)=\frac{4}{9}$

واضح رہے کہ $P(W)+P(B)+P(R)=1$

مثال-9: مسکان نے `1` اور `2` کے دوسکوں کو بیک وقت اچھالا۔کم ازکم ایک چت حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔

حل: چت کو H اور پٹ T لیتے ہیں۔ جب دوسکوں کو بیک وقت اچھالا جائے تب متوقع نتائج (H,H)‘ (H,T)‘ (T,H)‘ (T,T) ہوں گے جو ایک جیسے’ یکساں‘ ہوں گے۔(H,H) سے مراد پہلے سکے (`1`) پر چت اور دوسرے سکہ (`2`) پر بھی چت حاصل ہوگا۔(H,T) سے مراد پہلے سکہ پر چت اور دوسرے سکہ پر پٹ اس طرح دیگر نتائج ہوں گے۔

کم ازکم ایک چت کے لیے موافق نتائج $E=\{(H,H),(H,T)(T,H)\}$

E کے موافق نتائج کی تعداد $n(E)=3$

$\therefore P(E)=\frac{3}{4}$ {کیونکہ ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد=4 }

یعنی مسکان کے کم ازکم ایک چت حاصل کرنے کا قیاس $\frac{3}{4}$ ہے۔

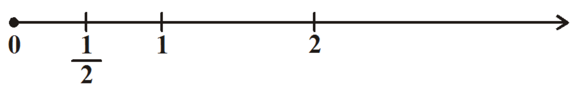
جانچیے:

کیا آپ نے غور کیا کہ اب تک جن مثالوں کا تذکرہ کیا گیا ہے ہر تجربے کے متوقع نتائج کی تعداد محدود تھی۔اگر نہیں تو اب تصدیق کیجیے کئی تجربات میں متوقع نتائج کی تعداد دیئے گئے اعداد کے درمیان ہوتی ہے۔یا متوقع نقطہ دیے گئے دائرہ یا مستطیل کے اندرونی واقع ہوسکتا ہے۔کیا آپ ان صورتوں میں ممکنہ نتیجہ کی تعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ہرگز نہیں چونکہ دو اعداد کے درمیان لامتناہی اعداد پائے جاتے ہیں اسی طرح دائرے میں لامتناہی نقاط پائے جاتے ہیں۔اب تک سیکھی گئی نظریاتی قیاسیات کی تعریف کا اطلاق اس صورت میں ممکن نہیں ہے۔

اس طرح کے مسائل کو کس طرح حل کیا جائے۔آیئے چند مثالوں کے ذریعہ غور کریں گے۔

مثال-10: میوزیکل چیر (Musical Chair) کھیل کے دوران میوزک بجانے والے کو یہ اختیار ہے کہ کھیل کے آغاز سے 2 منٹ کے اندر میوزک روک سکتا ہے۔کھیل کی شروعات کے پہلے آدھے منٹ میں میوزک کو روک دینا کا قیاس/احتمال معلوم کیجیے

حل: یہاں پر متوقع نتائج 0 اور 2 کے درمیان موجود تمام حقیقی اعداد ہو سکتے ہیں۔اس کو عددی خط پر ظاہر کرنے پر



SCERT TELANGANA

فرض کرو کہ پہلے $\frac{1}{2}$ منٹ میں میوزک روک دی گئی ہے کے لیے وقوعہ E ہے۔

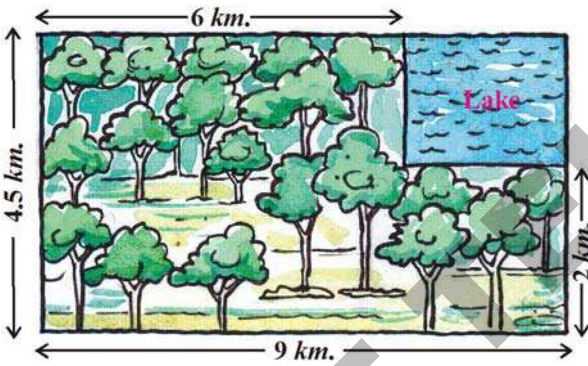
تب E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد عددی خط پر 0 اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان ہونگے۔

0 اور 2 کا درمیانی فاصلہ 2 ہو تب 0 اور $\frac{1}{2}$ کا درمیانی فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

چونکہ تمام ممکنہ نتائج غالباً مساوی ہوتے ہیں۔ اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جملہ فاصلہ 2 ہے اور E کے لیے موافق فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

$$\text{لہذا} \quad P(E) = \frac{\text{وقوعہ E کے موافق فاصلہ}}{\text{جملہ فاصلہ جس میں نتیجہ ہوسکتا ہے}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

اسی طریقہ کار کو رقبوں میں وسعت دیتے ہوئے جملہ رقبہ سے موافق رقبہ کا قیاس معلوم کرنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کریں گے۔



مثال-11: متصلہ شکل میں واقع مستطیلی شکل کے علاقے میں ایک ہیلی کاپٹر کے حادثے کا شکار ہو کر گرنے کی اطلاع ملی۔ اس ہیلی کاپٹر کے (متصلہ شکل کے) جھیل پر گرنے کے قیاس کو محسوب کیجیے۔

حل: ہیلی کاپٹر کے اس پورے مقام (متصلہ شکل) پر کہیں بھی گرنے کے غالباً مساوی امکانات ہیں۔

اس علاقے کا جملہ رقبہ جہاں ہیلی کاپٹر گر سکتا ہے $= (4.5 \times 9)\ km^2 = 40.5\ km^2$

جھیل کا رقبہ $= (2.5 \times 3)\ km^2 = 7.5\ km^2$

$\therefore$ P(جھیل جس میں ہیلی کاپٹر گر گیا) $= \frac{6}{40.5} = \frac{4}{27} = 0.185$

مثال-12: ایک بکسے میں 100 قمیص ہیں جن میں 88 بہتر حالت میں ہے۔ 8 قمیص میں تھوڑا نقص پایا گیا۔ جبکہ 4 قمیص میں بہت زیادہ نقائص پائے گئے۔ شاہد جو کپڑوں کا تاجر ہے بہتر قمیص قبول کرتا ہے جبکہ امجد صرف زیادہ نقائص والے قمیص لینے سے انکار کرتا ہے۔ اب اس بکسے سے ایک قمیص بلا منصوبہ نکالی جائے تب کس کے لینے کا امکان/احتمال کتنا ہے؟

i) شاہد کے   ii) امجد کے

SCERT TELANGANA

حل: 100 قمیص والے بکسے سے ایک قمیص نکالی گئی لہذا100 نتائج غالبًا مساوی ہوسکتے ہیں۔

i) شاہد کے موافق متوقع نتائج کی تعداد 88 ہوگی (کیوں)

لہذا P (شاہد کے قبول شدہ قمیص) $=\frac{88}{100}=0.88$

ii) امجد کے موافق متوقع نتائج کی تعداد $88+8=96$ (کیوں؟)

لہذا P(امجد کے قبول شدہ قمیص) $=\frac{96}{100}=0.96$

مثال-13: دو پانسے ایک سفید اور دوسرا سرخ کو بیک وقت ڈالا گیا۔ تمام ممکنہ نتائج لکھئے۔

دو پانسوں کے افق پر حاصل ہونیوالے دو اعداد کا مجموعہ (i) 8 (ii) 13 اور (iii) 12 یا اس سے کم حاصل ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجیے۔

حل: اگر سرخ پانسے کے افق پر '1' حاصل ہوتب سفید پانسے کے رخ پر 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 حاصل ہوسکتا ہے اسی طرح سرخ پانسے پر 2، 3، 4، 5 یا 6 ہوتب بھی یہی نتیجہ ہوگا۔ جدول میں اس تجربے کے ممکنہ موافق نتائج بتائے گئے ہیں۔ ہر جوڑی میں بتایا جانے والا پہلا عدد سرخ پانسہ کے افق پر پائے جانے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرا عدد سفید پانسے کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ بات غور طلب ہے کہ (1,4) جوڑ (4,1) سے مختلف ہے کیوں؟

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

لہذا ممکنہ نتائج کی جملہ تعداد $n(s)=6\times6=36$ ہوگی۔

i) وقوع E دو اعداد کا مجموعہ 8 ہے کے موافق ممکنہ نتائج

$E=(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$

(شکل دیکھئے)

اس طرح E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد $n(E)=5$

$$\therefore\ P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

ii) وقوع F دو اعداد کا مجموعہ 13 ہے کے موافق ممکنہ نتائج صفر ہوں گے۔

$$\therefore\ P(F)=\frac{0}{36}=0$$

iii) وقوع G دو اعداد کا مجموعہ 12 یا 12 سے کم ہو کے موافق ممکنہ نتائج تمام ہو سکتے ہیں۔

$$\therefore\ P(G)=\frac{36}{36}=1$$

SCERT TELANGANA

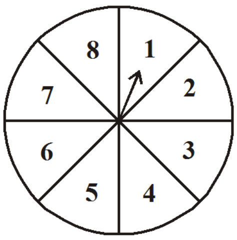
مشق 13.2

1۔ ایک تھیلی میں 3 سرخ اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ اگر اس تھیلی سے بلا منصوبہ ایک گیند لی جائے تب
(i) سرخ (ii) ''سرخ نہیں'' کا قیاس محسوب کیجیے۔

2۔ ایک بکسہ میں 5 سرخ، 8 سفید اور 4 سبز کنچے (Marbles) ہیں۔ بلا منصوبہ اگر اس بکسہ سے ایک کنچا (Marble) لیے گئے کنچوں میں
(i) سرخ (ii) سفید (iii) سبز نہیں کے لیے قیاس محسوب کیجیے۔

3۔ ایک بچوں کے غلّہ (Kiddy Bank) میں سو پچاس پیسیکے سکے، پچاس 1` کے سکے اور بیس 2` کے سکے اور دس 5` کے سکے ہیں اگر غلّے کو اُلٹا دیا جائے تب ہر سکہ کے غالباً مساوی امکانات ہونے کی صورت میں (i) 50 پیسے سکے (ii) 5` سکے نہیں کیلئے قیاس محسوب کیجیے۔

4۔ کریمہ نے اکوریم (Aquarium) کے لیے دکان سے مچھلی خریدی۔ دکاندار نے 5 نر اور 8 مادہ مچھلیوں میں سے بلا منصوبہ ایک مچھلی نکالنے پر حاصل ہونے والی مچھلی نر ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجیے (متصلہ شکل دیکھئے)



5۔ ایک کھیل میں تیزی سے گھمایا گیا تیر کا نشان (شکل کے مطابق) کسی ایک عدد 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 یا 8 پر ٹھہرتا ہے (شکل دیکھیے) اگر تمام اعداد پر ٹھہرنے کے غالباً مساوی وقوعے ہیں تو قیاس کو محسوب کیجیے۔ جبکہ تیر کا نشان ذیل کے اعداد پر ٹھہرتا ہے۔
i) 8? ii) طاق عدد iii) 2 سے بڑا عدد iv) 9 سے چھوٹا عدد

6۔ اچھی طرح منتشر کیے ہوئے 52 تاش کے پتوں سے بلا منصوبہ ایک پتہ نکالا گیا تب وہ ذیل کا پتہ ہونے کا امکان/قیاس محسوب کیجیے۔
i) لال بادشاہ ii) Face card (مہرہ کارڈ) iii) لال مہرہ کارڈ (Red face card)
iv) دل کے نشان والا غلام v) Spade vi) ہیرے کے نشان والی بیگم

7۔ تاش کے پتوں میں ''ہیرا'' نشان والے 5 پتے، 10 صرف بادشاہ، بیگم، غلام اور یکہ پتوں کو لے کر خوب پھینٹا گیا اس کے بعد بلا منصوبہ ایک پتہ نکالنے پر
i) وہ کارڈ (پتہ) بیگم کے ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔
ii) بیگم پتہ کو باز و رکھ کر دوسرا کارڈ (پتہ) نکالنے پر a) یکہ (Ace) ہونے کے لیے b) بیگم ہونے کے لیے قیاس محسوب کیجیے

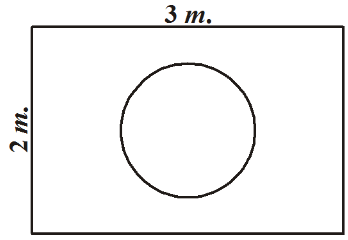
8۔ خرابی رکھنے والے 12 پن (PEN) 132 اچھے پن میں شامل ہو گئے۔ دیکھنے پر پن کی خرابی کو نہیں پہنچانا جا سکتا۔ اگر ایک پن بلا منصوبہ اٹھایا جائے تب اچھے پن کا قیاس کتنا ہوگا؟

9۔ 20 برقی بلب میں 4 ناقص بلب ہیں بلا منصوبہ ایک بلب اٹھانے پر اس بلب کے اچھے ہونے کا قیاس/امکان کیا ہوگا اگر اٹھایا/نکالا گیا بلب اچھا ہو تب اسکو بکسے میں رکھے بغیر دوسرا بلب اٹھانے پر اس بلب کے ناقص ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

SCERT TELANGANA

10۔ ایک بکسہ 90 قرص (Discs) ہونے کا پر مشتمل ہے جن پر 1 تا 90 اعداد لکھے گئے ہیں ۔ بلا منصوبہ ان میں سے ایک قرص کا انتخاب کرنے پر قرص پر ذیل کے اعداد ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

(i) دو ہندسی عدد (ii) کامل مربع (iii) 5 کا ضعف



11۔ متصلہ شکل کے مطابق ایک مستطیلی تختی پر ایک میٹر قطر والا دائرہ بنایا گیا اگر اس تختی پر پانسہ ڈالا جائے تب وہ اس دائرے کے اندر واقع ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

12۔ 144 پن کے بکسے میں 20 ناقص پن پائے گئے ہیں دکاندار نے ان میں سے ایک پن بلا منصوبہ اٹھایا اور شگفتہ کو دیا تب شگفتہ کے

(i) پن خریدنے (ii) نا خریدنے کا قیاس محسوب کیجیے۔

13۔ دو پانسوں کو بیک وقت لڑھکایا گیا اور حاصل اعداد کو جمع کیا گیا ہے۔

(i) تب مجموعے کے قیاس کو ظاہر کرنے والے ذیل کی جدول کو مکمل کیجیے۔

وقوعہ: 2 پانسوں کے اعداد کا مجموعہ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
قیاس	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{12}{36}$

(ii) ایک طالب علم نے کہا اس کے 11 متوقع نتائج 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 اور 12 ہیں لہذا ہر ایک کا قیاس $\frac{1}{11}$ ہوگا۔ کیا آپ اس کے بیان سے متفق ہیں؟ وجوہات بیان کیجیے۔

14۔ ایک سکہ کو 3 مرتبہ اچھال کر چت یا پٹ کا مشاہدہ کرنا طئے کیا گیا۔ اگر تینوں مرتبہ چت یا پٹ حاصل ہو تو حنیف ''کامیاب'' ہوگا نہیں تو ناکام ہوگا تب حنیف کی ناکامی کا قیاس محسوب کیجیے۔

15۔ ایک پانسہ کو دو دفعہ ڈالا گیا تب (i) کم سے کم ایک مرتبہ 5 حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجیے۔ (ii) 5 حاصل نا ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔

اختیاری مشق

(جامع اکتساب کے لیے)

1۔ دو صارفین علیم اور اسماء کسی ایک ہفتہ میں (منگل سے ہفتہ تک) کسی مخصوص دکان کو جاتے ہیں۔ ایک دن میں ان دنوں کا ایک ساتھ جانا ضروری نہیں تب (i) ایک ہی دن (ii) متصلہ دن (iii) علاحدہ دن اس دکان کو جانے کا قیاس محسوب کیجیے۔

2۔ ایک تھیلی میں 5 سرخ اور چند نیلی گیند ہیں اگر نیلی گیند کا قیاس، سرخ گیند کے قیاس کا دُگنا ہو تب نیلی گیند کی تعداد معلوم کیجیے۔

3۔ ایک بکسے میں 12 گیند ہیں۔ ان میں 'x' گیند کالی ہیں ۔ بکسے میں بلا منصوبہ نکالی گئی گیند کالی ہونے کا قیاس محسوب کیجیے۔ مزید '6' کالی گیند ملانے پر جملہ گیندوں میں سے کالی گیند کے نکالنے کا قیاس پہلے سے دُگنا ہو جاتا ہے۔ تب 'x' کی قدر معلوم کیجیے۔

4۔ ایک برتن میں 24 کنچے (Marbles) ہیں۔ ان میں چند سبز اور باقی نیلے رنگ کے ہیں۔ اگر بلا منصوبہ کنچے نکالنے پر سبز رنگ کے کنچے کا قیاس $\frac{2}{3}$ ہو تب نیلے رنگ کے کنچوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

SCERT TELANGANA

تجویز کردہ منصوبہ کام:

تجرباتی قیاس کا نظریاتی قیاس سے تقابل

(i) ایک پانسے کو 100 مرتبہ اچھال کر ذیل کے اعداد حاصل ہونے کا قیاس معلوم کرنا۔

(1) جفت عدد (2) طاق عدد (3) مفرد عدد

(ii) سکہ کو 100 مرتبہ/ 200 مرتبہ اچھال کر (a) چت حاصل ہونے کا قیاس (b) پٹ حاصل ہونے کا قیاس معلوم کرنا۔

ہم نے کیا سیکھا

اس باب میں آپ نے حسب ذیل نکات کا مطالعہ کیا گیا ہے۔

1۔ تجرباتی قیاس' نظریاتی قیاس' سے متعلق واقفیت حاصل کی ہے۔

2۔ وقوعہ E کے نظریاتی قیاس کو P(E) سے تصور کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ اس کی تعریف اس طرح ہے۔

$$P(E) = \frac{\text{E کے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد}}{\text{جملہ موافق نتائج کی تعداد}}$$

جہاں پر تجربات کے تمام نتائج غالباً مساوی تصور کیا جاتا ہے۔

3۔ یقینی وقوعہ کے لیے قیاس 1 ہے۔

4۔ ناممکن وقوع کا قیاس '0' ہے۔

5۔ وقوعہ E کا قیاس P(E) ہے اس طرح کہ $0 \le P(E) \le 1$

6۔ ایک ہی موافق نتیجہ رکھنے والے وقوع کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔ کسی تجربے کے تمام بنیادی وقوعوں کے قیاس کا مجموعہ 1 ہوتا ہے۔

7۔ کسی وقوعہ ایک وقوع E کے لیے $P(E)+P(\overline{E})=1$ ہے جہاں پر $\overline{E}$ کا مطلب ''E نہیں'' ہے۔ E اور $\overline{E}$ تکمیلی وقوع کہلاتے ہیں۔

8۔ اس باب میں مستعملہ اصلاحات ذیل میں دی گئی ہیں۔

بلا منصوبہ تجربہ : **بلا منصوبہ تجربہ کے لیے نتائج کا پہلے سے ہی علم ہوتا ہے لیکن مخصوص عمل کے قیاس کی پیشن گوئی نہیں کر سکتے۔**

غالباً مساوی وقوع : کسی تجربے میں دو یا دو سے زائد موقعوں پر ایک جیسے واقعات رونما ہونے کے لیے مساوی موقع فراہم ہوں تب انہیں غالباً مساوی وقوع کہا جاتا ہے۔

باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ: کسی تجربے میں دو یا دو سے زائد واقعات باہمی خاص (غیر مشمولی) وقوعہ ہوتے ہیں جبکہ ہر ایک واقعہ دوسرے واقعہ کو روکتا ہے باہمی (خاص) غیر مشمولی وقوعہ کہلاتا ہے۔

تشریحی وقوعہ : اگر کسی واقعہ کے تمام نتائج (Sample Space) ماثلہ سعت ہوں تب یہ تشریحی وقوعہ کہلاتے ہیں۔

تکمیلی وقوعہ : دو یا دو سے زائد واقعات تکمیلی وقوعہ کہلاتے ہیں اگر وہ باہمی خاص (غیر مشمولی) اور تشریحی وقوعہ بھی ہوں۔ یا دو واقعات تکمیلی وقوعہ کہلاتے ہیں اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ کو روکتا ہے اور ان کے تمام نتائج (Sample Space) ماثلہ سعت کا اجتماع ہوں۔

یقینی وقوعہ : اگر واقعہ یقیناً وقوع پذیر ہوتا ہے تب یقینی وقوعہ کے تمام نتائج کا مجموعہ (Sample Space) ماثلہ سعت ہے۔

ناممکن وقوعہ : اگر کسی واقعہ میں کسی وقوعہ کا قطعی امکان نہ ہو تو اس کا ناممکن وقوع کہتے ہیں۔

SCERT TELANGANA

باب
14

شماریات
Statistics

14.1 تمہید

اطہر اپنی جماعت کے 26 طلباء کے ریاضی کے مجموعی جانچ - I کے نشانات کو درجہ ذیل میں جدول میں درج کیا۔

عزیز	76	مُطلّب	12
سیف	82	تاج	24
فیصل	64	حمیرہ	39
فردوس	53	منظور	41
سجاد	90	عمر	69
مشتاق	27	ابراہیم	73
جاوید	34	عبداللہ	94
خورشید	74	فرحین	89
معین	76	مصطفیٰ	64
افشاں	65	حافیہ	46
مدیحہ	47	نور	19
نازیہ	54	عائشہ	53
اظہر	36	معراج	69

کیا مندرجہ بالا جدول میں دیے گئے معطیات منظّم ہے؟ کیوں؟ کیوں نہیں؟

اطہر کی ٹیچر نے اس سے دریافت کیا کہ بتاؤ کہ ریاضی کے مجموعی جانچ - I میں اپنی جماعت کے طلباء کا مظاہرہ کس طرح ہے۔

SCERT TELANGANA

اپنی جماعت کی کارکردگی کو سمجھنے کے لیے اطہر نے مندرجہ ذیل جدول کو تیار کیا۔

طلباء کی تعداد	نشانات
4	0 - 33
6	34 - 50
10	51 - 75
6	76 - 100

کیا مندرجہ بالا جدول میں دیئے گئے معطیات گروہی ہے یا غیر گروہی؟

اطہر نے اس جدول کو اپنے ٹیچر کو دکھایا جس پر ٹیچر نے اطہر کو شاباشی دی اور کہا کہ گروہی جدول تیار کرنے سے سمجھنے میں آسانی ہوتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ جماعت کے بہت زیادہ تر طلباء 75 - 51 کے درمیان نشانات حاصل کیے ہیں۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ اطہر نے اقل ترین سعت استعمال کیا ہے۔ کیوں؟ یا کیوں نہیں؟

پچھلی جماعت میں آپ نے گروہی معطیات اور غیر گروہی معطیات کے فرق کے ساتھ ساتھ ان کو جدول میں پیش کرنے کے طریقے کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ اور آپ غیر گروہی معطیات کی اوسط قدر بھی معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم ان کا اعادہ کرتے ہوئے گروہی معطیات کے اوسط، وسطانیہ، بہتاتیہ معلوم کرینگے۔

14.2 غیر گروہی معطیات کا اوسط

جیسا کہ ہم جانتے ہیں اوسط دراصل دیئے گئے معطیات کے مجموعہ کو معطیات کی تعداد سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مشاہدات کا تعدد بالترتیب $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ مشاہدہ x_1, f_1 مرتبہ واقع ہوا ہے۔ اور مشاہدہ x_2, f_2 مرتبہ واقع ہوا ہے اور اس طرح تمام مشاہدات واقع ہوتے ہیں۔

اب تمام مشاہدات کا مجموعہ $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$

اور مشاہدات کی تعداد $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$

اس طرح معطیات کا اوسط $\bar{x}$ ذیل میں دیا گیا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_x x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots f_n}$$

اس طرح اب ہم یونانی حرف Σ (سگما) کا استعمال کرتے ہوئے مندرجہ بالا ضابطہ کو مختصراً اس طرح لکھ سکتے ہیں۔ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

جہاں پر Σ کا مطلب مجموعہ ہوتا ہے۔

مثال-1: دسویں جماعت کے 30 طلباء کے ریاضی میں حاصل نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔ ان طلباء کے نشانات کا اوسط (اوسط حسابیہ) معلوم کیجیے۔

حاصل نشانات (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

SCERT TELANGANA

حل: آیئے اب ہم دیئے گئے معطیات کو منظّم انداز میں ترتیب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

f_ix_i	طلباء کی تعداد (f_i)	حاصل کردہ نشانات (x_i)
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
$\sum f_ix_i = 1779$	$\sum f_i = 30$	مجموعہ

اس طرح $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

اس لیے طلباء کے نشانات کا اوسط $= 59.3$

ہماری روزمرہ کی زندگی کے مختلف حالات میں معطیات اکثر بڑی مقدار میں موجود ہوتے ہیں جن کو بامقصد مطالعہ بنانے کے لیے ان معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔اس لیے ہم غیر گروہی معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرتے ہوئے ان معطیات کا اوسط معلوم کرنے کے لیے چند طریقے اخذ کریں گے۔

آیئے اب ہم مثال 1 میں دیئے گئے غیر گروہی معطیات کو وقفہ جماعت کی چوڑائی '15' لیتے ہوئے گروہی معطیات میں تبدیل کریں گے۔ یاد رکھیے کہ ہر وقفہ جماعت کے لیے تعداد کا تعین کرتے وقت ان طلبا کی تعداد کو جن کے نشانات جماعت کی اوپری سرحد کے مساوی ہوا گلی جماعت کی تعداد میں لیا جاتا ہے۔ مثلاً 40 نشانات حاصل کرنے والے 4 طلبا کو وقفہ جماعت 55-44 میں لیا جاتا ہے۔ نا کہ وقفہ جماعت 40-25 میں اس اصول کو ذہن میں رکھتے ہوئے آیئے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کریں۔

85-100	70-85	55-70	40-55	25-40	10-25	وقفہ جماعت
6	6	6	7	3	2	طلباء کی تعداد

SCERT TELANGANA

اب' ہرایک وقفہ جماعت کے لیے ہمیں ایک نقطہ (قدر) کی ضرورت ہوتی ہے جو اس جماعت کے لیے ایک نمائندہ ہو۔ **یہ مانا گیا ہے کہ ہر وقفہ جماعت کا تعدد کا اس جماعت کے وسطی نقطہ (Mid-point) کے اطراف ہوتا ہے۔** اس لیے وسطی نقطہ (وسطی قدر) کو ہر جماعت کے تمام مشاہدات کے لیے نمائندہ تصور کیا جاتا ہے۔ اور اسکو جماعت کا ''جماعتی اعداد'' (Class Marks) کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ''جماعتی عدد'' (وسطی نقطہ) دراصل اس جماعت کی نچلی سرحد اور اوپری سرحد کا اوسط ہوتا ہے۔

$$\text{جماعتی عدد (وسطی قدر)} = \frac{\text{جماعت کی نچلی سرحد + جماعت کی اوپری سرحد}}{2}$$

مثلاً جماعت 10-25 کے لیے جماعتی عدد $\frac{10+25}{2}=17.5$ ہوگا۔ اسی طرح ہم بقیہ جماعتوں کے لیے ''جماعتی عدد'' (وسطی قدر) معلوم کر سکتے ہیں۔ ان جماعتی اعداد کو جدول میں درج کیا جاتا ہے۔ اور ان کو ''xi'' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آیئے اب ہم پچھلی مثال کے طریقہ کار پر اوسط معلوم کر سکتے ہیں۔

وقفہ جماعت C-I	طلباء کی تعداد f_i	جماعتی تعداد (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 18600$

جدول کے آخری کالم میں موجود قدروں کے مجموعہ سے ہمیں $\sum f_i x_i$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے دیئے گئے گروہی معطیات کا اوسط $\bar{x}$ اس طرح ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

اوسط معلوم کرنے کا یہ نیا طریقہ "Direct Method" راست طریقہ کہلاتا ہے۔

ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ مندرجہ بالا دونوں صورتوں میں اوسط معلوم کرنے کے لیے لیے گئے معطیات اور ضابطہ یکساں ہیں لیکن حاصل نتائج مختلف ہیں۔

مثال (1) میں حقیقی اوسط 59.3 ہے اور تقریباً (قریب تر) اوسط 62 ہے۔

کیا آپ سوچ سکتے ہو کہ ایسا کیوں کر ہوا ہے؟

SCERT TELANGANA

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ غیر گروہی اور گروہی معطیات دونوں سے اوسط معلوم کیا جاسکتا ہے۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ ان دونوں میں کونسا اوسط بالکل صحیح ہوتا ہے؟ کیوں؟

2۔ گروہی معطیات کے تجزیہ کے لیے کب زیادہ آسان ہوگا؟

بعض اوقات جب x_1 اور f_1 کی قدریں بہت بڑی ہوتب ان کا حاصل ضرب معلوم کرنا مشکل اور زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ ان حالات کے لیے آیئے اب ہم کوئی دوسرا طریقہ عمل پر غور کریں تا کہ ریاضیاتی عمل کو کسی حدتک کم اور آسان کیا جاسکے۔

ہم $f_i's$, کو کچھ نہیں کرسکتے لیکن $x_i's$, کی قدروں کو چھوٹی قدروں میں تبدیل کرسکتے ہیں تا کہ حاصل ضرب کو آسان ہوجائے۔ ہم $x_i's$, یہ کس طرح کریں گے؟ کسی مقررہ قدر کو ہر ایک $x_i's$, سے تفریق کرنا کیسا ہے؟ آیئے اب ہم اس طریقہ کار سے مثال (1) میں دیئے گئے معطیات کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔

اس طریقہ کار کا پہلا مرحلہ یہ ہے کہ $x_i's$, کی کسی ایک قدر کو مفروضہ اوسط کے طور پر لیا جائے۔ اور اسکو 'a' سے ظاہر کیا جائے۔ ریاضیاتی عمل کو مزید مختصر کرنے کے لیے اس مفروضہ x_i اوسط کو لیا جائے $x_1, x_2, ..., x_n$ کے درمیان ہو۔ اس طرح ہم $a = 47.5$ یا $a = 62.5$ لے سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ $a = 47.5$

دوسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہر $x_i's$, کی a سے انحرافی قدریں معلوم کریں جس کو d_i سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

تیسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہر ایک f_i اور d_i کا حاصل ضرب معلوم کیا جائے اور ان کا مجموعہ کو محسوب کیا جائے یعنی $\sum f_i d_i$

مندرجہ ذیل جدول میں اس طریقہ کار کو سمجھایا گیا ہے۔

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد f_i	جماعتی عدد (x_i)	$d_i = x_i - a$ $d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	-30	-60
25 - 40	3	32.5	-15	-45
40 - 55	7	47.5(a)	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
جملہ	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

اس طرح مندرجہ بالا جدول سے انحراف کا اوسط $\bar{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ ہے۔

آیئے اب $\bar{d}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان رشتہ محسوب کریں۔

SCERT TELANGANA

چونکہ d_i کی قدر معلوم کرنے کے لیے ہر ایک x_i سے 'a' تفریق کیا جاتا ہے۔اس لیے اوسط $\overline{x}$ کی قدر حاصل کرنے کے لیے محسوب کردہ $\overline{d}$ کی قدر میں a جمع کرنا ہوگا۔اس کی تشریح ریاضیاتی طور پر اس طرح کی جاتی ہے۔

انحراف کا اوسط $\overline{d} = \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

اس لیے $\overline{d} = \dfrac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$\overline{d} = \overline{x} - a\frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

کیوں کہ $\overline{d} = \overline{x} - a$

اس لیے $\overline{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

جدول سے a، $\sum f_i d_i$ اور $\sum f_i$ کی قدر کو درج کرنے پر

$$\overline{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

اس طرح طلباء کے حاصل کردہ نشانات کا اوسط 62 ہے۔

مندرجہ بالا طریقہ کار ''مفروضہ اوسط کا طریقہ'' کہلاتا ہے۔

مشغلہ

مثال (1) کے معطیات کے ذریعہ مفروضہ قدر کو xi کی متواتر قدروں میں ہر ایک قدر یعنی ......,17.5,32.5 لیتے ہوئے اوسط حسابیہ محسوب کیجیے۔اور مندرجہ ذیل سوالات پر تبادلہ خیال کیجیے۔

1۔ کیا حاصل کردہ اوسط حسابیہ کی قدر ہر صورت میں مساوی ہوتی ہے۔

2۔ اگر ہم حقیقی اوسط کو مفروضہ قدر مان لیا جائے تب $\Sigma f_i d_i$ کی قدر کیا ہوگی؟

3۔ کسی بھی وسطی قدر (جماعتی عدد) مفروضہ اوسط لینے کی وجہ بتایئے؟

مندرجہ ذیل جدول کے کالم '4' میں موجود قدروں کا مشاہدہ کیجیے۔ جو تمام '15' کے اضعاف ہیں۔اگر ہم کالم 4 کی تمام قدروں کو 15 سے تقسیم کرتے ہوئے اور بھی چھوٹی قدریں حاصل کر سکتے ہیں جن کو f_i سے ضرب دینا آسان ہوگا۔(یہاں پر عدد '15' ہر جماعت کے لیے وقفہ جماعت ہے)

اس لیے فرض کرو کہ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ جہاں پر 'a' مفروضہ اوسط ہے اور h وقفہ جماعت ہے۔

SCERT TELANGANA

اب ہم ہر جماعت کے لیے ui کی قدر معلوم کرتے ہوئے f_iu_i کی قدروں کا مجموعہ Σf_iu_i معلوم کرتے ہیں۔اور $h = 15$ (عام طور پر وقفہ جماعت کو h لیا جاتا ہے۔لیکن یہ ضروری نہیں کہ ہمیشہ وقفہ جماعت ہی لی جائے)

فرض کرو کہ $\bar{u} = \dfrac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}$

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد f_i	جماعتی عدد x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10 - 25	2	17.5	-30	-2	-4
25 - 40	3	32.5	-15	-1	-3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
جملہ	$\sum f_i = 30$				$\sum f_iu_i = 29$

یہاں ہم کو دوبارہ $\bar{u}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان رشتہ محسوب کرنا ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

اس طرح $\bar{u} = \dfrac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}$

اس طرح
$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\sum f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_ia}{\sum f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

$$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

اس لیے
$$\bar{x} = a + h\left[\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right]$$

SCERT TELANGANA

یا
$$\overline{x}=a+\left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right)\times h$$

جدول سے a، $\sum f_iu_i$ اور $\sum f_i$ کی قدر درج کرتے ہوئے اوسط حسابیہ $\overline{x}$ محسوب کیا جاتا ہے۔

$$\overline{x}=47.5+\frac{29}{30}\times 15$$

$$=47.5+14.5=62$$

اس طرح طلباء کے نشانات کا اوسط 62 حاصل ہوگا۔

مندرجہ بالا طریقہ ''انحرافی طریقہ'' کہلاتا ہے۔

نوٹ:

اگر تمام $d_i's$, کی قدروں کے لیے مشترک جزو ضربی ہو تب انحرافی طریقہ موزوں ہوگا۔

- تینوں طریقوں سے حاصل کردہ اوسط مساوی ہوتا ہے۔
- مفروضہ اوسط کا طریقہ اور انحرافی طریقہ راست طریقے کی مختصر شکل ہے۔
- ضابطہ $\overline{x}=a+h\overline{u}$ ، a اور h کی قدریں جدول سے تعلق رکھتی ہوں یا نہ ہو قابل عمل ہوتا ہے لیکن یہ قدر اس طرح لی جائے کہ $u_i=\frac{x_i-a}{h}$ صفر نہ ہو۔

آیئے اب ہم ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں استعمال کریں گے۔

مثال-2: مندرجہ ذیل جدول میں جو ہمارے ملک ہندوستان کے تمام ریاستوں اور مرکزی زیر انتظام علاقوں کے دیہات کے اسکول میں پڑھانے والی معلمات (لیڈی ٹیچرس) کا فی صد دیا گیا ہے۔ ان کا اوسط مندرجہ بالا تین طریقوں سے محسوب کیجیے۔

معلمات کا فیصد	15 - 25	25 - 35	35 – 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 – 85
ریاستوں/مرکزی زیر انتظام علاقے کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

وسائل: (NCERT) کے ساتویں کل ہند تعلیمی سروے سے حاصل کیا گیا ہے۔

حل: آیئے اب ہم ہر جماعت کے جماعتی عدد (وسطی قدر) x_i محسوب کریں گے

یہاں ہم $a=50$ ، $h=10$ لیتے ہیں

تب $d_i=x_i-50$ اور $u_i=\frac{x_i-50}{10}$

اب d_i اور u_i کی قدر کو معلوم کر کے جدول میں درج کیجیے۔

SCERT TELANGANA

معلمات کا فیصد C.I	ریاستوں/مرکزی زیر انتظامی علاقے کی تعداد (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
15 – 25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25 – 35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35 – 45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45 – 55	4	50	0	0	200	0	0
55 – 65	4	60	10	1	240	40	4
65 – 75	2	70	20	2	140	40	4
75 – 85	1	80	30	3	80	30	3
جملہ	35				1390	-360	-36

جدول سے $\sum f_i = 35, \sum f_ix_i = 1390, \sum f_id_i = -360, \sum f_iu_i = -36$ حاصل ہوتا ہے

راست طریقے کے استعمال سے $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

مفروضہ طریقے کے استعمال سے $\bar{x} = a + \frac{\sum f_id_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

انحرافی طریقے سے $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_iu_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$

اس طرح دیہاتی اسکول میں پڑھانے والی معلمات کا فیصدی 39.71 ہے۔

سوچیے اور تبادلہ خیال کیجیے

1۔ کیا تینوں طریقوں سے حاصل نتائج مساوی ہیں؟

2۔ اگر x_i اور f_i کی قدریں بہت چھوٹی ہوں تب اوسط کا کونسا طریقہ موزوں ہوتا ہے؟

3۔ اگر x_i اور f_i کی قدریں بہت بڑی ہوں تب اوسط کا کونسا طریقہ کار موزوں ہوتا ہے؟

اگرچہ وقفہ جماعت غیر مساوی ہو اور x_i کی قدریں اعظم ترین ہو تب بھی انحرافی طریقہ کار کے ذریعہ اوسط محسوب کیا جاسکتا ہے۔ h کی قدر کو اس طرح لی جائے کہ وہ تمام d_i's کو تقسیم کرتا ہو (تمام d_i's کا جزو ضربی ہو)

مثال-3: تعددی بٹاؤ جدول میں ایک روزہ کرکٹ میاچوں میں گیند بازوں کے حاصل کردہ وکٹ کی تعداد دی گئی ہے۔ ان معطیات کا اوسط موزوں طریقہ کے استعمال سے معلوم کریں۔ نیز یہ بھی بتائیے کہ اوسط سے کس بات کا اندازہ لگایا جاتا ہے

وکٹوں کی تعداد	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
بلے بازوں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

SCERT TELANGANA

حل: یہاں پر وقفہ جماعت مختلف ہے۔اور x_i's کی قدریں بہت بڑی ہیں۔پھر بھی ہم انحرافی طریقہ کے استعمال سے $a=200$ اور $h=20$ لیتے ہوئے اوسط حسابیہ معلوم کریں گے۔ہمیں جدول میں دیا گیا ڈاٹا مکمل کرنا ہوتا ہے۔

وکٹوں کی تعداد (C.I)	بلے بازوں کی تعداد f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$ $(h=20)$	$f_i u_i$
20 – 60	7	40	-160	-8	-56
60 – 100	5	80	-120	-6	-30
100 – 150	16	125	-75	-3.75	-60
150 – 250	12	200 (a)	0	0	0
250 – 350	2	300	100	5	10
350 – 450	3	400	200	10	30
جملہ	45				-106

اس طرح $$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$

اس طرح ایک روزہ کرکٹ میاچ میں 45 بلے بازوں کے اوسط وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔

کمرے جماعت کے لیے منصوبہ

1۔ آپ کے اسکول میں انعقاد کیے گیے حالیہ امتحان میں آپ کی جماعت کے طلباء کے ریاضی میں حاصل نشانات کو حاصل کیجیے اور ان نشانات کو استعمال کرتے ہوئے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کیجیے۔اور اس کا اوسط معلوم کیجیے۔مزید اس طرح تمام دوسرے مضامین کے گروہی تعددی بٹاؤ کے جدول اور اوسط معلوم کرتے ہوئے ان کا تقابل کیجیے۔اوسط کو محسوب کرنے کے لیے آپ کے لیے موزوں طریقہ استعمال کیجیے۔

2۔ آپ کے شہر میں پچھلے 30 دن میں درج کردہ اعظم ترین درجہ حرارت (تپش) کو حاصل کیجیے۔اور ان معطیات سے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کرتے ہوئے موزوں طریقے کے استعمال سے اوسط معلوم کیجیے۔

3۔ آپ کی جماعت کے تمام طلباء کے قد کی پیائش کیجیے۔ان معطیات کا تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کیجیے۔نیز مناسب طریقہ کار کے ستعمال کرتے ہوئے اوسط معلوم کیجیے۔

مشق 14.1

1۔ ماحولیاتی معلومات کے لیے طلباء سے ایک سروے کروایا گیا۔انہوں نے 20 گھروں میں موجود درختوں کی تعداد کا تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کیا۔ہر ایک گھر میں موجود درختوں کی اوسط تعداد معلوم کیجیے۔

درختوں کی تعداد	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
گھروں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3

SCERT TELANGANA

2۔ کسی فیکٹری کے 50 مزدوروں کی یومیہ اُجرت کے تعددی بٹاؤ کا جدول دیا گیا ہے۔کوئی موزوں طریقے سے مزدوروں کی اوسط یومیہ آمدنی معلوم کیجیے۔

یومیہ اجرت روپیوں میں	200 - 250	250 - 300	300 - 350	350 - 400	400– 450
مزدوروں کی تعداد	12	14	8	6	10

3۔ ایک محلے کے بچوں کو دیئے گئے یومیہ جیب خرچ کا گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے اگر جیب خرچ کا اوسط 18 روپے ہو تب غائب شدہ تعداد f کی قدر کیا ہوگی؟

یومیہ جیب خرچ روپیوں میں	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

4۔ ایک ہاسپٹل میں دل کے ڈاکٹر نے 30 خواتین کے دل کی ڈھڑکن کی تعداد فی منٹ کو درجہ ذیل کے جدول میں درج کیا ہے۔ان خواتین کے دل کی ڈھڑکن کی اوسط قدر فی منٹ کیا ہوگی؟

ڈھکن کی تعداد فی منٹ	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
خواتین کی تعداد	2	4	3	8	7	4	2

5۔ ایک عام میوہ فروش سنترے کے پیاک کردہ باسکٹ فروخت کرتا ہے ہر باسکٹ میں سنتروں کی تعداد مختلف ہوتی ہے۔ان باسکٹ کے تعددی بٹاؤ کا جدول دیا گیا ہے۔موزوں طریقے کے استعمال سے باسکٹ میں موجود سنتروں کا اوسط معلوم کیجیے۔

سنتروں کی تعداد	10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34
باسکٹ کی تعداد	15	110	135	115	25

6۔ گروہی تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک محلے کے 25 خاندان کے روزانہ غذا پر کیا جانے والا خرچ دیا گیا ہے۔کوئی مناسب طریقے کی مدد سے اوسط خرچ معلوم کیجیے۔

روزانہ کا خرچ روپیوں میں	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
خاندان کی تعداد	4	5	12	2	2

7۔ ہوا میں So_2 کے ارتکاز کو معلوم کرنے کے لیے ایک شہر کے 30 مختلف علاقوں میں ڈاٹا جمع کرتے ہوئے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کیا گیا ہے؟ ہوا میں موجود So_2 کے ارتکاز کا اوسط معلوم کیجیے؟

So_2 کا ارتکاز PPM پر	0.00 - 0.04	0.04 - 0.08	0.08 - 0.12	0.12 - 0.16	0.16 - 0.20	0.20 - 0.24
تعدد	4	9	9	2	4	2

SCERT TELANGANA

8۔ ایک معلم کے پاس 56 دن کی میقات کے لیے ایک جماعت کی حاضری کا ریکارڈ درج ذیل ہے۔طلبا کی اوسط حاضری معلوم کیجیے۔

دنوں کی تعداد	35 - 38	38 - 41	41 - 44	44 - 47	47 - 50	50 - 53	53 -56
طلباء کی تعداد	1	3	4	4	7	10	11

9۔ مندرجہ ذیل جدول میں 35 شہروں کی خواندگی کا فیصد درج کیا گیا ہے اس کا اوسط معلوم کیجیے؟

خواندگی کا فیصد	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
شہروں کی تعداد	3	10	11	8	3

14.3 بہتاتیہ Mode

تمام مشاہدات میں وہ قدر جو سب سے زیادہ مرتبہ واقع ہوتی ہے بہتاتیہ (Mode) کہلاتی ہے۔

گروہی معطیات کے بہتاتیہ کو محسوب کرنے سے قبل آیئے پہلے ہم ذیل کی مثالوں کے ذریعہ اعادہ کریں گے۔غیر گروہی (خام) معطیات کا بہتاتیہ کیسے معلوم کریں گے۔

مثال-4: ایک بلے باز کے 10 کرکٹ میچوں میں حاصل کردہ وکٹ کی تعداد 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3 ہے۔ان معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

حل: دیئے گئے معطیات کو صعودی ترتیب میں لکھنے پر

0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6

بلے باز کے سب سے زیادہ مرتبہ یعنی 3 مرتبہ '2' وکٹ حاصل کیا۔اس لیے ان معطیات کا بہتاتیہ '2' ہوتا ہے۔

یہ کیجیے

1۔ مندرجہ ذیل معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجیے؟

(a 5, 6, 9, 10, 6, 12, 3, 6, 11, 10, 4, 6, 7

(b 20, 3, 7, 13, 3, 4, 6, 7, 19, 15, 7, 18, 3

(c 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6

2۔ کیا بہتاتیہ معطیات کی درمیان میں واقع ہوتا ہے؟

3۔ کیا بہتاتیہ تبدیل ہوتا ہے۔اگر مثال میں دوسرے مشاہدہ کو شامل کیا جائے۔تبصرہ کیجیے۔

4۔ اگر مثال '4' کے معطیات میں اعظم ترین قدر کو تبدیل کر کے 8 کر دیا جائے تو کیا بہتاتیہ متاثر ہوتا ہے۔تبصرہ کیجیے۔

SCERT TELANGANA

گروہی تعددی بٹاؤ میں تعدد کو دیکھ کر بہتاتیہ معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے یہاں ہم صرف اعظم ترین تعدد والی جماعت کی نشاندہی کر سکتے ہیں جو بہتاتی جماعت کہلاتی ہے۔ بہتاتیہ اسی جماعت میں کوئی قدر ہوگی۔ جس کو مندرجہ ذیل ضابطہ کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{بہتاتیہ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں پر l = بہتاتی جماعت کی نچلی سرحد ہے

h = بہتاتی جماعت کا وقفہ ہے

f_1 = بہتاتی جماعت کا تعدد ہے

f_0 = بہتاتی جماعت کے پیش رو جماعت کا تعدد ہے

f_2 = بہتاتی جماعت کے پس رو جماعت کا تعدد ہے

آیئے ہم ذیل کی مثالوں کے ذریعہ مندرجہ بالا ضابطہ کی کے استعمال کو سمجھیں گے۔

مثال-5: ایک محلے میں 20 خاندان کا سروے کیا گیا اور خاندان میں موجود افراد کی تعداد کو درجہ ذیل جدول میں درج کیا گیا ہے۔

افراد خاندان	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
خاندان کی تعداد	7	8	2	2	1

ان معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

حل: یہاں پر سب سے بڑا تعدد '8' ہے۔ اور اس تعدد کی متعلقہ جماعت 5 - 3 ہے۔ اس لیے بہتاتی جماعت (Mode class) 3-5 ہے۔

اب

بہتاتی جماعت 5 - 3 نچلی سرحد $l=3$

وقفہ جماعت $h=2$، اور تعدد $f_1=8$

بہتاتی جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد $f_0=7$

اور بہتاتی جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد $f_2=2$

آیئے ان قدروں کو ضابط میں درج کرنے پر

$$\text{Mode بہتاتیہ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

مثال-6: ریاضی کے امتحان میں 30 طلباء کے نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں گیا ہے۔ ان معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجیے نیز اوسط معلوم کرتے ہوئے ان دونوں کا تقابلی تبصرہ کیجیے؟

SCERT TELANGANA

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد (f_i)	جماعتی عدد (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

حل: چونکہ طلباء کی سب سے زیادہ تعداد (یعنی 7) کے حاصل کردہ نشانات وقفہ جماعت 55-40 میں واقع ہیں۔ اس لیے یہی جماعت یعنی 55 - 40 بہتاتی جماعت کہلاتی ہے۔

بہتاتی جماعت کی نچلی سرحد $l = 40$

جماعت کا وقفہ $h = 15$

اس جماعت کا تعدد $f_i = 7$

بہتاتی جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد $f_0 = 3$ اور

بہتاتی جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد $f_2 = 6$

ضابطہ کی رو سے

$$\text{(Mode) بہتاتیہ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

تبصرہ: بہتاتیہ (Mode) 52 ہے۔ مثال (1) کی مدد سے ہم جانتے ہیں کہ اوسط 62 ہے۔ جماعت کے زیادہ تر طلباء کے حاصل نشانات 52 ہیں۔ جبکہ طالب علم کے حاصلہ نشانات کا اوسط 62 ہے۔

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے

1۔ مختلف حالات اور ضرورت کے لحاظ سے ہم طلباء کے نشانات کا اوسط یا ان نشانات میں سب سے زیادہ طلباء کے حاصل کردہ نشانات معلوم کرتے ہیں۔

(a پہلی صورت میں ہم کو کیا معلوم کرنا چاہیے؟

(b دوسری صورت میں ہم کو کیا معلوم کرنا چاہیے؟

2۔ کیا غیر مسلسل جماعت کے گروہی معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیا جاسکتا ہے؟

SCERT TELANGANA

مشق 14.2

1۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک مخصوص دن میں ہاسپٹل میں شریک مریضوں کی عمروں کو دیا گیا ہے؟

عمر (سال میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

اوسط اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔ ان دونوں مرکز رجحان کا تقابل کیجیے اور تبصرہ کیجیے۔

2۔ مندرجہ ذیل جدول میں 225 مختلف برقی آلات کی کام کرنے کی مدت (گھنٹوں میں) درج کی گئی ہے؟

کام کرنے کی مدت (گھنٹوں میں	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 -120
تعدد	10	35	52	61	38	29

برقی آلات کی بہتاتی مدت معلوم کیجیے۔

3۔ ایک گاؤں کے 200 خاندان کے ماہانہ خرچ کو ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں دیا گیا ہے ان خاندان کا بہتاتی خرچ معلوم کیجیے اور اسکے علاوہ ان کا اوسط خرچ کیا ہوگا؟ معلوم کیجیے۔

خرچ (روپیوں میں)	1000 - 1500	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
خاندان کی تعداد	24	40	33	28	30	22	16	7

4۔ مندرجہ ذیل جدول میں ہندوستان کے تمام ریاستوں کے اسکولوں میں موجود ٹیچر اور طلباء کی نسبت کو درج کیا گیا ہے۔ ان معطیات کا بہتاتیہ اور اوسط معلوم کیجیے۔ ان کا تقابل کیجیے اور تبصرہ کیجیے۔

طلباء کی تعداد	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
ریاستوں کی تعداد	3	8	9	10	3	0	0	2

5۔ تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک یومیہ انٹرنیشنل کرکٹ میاچ میں دنیا کے مشہور بلے بازوں کے بنائے گئے رن (RUN) کی تعداد دی گئی ہے۔ اس کا بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

رن	3000 - 4000	4000 - 5000	5000 - 6000	6000 - 7000	7000 - 8000	8000 - 9000	9000 - 10000	10000 - 11000
بلے بازوں کی تعداد	4	18	9	7	6	3	1	1

SCERT TELANGANA

6۔ ایک طالب علم ہر 3 منٹ کے وقفہ میں ایک مصروف سڑک پر گذرنے والی کار کی تعداد کو 100 مرتبہ معلوم کیا اور مندرجہ ذیل میں درج کیا ہے۔ ان کا بہتا تیہ معلوم کیجیے؟

کار کی تعداد	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
تعدد	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4۔ گروہی معطیات کا وسطانیہ (Median)

وسطانیہ دراصل مرکزی رجحان میں ایک ہے۔ جو دیے گئے مشاہدات کی بالکل وسط میں آنی والی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔

آیئے غیر گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقہ کار کا اعادہ کریں۔ دیئے گئے معطیات/مشاہدات کو صعودی ترتیب میں درج کرنا چاہیے۔

اگر معطیات کی تعداد 'n' طاق ہوتب وسطانیہ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ واں مشاہدہ ہوگا۔ اور اگر معطیات کی تعداد 'n' جفت ہوتب وسطانیہ واں $\left(\frac{n}{2}\right)$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں مشاہدات کی اوسط قدر ہوگی۔

فرض کرو کہ دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنا ہے۔ ذیل میں 100 طلباء کے 50 نشانات کے امتحان میں سے حاصل کردہ نشانات دیئے گئے ہیں۔

حاصل کردہ نشانات	20	29	28	33	42	38	43	25
طلباء کی تعداد	6	28	24	15	2	4	1	20

سب سے پہلے دیئے گئے معطیات کو صعودی ترتیب میں درج کرتے ہوئے تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کریں۔ جیسا کہ شکل 14.9 میں بتلایا گیا ہے۔

حاصل کردہ نشانات	طلباء کی تعداد (تعدد)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
جملہ	100

SCERT TELANGANA

یہاں n = 100 ‘n جو جفت عدد ہے۔تب ان معطیات کا وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں (یعنی 50واں اور 51واں)

مشاہدات کا اوسط ہوتا ہے۔

ان درمیانی قدروں کے تعین کے لیے آیئے ہم یکجائی تعدد کا جدول تیار کریں گے۔

حاصل کردہ نشانات	طلباء کی تعداد (تعدد)	یکجائی تعداد C F
20	6	6
25 تک	6 + 20 =26	26
28 تک	26 + 24 =50	50
29 تک	50 + 28 =78	78
33 تک	78 + 15 =93	93
38 تک	93 + 4 =97	97
42 تک	97 + 2 =99	99
43 تک	99 + 1 =100	100

دیئے گئے تعددی بٹاؤ کے جدول میں ہم نے ایک کالم (Column) کا اضافہ کیا ہے۔جس کو یکجائی تعدد کالم کہتے ہیں۔

مندرجہ بالا جدول سے ظاہر ہے کہ

50واں مشاہدہ 28 ہے (کیوں؟)

اور 51واں مشاہدہ 29 ہے

$$\therefore \quad \text{وسطانیہ} = \frac{28+29}{2} = 28.5$$

نوٹ: مندرجہ بالا جدول میں کالم نمبر (1) اور کالم نمبر (3) کو یکجائی تعداد کا جدول کہتے ہیں۔

وسطانیہ 28.5 سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ 50% طلباء 28.5 کم نشانات حاصل کئے ہیں

اور مابقی 50% طلباء 28.5 نشانات سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں۔

کسی جماعت کے 53 طلباء کے ایک مخصوص امتحان میں جملہ 100 نشانات میں سے حاصل کردہ نشانات کو متصلہ گروہی تعددی جدول میں درج کیا گیا ہے۔

جدول پر غور کرتے ہوئے مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دینے کی کوشش کیجیے۔

نشانات	طلباء کی تعداد
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

SCERT TELANGANA

جماعت کے کتنے طلباء '10' سے کم نشانات حاصل کئے ہیں؟

جواب: یقیناً 5 طلبا ہیں جو 10 سے کم نشانات حاصل کئے ہیں۔

کتنے طلباء '20' سے کم نشانات حاصل کئے ہیں۔غور کیجیے کہ 20 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء سے مراد ایسے طلباء جن کے نشانات 10 - 0 کے درمیان ہیں اور ایسے طلبا جن کے نشانات 20 - 10 کے درمیان ہیں۔ اس طرح 20 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد ان دونوں کا حاصل جمع لیا جائے گا۔یعنی 8=3+5۔اس طرح 20-10 جماعت کا یکجائی تعداد 8 لیا جائے گا (جس کو جدول 14.11 میں دیکھا گیا ہے۔

طلباء کی تعداد (یکجائی تعداد)	حاصل کردہ نشانات
5	10 سے کم
5 + 3 = 8	20 سے کم
8 + 4 = 12	30 سے کم
12 + 3 = 15	40 سے کم
15 + 3 = 18	50 سے کم
18 + 4 = 22	60 سے کم
22 + 7 = 29	70 سے کم
29 + 9 = 38	80 سے کم
38 + 7 = 45	90 سے کم
45 + 8 = 53	100 سے کم

اسی طرح ہم دوسری جماعتوں کی یکجائی تعدد کو محسوب کر سکتے ہیں۔جیسے 30 سے کم، 40 سے کم' 50 سے کم.............................. 100 سے کم نشانات حاصل کرنے والے طلباء ی تعداد۔

اس بٹاؤ جدول کو ''کم تر یکجائی تعدد'' کا جدول کہتے ہیں۔

یہاں........................ 30،20،10 وقفہ جماعت کی اوپری سرحد کہلاتے ہیں۔اس ہی طرح ہم '0' یا '0' سے زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کا جدول تیار کر سکتے ہیں۔(یہ عدد تمام تعدد کا مجموعہ ہوتا ہے)10 یا 10 سے زیادہ کا یکجائی تعدد مجموعہ سے پہلی جماعت کے تعدد کا تصور کو تفرق کرنے پر حاصل ہوگا۔'20' یا '20' سے زیادہ یکجائی تعدد مجموعہ سے پہلی دو جماعتوں کے تعدد کو تفریق کرنے پر حاصل ہوجائے گا۔اس طرح تمام جماعتوں کا یکجائی تعدد حاصل کیا جاتا ہے۔

طلباء کی تعداد (یکجائی تعدد)	حاصل کردہ نشانات
53	0 کے مساوی یا زیادہ
53 - 5 = 48	10 کے مساوی یا زیادہ
48 - 3 = 45	20 کے مساوی یا زیادہ
45 - 4 = 41	30 کے مساوی یا زیادہ
41 - 3 = 38	40 کے مساوی یا زیادہ
38 - 3 = 35	50 کے مساوی یا زیادہ
35 - 4 = 31	60 کے مساوی یا زیادہ
31 - 7 = 24	70 کے مساوی یا زیادہ
24 - 9 = 15	80 کے مساوی یا زیادہ
15 - 7 = 8	90 کے مساوی یا زیادہ

ہم جانتے ہیں کہ 53 طلباء ایسے ہیں جنھوں نے '0' یا '0' سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں۔ چونکہ 5 طلباء کے نشانات وقفہ جماعت 10 - 0 کے درمیان واقع ہیں۔ یعنی 48=5−53 طلباء ایسے ہیں جن کے نشانات 10 یا 10 سے زیادہ نشانات حاصل کیے ہیں۔ اس طریقہ کار کے استعمال سے ہم '20' یا '20' سے مساوی یا

SCERT TELANGANA

زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد معلوم کرسکتے ہیں یعنی 45=3−48 ۔ 30 یا 30 سے زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلبا کی تعداد 41=4−45 وہاں جیاس کہ جدول میں بتلایا گیا ہے۔

یہ متصلہ جدول ''زیادہ تر یکجائی تعداد'' کا جدول کہلاتا ہے۔ جہاں پر 0 '10 '20.......90 متعلقہ جماعت کی نچلی سرحد ہوتی ہے۔

گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہم دونوں یکجائی تعدد میں کسی کو بھی استعمال کرسکتے ہیں۔

گروہی معطیات میں یکجائی تعدد پر نظر ڈالتے ہی یہ ممکن نہیں ہے کہ درمیانی مشاہدہ کی نشاندہی کی جائے۔ یہ درمیانی مشاہدہ اس ہی وقفہ جماعت میں کہیں واقع ہوگا (یعنی اس وقفہ جماعت میں کوئی قدر ہوگی) اس لیے اس جماعت کے درمیان اس قدر کو معلوم کرنے کے لیے دیئے گئے کل تعدد کو دو نصف حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ قدر کس جماعت سے تعلق رکھتی ہے کس طرح معلوم کیا جائے؟

اس جماعت کو معلوم کرنے کے لیے تمام جماعتوں کا یکجائی تعدد اور $\frac{n}{2}$ کی قدر معلوم کی جاتی ہے اور اس جماعت کی نشاندہی کی جاتی ہے جس کا یکجائی تعدد $\frac{n}{2}$ سے زیادہ ہوگی۔ وہ جماعت وسطانوی کی جماعت کہلاتی ہے۔

نشانات	طلباء کی تعداد (f)	یکجائی تعدد (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

مندرجہ بالا تعددی بٹاؤ کے جدول میں n=53 اس لیے $\frac{n}{2}$ =26.5 اب جماعت 70-60 کا یکجائی تعدد 29 ہے۔

جو $\frac{n}{2}$ یعنی 26.5 سے زیادہ ہے)

اس لیے جماعت 70 - 60 وسطانوی (Mediam Class) ہے۔

SCERT TELANGANA

وسطانوی جماعت کی نشاندہی کے بعد مندرجہ ذیل ضابطہ کی عدد سے وسطانیہ محسوب کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

جہاں پر l = وسطانوی جماعت کی نچلی سرحد ہے

n = مشاہدات کی تعدد ہے

cf = وسطانوی جماعت سے پہلی والی جماعت کا یکجائی تعدد ہے

f = وسطانوی جماعت کا تعدد

h = وقفہ جماعت (وسطانوی جماعت کا وقفہ)

ضابطہ میں قدروں کو درج کرنے پر

$\frac{n}{2} = 26.5,\quad l = 60,\quad cf = 22,\quad f = 7,\quad h = 10$

$$\text{وسطانیہ (Median)} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{6}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

اس طرح جماعت کے آدھے طلباء کے نشانات 66.4 سے کم اور آدھے طلباء کے نشانات 66.4 سے زیادہ ہیں۔

مثال-7: ایک مدرسہ کے دسویں جماعت کے 51 لڑکیوں کے ''قد'' کا سروے کرتے ہوئے حاصل معطیات کو ذیل کے جدول میں اسطرح بتلایا گیا۔ان کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

''قد'' سمر میں	لڑکیوں کی تعداد
140 سے کم	4
145 سے کم	11
150 سے کم	29
155 سے کم	40
160 سے کم	46
165 سے کم	51

SCERT TELANGANA

وقفہ جماعت	تعدد	یکجائی تعدد
140 سے کم	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

حل: وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں وقفہ جماعت اور اس جماعت کا متعلقہ تعدد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

دیا گیا تعددی بٹاؤ کا جدول ''ترکم یکجائی تعدد'' ہے کیوں کہ 140، 145، 150، 155، 160، 165، متعلقہ جماعتوں کے ''اوپری سرحد'' ہیں۔ اس طرح جماعتیں یہ ہوگی۔ 140 سے کم، 140 - 145، 145 - 150 .... 160 - 165۔

تعددی بٹاؤ کے مشاہدات پر غور کرنے پر پتہ چلتا ہے کہ 4 لڑکیاں ایسے ہیں جن کا قد 140 سمر سے کم ہے۔ یعنی 140 سے کم وقفہ جماعت کا تعدد 4 ہوگا۔ اب 11 لڑکیاں ہیں جن کا قد 145 سمر سے کم ہے اور 4 لڑکیاں جن کا قد 140 سے کم ہے۔ لہٰذا وقفہ جماعت 145 - 140 کا تعدد 7=4−11 ہوگا۔ اسی طرح تمام متعلقہ جماعتوں کا تعدد محسوب کیا سکتا ہے۔

مشاہدات کی تعداد $n=51$

یعنی $\frac{n}{2}=\frac{51}{2}=25.5$

25.5 واں مشاہدہ وقفہ جماعت 150 - 145 میں واقع ہوتا ہے۔

$\therefore$ 150 - 145 کو وسطانیہ جماعت کہتے ہیں۔

تب $l = 145$ نچلی سرحد

$cf = 11$ (وسطانیہ جماعت سے پہلی جماعت کا یکجائی تعدد)

$f = 18$ وسطانیہ جماعت کا تعدد

$h = 5$ وسطانیہ جماعت کا وقفہ جماعت

ضابطہ کے استعمال سے

$$\text{وسطانیہ (Medion)} = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

SCERT TELANGANA

اس طرح لڑکیوں کے قد کا وسطانیہ 149.03 سمر ہے۔اس کا مطلب یہ ہوا کہ 50% لڑکیوں کا قد 149.03 سے کم اور 50% لڑکیوں کا قد 149.03 سے زیادہ ہے۔

مثال-8: مندرجہ ذیل معطیات کا وسطانیہ 525 ہے۔

x اور y غائب شدہ تعدد معلوم کیجیے جبکہ تعدد کا مجموعہ 100 ہے۔ یہاں CI کا مطلب وقفہ جماعت اور Fr کا مطلب تعدد لیا جائے گا۔

CI	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800	800 - 900	900 - 1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

حل:

وقفہ جماعت	تعدد	یکجائی تعداد
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

دیا گیا ہے کہ $n=100$

$$\therefore \quad 76 + x + y = 100$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 100 - 76 = 24 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وسطانیہ 525 ہے جو وقفہ جماعت 600 - 500 میں واقع ہوگا ہے۔

اس طرح $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$ اس لیے

SCERT TELANGANA

ضابطے کے استعمال سے

$$\text{وسطانیہ}(\text{Median}) = l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

$x = 9$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$9 + y = 24$$

$$y = 24 - 9 = 15$$

نوٹ: گروہی معطیات جن کے وقفہ جماعت غیر مساوی ہوں ان معطیات کا بھی وسطانیہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

14.5 مرکزی رجحان کی کونسی قدر Which value of central tendency

ضرورت کے اعتبار سے کونسی مخصوص پیائش موزوں ہوگی۔ تمام تر مرکزی رجحان میں سب سے زیادہ استعمال کی جانے والی پیائش ''اوسط (Mean) ہے۔ کیونکہ اس پیائش میں تمام معطیات کو شامل کیا جاتا ہے۔ جملہ معطیات کے (اقل ترین اور اعظم ترین مشاہدات) اوسط کو دو یا دو سے زیادہ تعددی بٹاؤ کے درمیان تقابل کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً ایک مخصوص امتحان میں دو مختلف اسکول کے طلباء کے حاصل نتائج کے ''اوسط'' لیتے ہوئے اور ان اوسط کا تقابل کرتے ہوئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ کونسے اسکول کے طلباء کی کارکردگی اچھی رہی ہے اور کونسے اسکول کی کارکردگی کمزور ہے وغیرہ۔

جبکہ معطیات کی اقل ترین اور اعظم ترین قدر کا اثر اوسط پر پڑھتا ہے۔ مثلاً ہم جانتے ہیں کہ جماعتوں کے تعدد کی قدر میں بہت زیادہ کمی یا بہت زیادہ اضافہ کی حالات میں بھی اوسط ان معطیات کے نمائندہ کے طور پر لیا جاتا ہے۔ لیکن اگر ایک جماعت کا تعدد '2' اور دوسرے پانچ جماعتوں کا تعدد 20,25,20,21 اور 18 ہو تب اوسط دیئے گئے معطیات کے طرز کو ظاہر نہیں کرتا ہے اس صورت میں اوسط دیئے گئے معطیات کے لیے ایک بہتر نمائندہ قدر نہیں ہوسکتا۔

ایسے مسائل جن میں انفرادی مشاہدات کی اہمیت نہیں ہوتی ہے خصوصاً حدودی قدریں۔ ان حالات میں ہم مرکزی رجحان کی ایک مثالی پیائش ''وسطانیہ'' زیادہ موزوں ہوگا۔ مثلاً مزدوروں کی مثالی کام کرنے پر شرح پیداوار' ملک کے مزدوروں کی اوسط مزدوری وغیرہ۔ یہ تمام ایسی صورت حال میں جہاں حدودی قدریں وجود رکھتی ہیں۔

یہ کتاب حکومت تلنگانہ کی جانب سے مفت تقسیم کے لیے ہے۔ 2020-21

اس طرح ''اوسط کے بجائے ہم' وسطانیہ کو بہتر مرکزی رجحان کے طور پر لیتے ہیں۔

ایسے حالات جن میں مکرر آنے والی مقدار یا زیادہ مشہور شئے کے تعین کے لیے بہتاتیہ محسوب کرنا موزوں ہوگا۔
مثلاً سب سے زیادہ دیکھا جانے والا TV پروگرام' سب سے زیادہ استعمال کی جانے والی شئے' سب سے زیادہ لوگوں کی پسندیدہ گاڑی اوران کے رنگ وغیرہ وغیرہ۔

مشق 14.3

1۔ ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک محلے (کالونی) کے 68 برقی صارفین کے ماہانہ صرف کی جانے والی برقی اکائیاں دی گئی ہیں۔ ان معطیات کا وسطانیہ' اوسط اور بہتاتیہ معلوم کرتے ہوئے ان کا تقابل کیجیے۔

صرف شدہ برقی اکائیاں	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
صارفین کی تعداد	4	5	13	20	14	8	4

2۔ اگر ذیل میں دیے گئے 60 مشاہدات کا وسطانیہ 28.5 ہے تب x اور y کی قدر معلوم کیجیے۔

وقفہ جماعت	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
تعدد	5	x	20	15	y	5

3۔ مندرجہ ذیل جدول میں ایک لائف انشورنس ایجنٹ کے پاس 100 پالیسی رکھنے والے اشخاص کی عمر کا تعددی بٹاؤ دیا گیا ہے۔ ان کی عمر کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔ (یاد رہے کہ لائف انشورنس پالیسی صرف 18 سال تا 60 سال کے عمر رکھنے والے اشخاص ہی کو دی جاتی ہے)

عمر (سال میں)	20 سے کم	25 سے کم	30 سے کم	35 سے کم	40 سے کم	45 سے کم	50 سے کم	55 سے کم	60 سے کم
پالیسی رکھنے والوں کی تعداد	2	6	24	45	78	89	92	98	100

4۔ ایک درخت کے 40 پتوں کی پیمائش قریب ترین ملی میٹر میں کی گئی ہے۔ ذیل کے جدول میں ظاہر کیا گیا ہے؟

طول (ملی میٹر)	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
پتوں کی تعداد	3	5	9	12	5	4	2

پتوں کے طول کا وسطانیہ معلوم کیجیے (اشارہ: دی گئی جماعتیں غیر مسلسل جماعتیں ہیں۔ ان جماعتوں کو مسلسل جماعتوں میں تبدیل کرتے ہوئے وسطانیہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ ضابطہ میں درج کرنے کے لیے مسلسل جماعتوں کا ہونا ضروری ہے۔ اس طرح مسلسل جماعتیں 17.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5 ہوں گی)

SCERT TELANGANA

5۔ ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں 400 نیان بلب کی مدت عمر گھنٹوں میں دی گئی ہے۔اس کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

کارکردگی گھنٹوں میں	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	4500 - 5000
بلب کی تعداد	14	56	60	86	74	62	48

6۔ ٹیلی فون ڈائرکٹری سے کوئی 100 نام چن لیے گئے ہیں ان نام کے انگریزی حرف کی تعداد ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں درج کیا گیا ہے؟ ان نام کے حروف کی تعداد کا وسطانیہ کے اوسط اور بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

حرف کی تعداد	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
نام کی تعداد	6	30	40	16	4	4

7۔ ذیل کے تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک جماعت کے 30 طلبا کے وزن درج کئے گئے ہیں ان کا وسطانیہ معلوم کیجئے

وزن کلوگرام میں	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
طلباء کی تعداد	2	3	8	6	6	3	2

14.6 یکجائی تعدد کے بٹاؤ کا گرافی (ترسیمی) اظہار

ہم جانتے ہیں کہ ''تصاویر'الفاظ سے بہتر اظہار کرسکتی ہیں''۔دیے گئے معطیات کو جلد اور آسانی سے سمجھنے کا بہترین ذریعہ ترسیمی اظہار ہے۔جماعت نہم میں معطیات کو''بارگراف''ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی میں ظاہر کرنے کا طریقہ کار سیکھ چکے ہیں۔آیئے اب ہم یکجائی تعددی بٹاؤ کو ترسیم (گراف) میں ظاہر کریں گے۔

اس کے لیے مثال (6) میں دیے گئے معطیات کا استعمال کریں گے۔

"Ogives" کی ترسیم کھینچنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ وقفہ جماعت مسلسل جماعت ہو۔چونکہ یکجائی تعدد کا تعلق جماعت کی سرحد سے ہوتا ہے۔لیکن ان جماعتوں کی انتہا سے نہیں۔

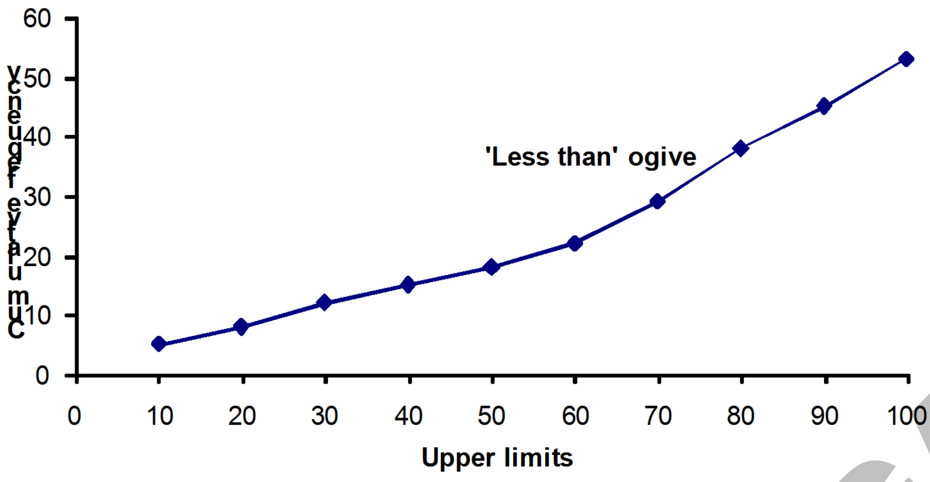
اعادہ کیجیے کہ 100...............,30,20,10 متعلقہ وقفہ جماعت کی اوپری سرحد ہیں۔

ان معطیات کو ترسیم (گراف) میں ظاہر کرنے کے لیے وقفہ جماعت کی اوپری سرحد کو افقی محور (x- محور پر) لیا جائیگا۔اوران سے متعلقہ یکجائی تعدد کو انتصابی محور (y- محور پر) موزوں اکائیوں کا انتخاب کرتے ہوئے لیا جائیگا۔

SCERT TELANGANA

اب مرتب جوڑ میں دیئے گئے نقاط کو ترسیم (گراف) پر نشاندہی کیجیے یعنی مرتب جوڑ(متعلقہ یکجائی تعدد، اوپری سرحد) اسطرح ہیں۔

(10, 5), (20, 8), (30,, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53)



ترسیمی کاغذ پر حاصل نشانات کو جوڑنے پر سادہ منحنی حاصل ہوگی۔اس منحنی کو یکجائی تعدد کی منحنی یا(Ogive) کہتے ہیں۔

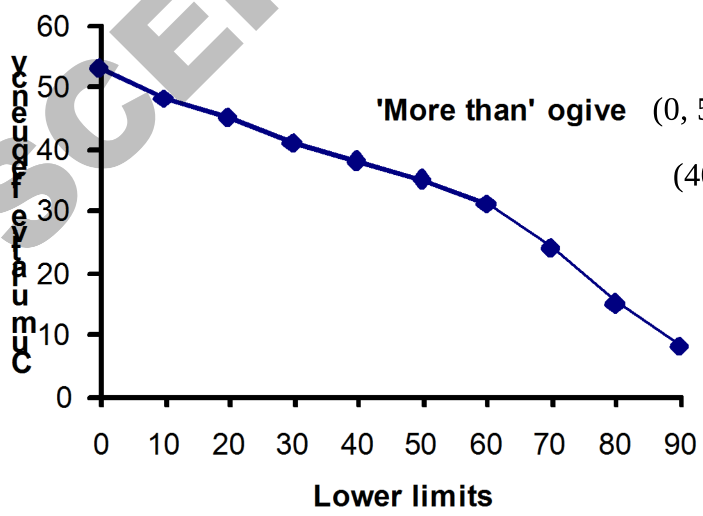
لفظ "Ogive" کو 'Ojecv' پڑھا جائے گا۔اور لفظ 'Ogee' سے اخذ کیا گیا ہے۔ ogee کی شکل دراصل ایک محدب منحنی و مقعر منحنی پر مشتمل ہوتا ہے۔جس کے اختتامی سرے حرف 'S' کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔14 ویں اور 15 ویں صدی میں Gothic Styles میں بنی ہوئی عمارتیں Ogee کی شکل کی ایک خاصیت موجود رہتی ہیں۔

آیئے اب ہم زیادہ تر یکجائی تعدد بتاؤ کی Ogive کی ترسیم بنائیں گے۔

اعادہ کیجیے کہ 0, 10, 20,30,40 ...., 90

وقفہ جماعت 0-10, 10-20,20-30,30-40, ..., 90-100 کے نچلی سرحدیں ہیں۔

زیادہ تر یکجائی تعدد کی ترسیم بنانے کے لیے x- محور پر نچلی سرحد اوران سے متعلقہ یکجائی تعدد کو y- محور پر لیتے ہیں، مرتب جوڑ (متعلقہ یکجائی، تعدد، نچلی سرحد) یعنی



(0, 53), (10, 48), (20, (45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8),

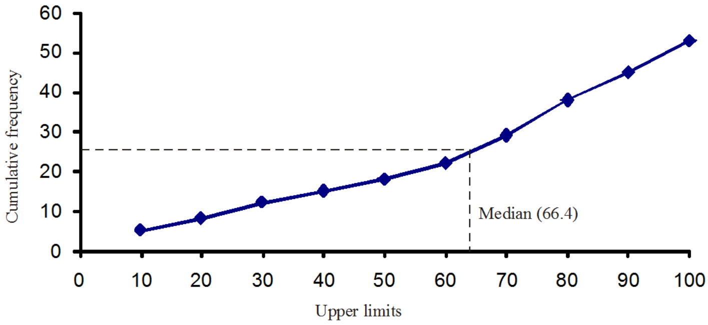
کو ترسیمی کاغذ پر نشاندہی کرتے ہوئے جوڑنے پر سادہ منحنی حاصل ہوگی۔اس منحنی کو یکجائی تعدد کی منحنی یا(زیادہ تر Ogive) کہا جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

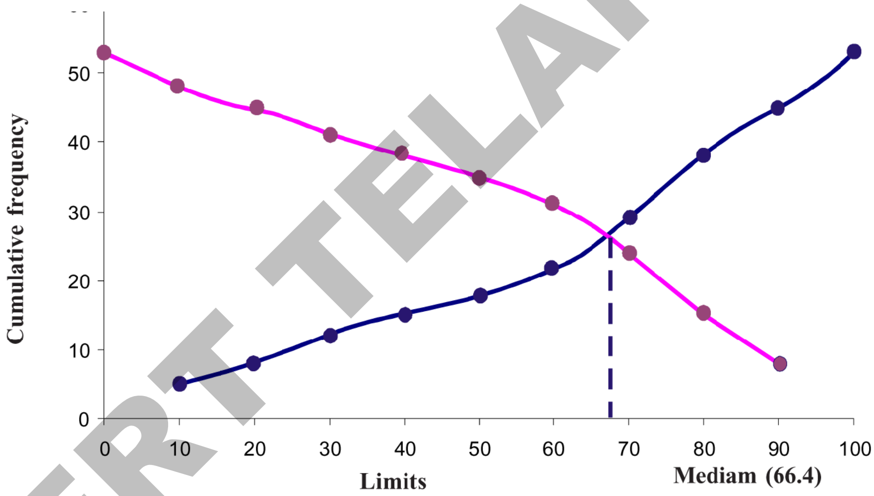
Ogive 14.6.1 منحنی سے وسطانیہ حاصل کرنا:

کیا ان دونوں طرح کی منحنی سے وسطانیہ کی قدر حاصل کرنا ممکن ہے۔ آیئے غور کریں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ کم تر یکجائی تعدد یا زیادہ تر یکجائی تعدد تقسیم کے y- محور پر $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ کی نشاندہی کرتے ہوئے اس نقطہ سے x- محور کے متوازی ایک خط کھینچے جو منحنی کو ایک نقطہ پر قاطع کرتی ہے۔ اس نقطہ تقاطع سے x- محور پر عمود گرایئے۔ (یعنی x- محور پر) اس عمود کا قدم معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔

وسطانیہ معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ



دونوں Ogives (کم تر یکجائی اور زیادہ تر یکجائی) کو ایک ہی ترسیمی کاغذ پر اور ان ہی محوروں کے درمیان اتاریئے۔ یہ دونوں منحنی ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں اس نقطہ تقاطع سے x- محور پر عمود گرائیے۔ اس گرائے گئے عمود کا قدم معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔



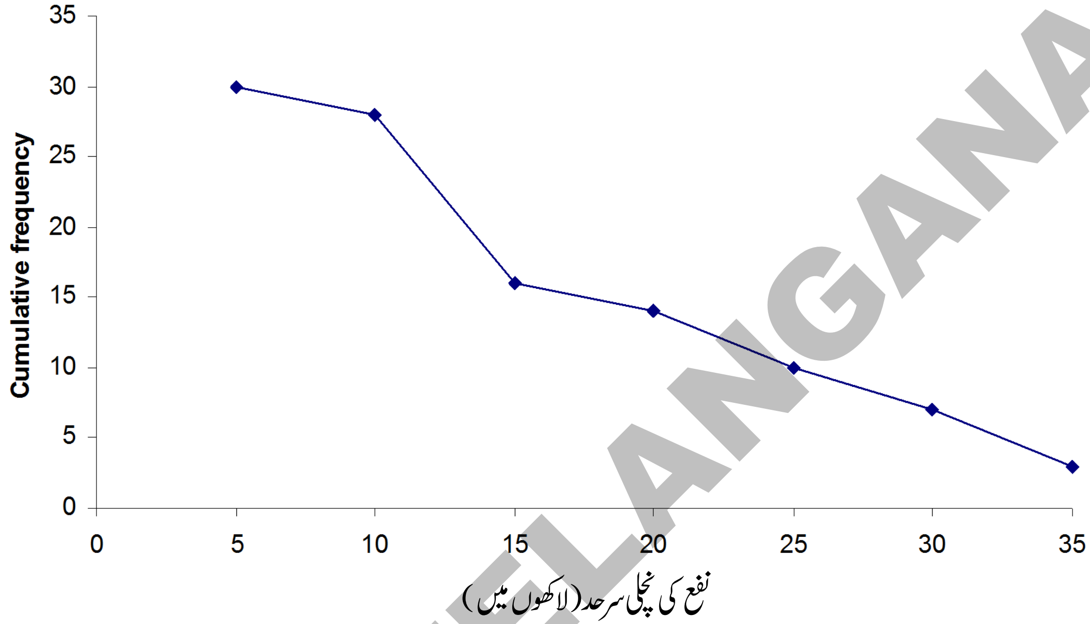
مثال-9: ایک محلے کے 30 دکاندار کی سالانہ حاصل نفع کو تعددی بٹاؤ کے جدول میں دیا گیا ہے؟

نفع (لاکھوں میں)	دکاندار کی تعداد (تعدد)
5 کے مساوی یا زیادہ	30
10 کے مساوی یا زیادہ	28
15 کے مساوی یا زیادہ	16
20 کے مساوی یا زیادہ	14
25 کے مساوی یا زیادہ	10
30 کے مساوی یا زیادہ	7
35 کے مساوی یا زیادہ	3

SCERT TELANGANA

مندرجہ بالا معطیات سے دونوں طرح کی (Ogive) بنائے اور نفع وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: دیے گئے معطیات میں نفع کی نچلی سرحد کو اُفقی محور یعنی x- محور پر اور متعلقہ یکجائی تعدد کو انتصابی محور یعنی y- محور پر لیں۔ تب ان نقاط (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) اور (35, 3) کی ترسیمی کاغذ پر نشاندہی کریں۔ ان نقاط کو ملانے پر زیادہ تر یکجائی تعدد کی منحنی حاصل ہوگی۔ جس کو مندرجہ ذیل شکل میں بتلایا گیا ہے۔



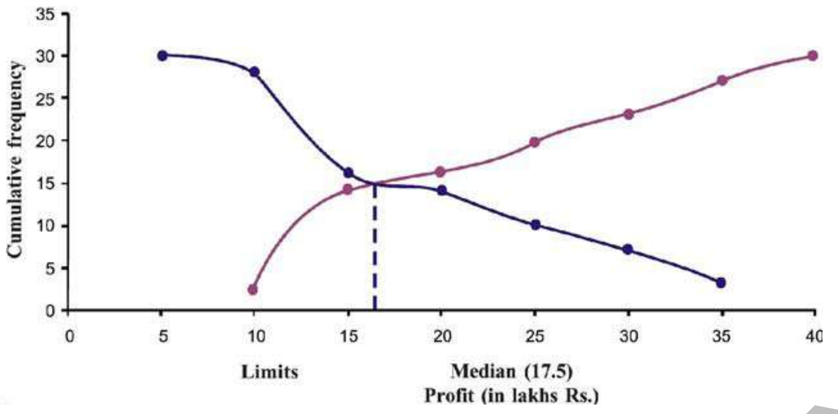
آیئے اب ہم مندرجہ بالا جدول سے وقفہ جماعت اور تعدد اور کم تر یکجائی تعدد کا جدول تیار کریں۔

جماعتیں	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
دکانداروں کی تعداد (تعدد)	2	12	2	4	3	4	3
یکجائی تعدد	2	14	16	20	23	27	30

ان اقدار کا استعمال کرتے ہوئے نقاط (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40,30) کو اسی ترسیمی کاغذ جس پر زیادہ تر یکجائی ترسیم کھینچی گئی ہے کم تر یکجائی تعدد کی ترسیم کھینچیے جیسا شکل میں بتلایا گیا ہے۔

ان دونوں منحنیوں کے نقطہ تقاطع کا پہلا مختص یعنی x- مختص دیے گئے معطیات کا وسطانیہ ہوگا۔ اس حاصل شدہ قدر کی جانچ ضابطہ کی مدد سے حاصل وسطانیہ کی قدر سے کی جاسکتی ہے۔ اور یہ نفع وسطانیہ 17.5 روپے (لاکھوں میں) ہوگا۔

SCERT TELANGANA



مشق - 14.4

1۔ مندرجہ ذیل میں تعددی بٹاؤ کے جدول میں ایک فیاکٹری کے 50 مزدوروں کی روزانہ آمدنی دی گئی ہے۔

روزانہ آمدنی (روپیوں میں)	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
مزدوروں کی تعداد	12	14	8	6	10

اس تعددی (بٹاؤ) جدول کو کم تر یکجائی تعددی بٹاؤ کے جدول میں تبدیل کرتے ہوئے "Ogive" کی ترسیم کھینچیے۔

2۔ ایک جماعت کے 35 طلباء کا میڈیکل چیک کیا گیا اور ان کے اوزان کو ذیل کے جدول میں درج کیا گیا۔

وزن کلوگرام میں	طلباء کی تعداد
38 سے کم	0
40 سے کم	3
42 سے کم	5
44 سے کم	9
46 سے کم	14
48 سے کم	28
50 سے کم	32
52 سے کم	35

کم تر Ogive کھینچیے اور اسکی مدد سے وسطانیہ معلوم کیجیے حاصل قدر کی جانچ ضابطہ کے استعمال سے کیجیے۔

3۔ ذیل کے جدول میں ایک گاؤں کے 100 کسان کے ایک ہکٹر رقبہ میں گیہوں کی پیداوار کو پیش کیا گیا ہے۔

گیہوں کی پیداوار	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
کسان کی تعدد	2	8	12	24	38	16

مندرجہ بالا جدول کو زیادہ تر یکجائی تعدد کے جدول میں تبدیل کیجیے اور اسکا ogive کھینچیے۔

SCERT TELANGANA

تجویز کردہ منصوبہ کام:

اوسط وسطانیہ۔ بہتاتیہ معلوم کرنا

☆ روزمرہ زندگی کے حالات کے استعمال سے

☆ دستیاب ذریعے سے معلومات اکٹھا کرتے ہوے

☆ حاصل معلومات کا اوسط، وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کرنا۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ گروہی معطیات کا اوسط کو ذیل کے ضابطوں سے محسوب کیا جاتا ہے

(i) راست طریقہ کار $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) مفروضہ قدر کا طریقہ کار $\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

(iii) انحرافی طریقہ کار $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

2۔ گروہی معطیات کا بہتاتیہ اس ضابطہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{بہتاتیہ Mode} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

جہاں پر علامتیں اپنی اپنی قدروں کو ظاہر کرتی ہیں۔

3۔ گروہی معطیات کا وسطانیہ اس ضابطہ کی مدد سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{وسطانیہ Medion} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

جہاں پر علامتیں اپنی اپنی قدروں کو ظاہر کرتی ہیں۔

4۔ وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے وقفہ جماعت مسلسل ہونا ضروری ہوتا ہے۔

5۔ یکجائی تعددی بٹاؤ کو ترسیم کے ذریعے یکجائی تعددی منحنی یا Ogive کو کم تر یکجائی (Ogive) یا زیادہ تر یکجائی (Ogive) میں ظاہر کرتے ہیں۔

6۔ ogive کی ترسیم کھینچنے کے لیے سرحد کو x- محور پر اور ان کی متعلقہ یکجائی تعدد کو y- محور پر لیا جاتا ہے۔

7۔ دونوں محوروں یعنی (x- محور اور y- محور) اکائیاں مساوی ہونا ضروری نہیں ہے۔

8۔ دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ دونوں (Ogives) منحنی کے نقطہ تقاطع کا x- مختص ہوتا ہے۔

SCERT TELANGANA

ضمیمہ

ریاضیاتی ماڈلنگ
Mathematical Modelling

A.1.1 تعارف

25 رفروری 2013ء کو ISRO کی جانب سے PSLVC20 لانچر کی مدد SARAL مصنوعی سیارہ کو فضاء میں داغا گیا اس سیارے کا وزن 407 کلوگرام ہے اور یہ زمین سے 781 کلومیٹر کی بلندی پر 98.5^o کا زاویہ بناتے ہوئے اپنے مدار میں قائم ہے۔

ان معلومات کو پڑھنے کے بعد ہم کو تعجب ہوگا کہ

(i) سائنسدانوں نے سیارے کی بلندی جو کہ 781 کلومیٹر ہے کیسے معلوم کی؟ کیا انہوں نے واقعتاً خلاء میں جا کر یہ بلندی محسوب کی؟

(ii) انہوں نے پیائش کے بغیر مدار کا زاویہ 98.5^o کیسے محسوب کیا۔

روز مرہ زندگی میں ایسی کئی مثالیں دی جا سکتی ہیں جنہیں پڑھ کر ہمیں تعجب ہوتا ہے کہ سائنسدانوں اور ریاضی دانوں نے ان نتائج کا اندازہ کیسے کیا ہوگا ان مثالوں میں چند ایک ذیل میں درج ہیں۔

(i) سورج کی سطح تپش 6000^oC ہے

(ii) انسانی دل ایک منٹ میں 5 تا 6 لیٹر خون پمپ کرتا ہے۔

(iii) ہم جانتے ہیں کہ زمین سے سورج کا فاصلہ 149,600,000 کلومیٹر ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ مذکورہ مثالوں میں سورج کی تپش معلوم کرنے یا زمین سے سورج کا فاصلہ معلوم کرنے کے لیے کوئی سورج تک نہیں پہنچ سکتا اور نہ ہی ہم دل کو جسم سے علاحدہ کر کے یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دل کتنا خون پمپ کر سکتا ہے۔ ایسے سوالات کے جواب حساب کے ایک خاص طریقہ کار ریاضیاتی ماڈلنگ کے ذریعہ ہی دیئے جا سکتے ہیں۔

ریاضیاتی ماڈلنگ نہ صرف یہ کہ سائنسداں ہی اپناتے ہیں بلکہ ہم بھی یہ طریقہ اپناتے ہیں مثال کے طور پر یہ جاننے کے لیے کہ ''100 10% کی شرح سود مفرد سے دینے پر ایک سال بعد ہم کو کتنی رقم حاصل ہوگی۔ یا پھر ہم یہ جاننا چاہیں گے کہ اپنے کمرے کی آہک پاشی کے لیے کتنا چونا درکار ہے۔ ان جیسے مسائل بھی ریاضیاتی ماڈلنگ کے ذریعہ ہی حل کیے جا سکتے ہیں۔

سوچیے۔ تبادلہ خیال کیجیے

اپنے دوستوں سے تبادلہ خیال کرتے ہوئے روزمرہ زندگی کی ایسی مثالیں پیش کیجیے جہاں ہم راست طور پر مطلوبہ معلومات حاصل نہیں کر سکتے لیکن ہمیں لازمی طور پر ریاضیاتی ماڈلنگ کا سہارا لینا پڑتا ہے۔

SCERT TELANGANA

A.1.2 ریاضیاتی ماڈلس

کیا آپ کو کسی مثلث کے رقبے کا ضابطہ یاد ہے؟

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ} \times \frac{1}{2} = \text{مثلث کا رقبہ}$$

اسی طرح سود مفرد معلوم کرنے کا ضابطہ $I = \frac{PTR}{100}$ ہے یہ ضابطہ یا مساوات سود مفرد (I)، اصل زر (p)، مدت (T) اور شرح سود (R) کے درمیان تعلق کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ ضابطے ریاضیاتی ماڈلس کی مثالیں ہیں۔

ریاضیاتی ماڈلس کی چند اور مثالوں پر غور کریں گے۔

(i) $$\text{رفتار } (S) = \frac{\text{فاصلہ } (d)}{\text{وقت } (t)}$$

(ii) $$\text{سود مرکب میں کلی زر } (A) = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

جہاں p = اصل زر

r = شرح سود

n = مدت

A = کلی زر

لہٰذا، ریاضیاتی ماڈل ایک حسابی ضابطہ یا مختلف مقداروں کے مابین ایک خاص تعلق ہوتا ہے جس سے روزمرہ زندگی کے بعض معاملات بیان کیے جاتے ہیں۔

یہ کیجیے

ریاضیاتی ماڈل کی مزید مثالیں دیجیے جس کو آپ نے پچھلی جماعتوں میں سیکھا ہے۔

A.1.3 ریاضیاتی ماڈلنگ

روزمرہ زندگی میں ہم کو بعض مسائل کا سامنا ہوتا ہے انہیں حل کرنے کے لیے ہم ایک حسابی ضابطہ بناتے ہیں اور حل کرتے ہیں بعد ازاں اس حل کی توضیح کی جا کر یہ تصدیق کی جاتی ہے کہ حل کہاں تک صحیح ہے۔ اس انداز سے ایک ریاضیاتی ماڈل کی تیاری اور حل معلوم کرنے کا طریقہ ریاضیاتی ماڈلنگ کہلاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

آیئے اب ہم ریاضیاتی ماڈلنگ سے متعلق کچھ اور مثالوں کا جائزہ لیں گے۔

مثال-1: وانی چاہتی ہے کہ ایک TV خریدا جائے جس کی قیمت 19000` ہے لیکن اس کے پاس صرف 15000` ہیں۔ اس لیے اس نے یہ طئے کیا کہ اپنی رقم 8% شرح سود مفرد سے قرض دے۔ کتنے سال بعد وہ TV خریدنے کے قابل ہو جائے گی۔

مرحلہ - I (مسئلہ کا فہم)

اس مرحلہ پر ہم اصل مسئلہ کو سمجھنے کی کوشش کریں گے یہاں ہم کو اصل زر، سود مفرد کی شرح دی گئی ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ کتنے سال بعد یہ رقم 19000` ہو جائے گی۔

مرحلہ - 2 (ریاضیاتی صراحت اور ضابطہ کی تدوین)

اس مرحلہ میں ہم مسئلہ کے مختلف پہلوؤں کو ریاضی کی اصطلاحوں میں بیان کریں گے۔ یہاں پر ہم متغیر مقداروں کی وضاحت کریں گے مساوات یا نامساوات لکھی جائیں گی اور پھر مطلوبہ اعداد و شمار جمع کیے جائیں گے۔

یہاں پر ہم سود مفرد کا ضابطہ استعمال کریں گے۔

$$I=\frac{PTR}{100}$$

جہاں P = اصل زر ، T = مدت ، R = شرح سود ، I = سود مفرد

ہم کو مدت معلوم کرنے کے لیے $T=\frac{100I}{RP}$

مرحلہ - 3 (حسابی حل)

اس مرحلے میں مرحلہ - 2 میں ترتیب دیا گیا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے مسئلہ کو حل کریں گے۔

ہم جانتے ہیں کہ پہلے سے ہی وانی کے نزدیک 15000` تو ہیں یہ رقم در اصل زر ہے۔

جملہ درکار رقم 19000` ہے اس لیے اس کو مزید 4,000 = 15,000 − 19,000 رقم کی ضرورت ہے۔ یہ رقم بذریعہ سود حاصل ہوگی۔

$$P=`15{,}000 \quad , \quad R=8\% \quad , \quad I=4000$$

$$T=\frac{100\times 4\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{150\cancel{0}\cancel{0}\times 8}=\frac{40\cancel{0}}{12\cancel{0}}$$

$$T=3\frac{4}{12}=3\frac{1}{3} \text{ سال}$$

مرحلہ - 4 (حل کی توضیح)

مندرجہ بالا مرحلے میں حاصل کئے گئے نتیجہ کی یہاں توضیح کی جائے گی۔

یہاں $3\frac{1}{3}$ سال = T ، اس کا مطلب یہ ہے کہ درکار مدت 3 سال اور ایک تہائی سال یا 3 سال 4 مہینے ہوگی۔

لہذا وانی 3 سال 4 مہینوں بعد TV خرید سکتی ہے۔

SCERT TELANGANA

مرحلہ5:(ماڈل کی توثیق)

ہم ریاضی کے کسی مسئلہ کو ہمیشہ ہی اس لیے قبول نہیں کرسکتے کہ حل صحیح ہے اور جو حقیقت سے میل نہیں کھاتا۔ضرورت کے اعتبار سے ریاضی کے مسئلہ میں ردوبدل کرنا اور جانچ پڑتال کرنا' توثیق (Validation) کہلاتا ہے۔

دی ہوئی مثال میں ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ شرح سود مستقل رہے گا اگر شرح سود بدلتا ہوتو ہمارا ماڈل $\frac{PTR}{100}$ کارآمد نہیں ہوگا۔یہاں ہم یہ بھی فرض کرتے ہیں کہ T V کی قیمت 19,000 ` غیرمتبدل رہے گی۔

آیئے ایک مثال پر غور کریں گے۔

مثال-2: مکرم پورہ ہائی اسکول' کریم نگر کی دسویں جماعت میں 50 طلباء پڑھتے ہیں ان کے ریاضی کے استاد حیدرآباد کا دورہ کروانے کے لیے جیپ میں سفر کرنا چاہتے ہیں ہر جیپ میں ڈرائیور کے علاوہ 6 افراد کی گنجائش ہے بتایئے کہ کتنی جیپ کرایہ پر حاصل کی جانی چاہیں؟

مرحلہ - 1: ہم 51 افراد کے سفر کے لیے جیپ کی تعداد معلوم کرنا چاہتے ہیں جب کہ دیا گیا ہے کہ ڈرائیور کے علاوہ ہر جیپ میں 6 افراد سفر کرسکتے ہیں

مرحلہ - 2: جیپ کی تعداد = $\dfrac{\text{افراد کی تعداد}}{\text{ہر جیپ میں مسافروں کی تعداد}}$

مرحلہ - 3: جیپ کی تعداد $= 51/6$

$= 8.5$

مرحلہ - 4:(توضیح)

ہم جانتے ہیں کہ جیپ کی تعداد 8.5 نہیں ہوسکتی۔لہٰذا قریب ترین صحیح عدد 9 لینا پڑے گا۔

$\therefore$ جیپ کی تعداد $= 9$

مرحلہ - 5: (توثیق)

ریاضیاتی ماڈلنگ کے دوران ہم یہ فرض کرتے ہوئے کہ دبلے اور فربہ بچوں کے لیے یک جیسی جگہ درکار ہے' مسئلہ حل کرتے ہیں۔اگر اس طرح فرض نہ کریں تب یہ مسئلہ حل نہیں ہوگا۔

کوشش کیجیے

1۔ اپنی مرضی سے آپ کی درسی کتاب سے کوئی ایک عبارتی سوال لیجیے اس سوال کے لیے ریاضیاتی ماڈل بنایئے اور حل کیجیے

2۔ ذیل میں دیے گئے مسئلہ کا ریاضیاتی ماڈل تیار کیجیے اور حل کیجیے۔

فرض کیجیے کہ کار مقام 'A' سے سفر شروع کرتے ہوئے مقام 'B' کی جانب 40 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔اسی وقت دوسری کار مقام 'B' سے شروع کرتے ہوئے مقام 'A' کی جانب 30 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھتی ہے۔اگر 'A' اور 'B' کے درمیان فاصلہ 100 کلومیٹر ہوتو بتایئے کہ کتنی دیر بعد یہ کاریں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں گی۔

SCERT TELANGANA

اب تک ہم نے سادہ عبارتی سوالات کے لیے ریاضیاتی ماڈلس ترتیب دیئے ہیں آیئے اب ہم روزمرہ زندگی کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

مثال-3: سال 2000 کے دوران اقوام متحدہ کے 191 رکن ممالک نے مرد و خواتین سے متعلق مساوات کے مقصد سے ایک اعلامیہ پر دستخط کیے۔ اس کی جانچ کے لیے ایک نشانہ (نمائندہ) یہ بنایا گیا کہ تحتانوی اور فوقانوی مدرسے سے پڑھنے والے لڑکے اور لڑکیوں میں نسبت معلوم کرلی جائے؟ ہمارے ملک میں لڑکیوں کے فیصد کے اعداد و شمار جنہیں تحتانوی مدرسوں میں شریک کیا جاتا ہے ذیل کے جدول A.1.1 میں بتائے گئے ہیں۔

جدول : A.1.1

سال	اندراج (فیصد میں)
1991 – 92	41.9
1992 – 93	42.6
1993 – 94	42.7
1994 – 95	42.9
1995 – 96	43.1
1996 – 97	43.2
1997 -98	43.5
1998 – 99	43.5
1999 – 2000	43.6
2000 – 01	43.7
2001 - 02	44.1

ان اعداد و شمار کو استعمال کرتے ہوئے حسابی نقطہ نظر سے تحتانوی مدرسہ میں لڑکیوں کو شریک کرنے کے تناسب میں بتدریج اضافہ کو بتایا گیا ہے۔ تخمینہ کرکے بتایئے کہ کس سال لڑکیوں کی تعداد 50% سے تجاوز کر جائے گی۔

حل:

مرحلہ -1: (ضابطہ کی تدوین)

آیئے سب سے پہلے اس مسئلہ کو حسابی سوال کے طور پر تحویل کریں گے

جدول A.1.1 میں سال 92-1991، 93-1992 وغیرہ کے دوران طلباء کے اندراج دیئے گئے ہیں چوں کہ بچے تعلیمی سال کے شروع ہی میں شریک ہوتے ہیں ہم 92-1991 وغیرہ کے سال لیں گے۔ اور ہم یہ بھی فرض کریں گے کہ تحتانوی مدرسوں میں شریک ہونے والی لڑکیوں کا فیصد اسی شرح سے (جیسا کہ جدول A.1.1 میں بتایا گیا ہے) بڑھتا رہے گا اس لیے سال کی تعداد اہم ہے نہ کہ کوئی خصوصی سال (اس کی مثال ایسی ہی ہے جیسے کہ ہم 15,000` کا سود مفرد 8% کی شرح سے 3 سال کے لیے معلوم کرتے ہیں۔ یہاں پر یہ بات اہم نہیں ہے کہ 2002 - 1999 تک یا 04 - 2001 تک کے جن سال کے لیے سود مفرد محسوب کیا جاتا ہے اس کی شرح کیا ہے؟)

SCERT TELANGANA

یہاں پر 1991 کے بعد سال کا تقابل کرتے ہوئے 1991 سے شریک مدرسہ ہونے والوں کی تعداد کیا ہے؟ فرض کیجیے کہ سال 1991 سے صفر مان کر گنتی کریں گے۔یعنی 1992 کے لیے ایک سال' اس لیے کہ 1991 کے بعد 1992 تک ایک سال مکمل ہوتا ہے اسی طرح 1993 کے لیے 2' اور 1994 کے لیے 3 سال وغیرہ لکھا جائے گا۔لہٰذا ہمارا جدول A.I.1 ذیل کے جدول A.I.2 میں بدل جائے گا۔

جدول A.I.2

سال	اندراج (فیصد میں)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

لڑکیوں کے شریک مدرسہ ہونے کی شرح ذیل کے جدول A.I.3 میں دی جاتی ہے۔

جدول A.I.3

سال	اندراج (فیصد میں)	اضافہ
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

SCERT TELANGANA

سال 1991 سے 1992 پہلے سال کے اختتام پر شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کی تعداد میں %41.9 تا %42.6 کے سبب %0.7 کا اضافہ ہوا دوسرے سال کے اختتام پر یہ شرح %42.6 تا %42.7 ہوگئی جو کہ %0.1 ہے۔ مذکورہ بالا تفصیل سے ہم سال کی تعداد اور فیصد کے درمیان کوئی متعین ہم رشتگی حاصل نہیں کر سکتے لیکن شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کی تعداد ایک خاص رفتار میں اضافہ سے برقرار ہے۔صرف پہلے سال کے دوران اور 10 ویں سال میں غیر معمولی تبدیلی دیکھی گئی ہے ان قدروں کا اوسط

$$= \frac{0.7+0.1+0.2+0.2+0.1+0.3+0+0.1+0.1+0.4}{10}$$

$$= \frac{2.2}{10} = 0.22 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

فرض کیجیے کہ اس اضافہ کی شرح %0.22 ہے

مرحلہ-2:(ریاضیاتی توضیح)

ہم نے فرض کیا ہے کہ لڑکیوں کی شریک مدرسہ ہونے کی شرح بتدریج ہر سال %0.22 کی شرح سے بڑھتی جاتی ہے۔اس لیے

پہلے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد (EP) $= 41.9 + 0.22$

دوسرے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد(EP) $= 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2\ 0.22$

تیسرے سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد(EP) $= 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3\ 0.22$

nویں سال شریک مدرسہ ہونے والی لڑکیوں کا فیصد(EP) $= 41.9 + 0.22n,\ n>1.$ .... (2)

ہم کو اس سال کی تعداد بھی محسوب کرنا ہے جہاں یہ شرح بڑھ کر %50 کو چھو لیتی ہے

اس لیے ہمیں 'n' کی قیمت معلوم کرنی ہوگی۔

$$50 = 41.9 + 0.22n$$

مرحلہ-3: **حل:** 'n' کی قیمت کے لیے مساوات (2) کو حل کرنے پر

$$n = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

مرحلہ-4:(توضیح): چونکہ سال کی تعداد صحیح عدد ہونا چاہیے اس لیے ہم اگلا صحیح عدد 37 لیں گے لہذا شریک مدرسہ ہونے والوں کا فیصد %50 کے نشانے کو پالے گا۔

$$1991 + 37 = 2028$$

مرحلہ-5:(تصدیق): چوں کہ ہم روزمرہ زندگی سے ایک مثال لے رہے ہیں تو ہم کو یہ دیکھنا ہوگا کہ کس حد تک یہ قیمت اصل حالات سے مطابقت رکھتی ہے۔

آیئے جانچ کرتے ہیں کہ ضابطہ (2) حقیقت سے کتنا قریب ہے۔اس کے لیے اس سال کی قدر معلوم کریں گے جو کہ ہم جانتے ہیں۔ ضابطہ (2) استعمال کرنے اور تقابل کے لیے ان دونوں کا فرق محسوب کرتے ہوئے انہیں معلوم کرنے پر حاصل قیمتوں کو جدول A.I.4 میں دیا گیا ہے

SCERT TELANGANA

جدولA.I.4

سال	اندراج (فیصد میں)	مرحلہ-2 کے مطابق محصلہ قدر (فیصد میں)	فرق (فیصد میں)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	-0.06
9	43.7	43.88	-0.18
10	44.1	44.10	0.00

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ضابطہ(2) کی بعض قدریں 0.3% یا0.5% کی حدتک اصل قدر سے کم ہیں اس تفاوت کے سبب 3 تا5 سال کا فرق آ سکتا ہے چوں کہ ہرسال شرح فیصد میں 1% تا2% اضافہ ہورہا ہے۔ہم طئے کریں گے کہ یہ فرق قابل قبول ہے اس صورت میں مساوات(2)ہمارا ریاضیاتی ماڈل ہے۔

فرض کیجیے کہ یہ غلطی کافی مقدار میں ہوتو ہمیں ماڈل کوصحیح کرنا ہوگا تب ہم کومرحلہ -2 کی جانب جاتے ہوئے مساوات تبدیل کرنی ہوگی۔

آیئے اسی کا جائزہ لیتے ہیں۔

مرحلہ-1: ضابطہ کی مکرر تدوین

یہاں بھی ہم ہنوز یہی فرض کریں گے کہ قیمتوں میں ہموار اضافہ ہوتا ہے جس کی شرح 0.22% ہے لیکن ہم غلطی کو اقل ترین حدتک گھٹانے کے لیے تصحیح متعارف کریں گے جس کے لیے ہم کو تصحیح طلب قیمتوں کا اوسط معلوم کرنا ہوگا۔

$$\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10} = 0.18$$

ہم غلطیوں کا اوسط لیتے ہوئے اس کی قدر کے ذریعہ ضابطہ کی تصحیح کریں گے۔

نظر ثانی شدہ ریاضیاتی توضیح: آیئے مرحلہ-2 میں دیئے گئے لڑکیوں کے شریک مدرسہ ہونے کے فیصد کے ضابطہ میں غلطیوں کا اوسط جمع کرنے پر اس لیے تصحیح شدہ ضابطہ

SCERT TELANGANA

ویں سال میں شریک مدرسہ لڑکیوں کا فیصد $n = 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$, (جہاں $n>1$)............(3)

ہم مساوات (2) میں موزوں ردوبدل کریں گے جو

$50 = 42.08 + 0.22n$ ....(4) ہوجائے گی۔

متبادل حل: 'n' کے لیے مساوات (4) حل کرنے پر

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

توضیح : چوں کہ $n = 36$ ہے لہذا تحتانوی مدرسے میں لڑکیوں کے شریک ہونے کا فیصد 50 ہوجائے گا جو کہ سال $1991+36=2027$ ہوگا۔

حل کی تصدیق: آیئے ضابطہ (4) استعمال کرتے ہوئے محصلہ قیمتوں کو اصل قیمت سے تقابل کرنے پر جدول A.I.5 کی قیمتیں آئیں گی۔

جدول A.I.5

سال	اندراج (فیصد)	مساوات (2) کے مطابق قدر	فرق	مساوات (4) کے مطابق قدر	فرق
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.20	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	-0.12
8	43.6	43.66	-0.06	43.84	-0.24
9	43.7	43.88	-0.18	44.06	-0.36
10	44.1	44.10	0.00	44.28	-0.18

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات (4) کی متعدد قیمتیں مساوات (2) کی قیمتوں کی بہ نسبت اصل قیمت سے قریب تر ہیں۔ اس صورت میں غلطیوں کا اوسط صفر '0' رہ جاتا ہے۔

SCERT TELANGANA

A.I.4 ریاضیاتی ماڈلنگ کے فوائد

1۔ ریاضیاتی ماڈلنگ کا مقصد معلومات کو حسابی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہوئے روزمرہ کی دنیا سے متعلق صحیح نتیجہ پر پہنچنا ہوتا ہے۔ ایک ایسے موقع پر ریاضیاتی ماڈلنگ خصوصی طور پر کارآمد ہوتی ہے جب کسی دوسرے ذرائع سے جیسے راست مشاہدے یا پھر تجربہ کرتے ہوئے صحیح معلومات کا اکٹھا کرنا یا تو ممکن نہیں ہوتا یا پھر بہت زیادہ مہنگا ہوگا۔

مثال کے طور پر فرض کیجیے کہ ہم متھرا ریفائنری سے خارج ہونے والے دھویں سے تاج محل پر ہونے والے نقصان دہ اثرات کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں اس مقصد کے نے اس کام کا تجربہ راست طور پر تاج محل پر نہیں کیا جا سکتا۔ چوں کہ عمارت کو نقصان پہنچنے کا احتمال ہے یہاں ریاضیاتی ماڈلنگ کا بڑا فائدہ ہوگا۔

2۔ کئی اداروں کی جانب سے موسمی پیش قیاسی بڑی اہمیت رکھتی ہے اس لیے کہ مستقبل میں واقع ہونے والے حالات کے پیش نظر ہی فیصلے کیے جاتے ہیں یا کام انجام دیئے جاتے ہیں۔

مثال:

1۔ مارکٹنگ محکمہ میں طلب سے متعلق قابل بھروسہ اندازہ اشیاء کی فروخت کے لیے بہتر منصوبہ بندی کی وجہ بنتا ہے۔

2۔ مدرسہ بورڈ کو کسی ریاست کے اضلاع میں مختلف اسکول میں بچوں کو شریک کرنے کی تعداد سے متعلق ایک اندازے کی ضرورت ہوتی ہے جس سے یہ طئے کیا جائے کہ اسکول کب اور کہاں قائم کیے جا سکیں۔

3۔ اکثر و بیشتر ہمیں بعض امور سے متعلق بہت زیادہ مقداروں کا تخمینہ کرنا پڑتا ہے جیسے جنگلات میں درختوں کی تعداد کسی تالاب میں مچھلیوں کی تعداد یا پھر رائے دہندوں کی جانب سے ڈالے جانے والے ووٹوں کی تعداد وغیرہ

ریاضیاتی ماڈلنگ کی چند اور مثالیں ملاحظہ کیجیے۔

(i) چند سال کے لیے مستقبل کی آبادی کا تخمینہ

(ii) مانسون کی آمد کی پیش قیاسی

(iii) مستقبل میں (چند سال) شرح خواندگی کا تخمینہ

(iv) کسی درخت پر پتوں کی تعداد کا اندازہ

(v) سمندر کی گہرائی کا تخمینہ

A.I.5 ریاضیاتی ماڈلنگ کے نقائص

کیا ریاضیاتی ماڈلنگ ہمارے تمام سوالات کا حل پیش کرتی ہیں؟

یقیناً نہیں؛ اس کی چند حد بندیاں ہوتی ہیں ہم کو یہ بات ذہن نشین رکھنی چاہیے کہ ایک نمونہ کسی حقیقی مسئلہ کے حل کے سلسلے میں ایک سادہ طریقہ ہوتا ہے اور یہ دونوں بالکل ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں یہ ایسے ہی ہیں جیسے کہ کسی ملک کے نقشے اور اس ملک کے مابین فرق ہو، نقشے سے ہم کو صرف بعض تفصیلات ہی معلوم ہوتی ہیں ایک نقشے سے ہم سطح سمندر سے کسی مقام کی بلندی معلوم کر سکتے ہیں لیکن اس سے ہم کو وہاں کے عوام کے متعلق معلومات نہیں مل سکتیں اس لیے ہمیں چاہیے کہ اسی حد تک کسی ماڈل کا استعمال کریں جہاں تک اس کی گنجائش ہو سکتی ہے جبکہ اصل حل کے موقع پر ان تمام عوامل کو ذہن نشین رکھا جائے جس کو ہم نے نظر انداز کیا تھا۔ ماڈل کو اس کی حدوں ہی میں استعمال کیا جانا چاہیے۔

SCERT TELANGANA

A.I.6 کس حد تک ہم' کسی ریاضیاتی ماڈل کو بہتر بنا سکتے ہیں؟

کسی ماڈل کو بہتر بنانے کے لیے ہمیں کئی ایک اضافی عوامل ملحوظ رکھنے ہوتے ہیں اس کام کے دوران ہم کو ریاضی کی مساواتوں کی مختلف متغیر مقداروں کو جمع کرنا پڑے گا۔ نیتجتاً مساواتیں پیچیدہ ہو کر ماڈل خود مشکل ہو جاتا ہے۔ ماڈل کو اس حد تک سہل ہونا چاہیے کہ ہم اس کو صحیح طور پر استعمال کر سکیں۔ بہ الفاظ دیگر حقیقی قیمتیں جتنی زیادہ قریب تر ہوں گی ہمارا ماڈل اتنا ہی بہتر کہلائے گا۔

کوشش کیجیے

ماہر حیوانیات لیونا ڈو فبیونا کی(Leonardo Fibonacci) نے جو 13ویں صدی عیسوی کا سائنس داں رہا ہے ایک مسئلہ پیش کیا۔اس نے یہ جاننا چاہا تھا کہ اگر دو نر دو مادہ خرگوش سے ایک سال کی مدت میں ان کی نسل کتنی ہو جائے گی

فرض کیجیے کہ خرگوش کا ایک جوڑا ہر مہینہ دو بچے پیدا کرتا ہے اور یہ کہ ہر جوڑا دو مہینوں میں بالغ جوڑا بن جاتا ہے کتنے مہینوں بعد خرگوش کے جوڑوں کی تعداد آنے والے دو مہینوں میں ان کی مجموعی تعداد' سوائے صفرویں اور پہلے مہینے کے' ہو جاتی ہے۔ ذیل کے جدول میں یہ دکھایا گیا ہے کہ ہر ماہ خرگوش کی تعداد میں کتنا اضافہ ہوتا ہے۔

خرگوش کے جوڑ	مہینہ
1	0
1	1
2	2
3	3
5	4
8	5
13	6
21	7
34	8
55	9
89	10
144	11
233	12
377	13
610	14
987	15
1597	16

ایک سال بعد ان کی تعداد 233 ہوگی۔ 16 مہینے بعد ان کے 1600 جوڑے تیار ہو جائیں گے اس مثال کے لیے نفس مسئلہ واضح کیجیے اور ریاضیاتی ماڈلنگ کے مختلف مراحل بیان کیجیے۔

SCERT TELANGANA

آیئے اس باب کا مزید کچھ اور دلچسپ مثالوں کے ساتھ اختتام کریں۔

مثال-4:(پانسہ کے جوڑ کا وقوعہ)

صہیب اور عائشہ پانسے (DICE) کا کھیل کھیل رہے ہیں۔ صہیب کہتا ہے کہ اگر عائشہ ایک دفعہ پانسے کو اچھالنے پر اعداد کا مجموعہ صحیح طور پر بتا سکتی ہے تو وہ اس کے ہر صحیح جواب پر اس کو انعام دے گا۔ بتایئے کہ عائشہ کے لیے بہترین قیاس کے کیا اعداد ہوں گے۔

حل:

مرحلہ-1: (مسئلہ کا فہم)

آپ کو چند اعداد جن کے آنے کے زیادہ امکان ہوں جاننے کی ضرورت ہوگی۔

مرحلہ-2: (ریاضیاتی توضیح)

ریاضیاتی اصطلاحوں میں یہ کہا جائے گا کہ یہ سوال اعداد کے مختلف ممکنہ قیاسات پر مشتمل ہے جب کہ ہم پانسہ ڈالتے ہیں۔

ہم اس صورت حال کا ایک آسان نمونہ یوں پیش کریں گے کہ ذیل کے اعداد کے 36 جوڑ میں سے کسی بھی وقت پانسہ پھینکنے پر کیا امکانات ہوں گے۔

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

اعداد کے ہر جوڑ میں پہلا عدد پانسہ کو پہلی دفعہ پھینکنے اور دوسرا عدد پانسے کو دوسری دفعہ پھینکنے پر امکانی طور پر ظاہر ہونے والے اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

مرحلہ-3: (حسابی سوال کا حل): مذکورہ اعداد کی جوڑیوں کو جمع کرتے ہوئے ہم کو یہ معلوم ہوتا ہے کہ امکانی مجموعے 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12 قیاس کئے گئے ہیں۔ ہم کو ان میں سے ہر ایک کے لیے یہ مفروضہ لے کر کہ تمام 36 جوڑ امکانی طور پر مساویانہ واقع ہوں گے، قیاس کرنا ہوگا۔

ہم یہ کام ذیل کے جدول کے مطابق کریں گے۔

مجموعہ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
قیاس	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مشاہدہ کیجیے کہ 7 حاصل جمع آنے کے لیے $\frac{1}{6}$ امکانات ہیں۔ جو کہ دوسرے اعداد کے حاصل جمع کے وقوع پزیر ہونے کے امکانات سے زیادہ ہیں۔

مرحلہ - 4 (حل کی توضیح)

چوں کہ اعداد کے مجموعے 7 کے واضح ہونے کا امکان بہت زیادہ ہے آپ کو چاہیے کہ 7 کے عدد کا مکرر قیاس کریں۔

مرحلہ - 5 (نمونے کی تصدیق)

پانسے کے ایک جوڑ کو متعدد دفعہ پھینکتے ہوئے ایک تعددی جدول تیار کیا جائے۔اس جدول کے تعدد کا متعلقہ قیاسات سے تقابل کیجیے۔اگر قیاس کردہ قیمتیں قریب تر نہ ہوں تو پانسے کی قیمتیں امتیازی ہیں۔تب یہ جاننے کے لیے کہ پانسہ کس جانب جھکاؤ رکھتا ہے ہمیں اس عدد کو معلوم کرنے کے لیے اعداد کا مجموعہ حاصل کرنا ہوگا۔

اس مشق میں آگے بڑھنے سے قبل کچھ پچھلی معلومات کا اعادہ کرنا پڑے گا۔

ایک ایسے وقت جب کہ ہم کو رقم کی ضرورت ہو اور ہماری جیب میں رقم نہ ہو بہت سارے افراد کا تجربہ سے گزرتے ہیں چاہے روزمرہ کی بعض ضروری اشیاء خریدنے کے لیے کافی رقم موجود ہو یا پھر سامان تعیش کے لیے بہر حال ہمیں ہمیشہ ہی روپیوں کی ضرورت ہوتی ہے۔اسکوٹر' ریفریجریٹر' ٹیلی ویژن' کار وغیرہ کی خریداری کے لیے جب کہ خواہش مندوں کے پاس ناکافی رقم ہو تو ایک سہولت دیجاتی ہے ایک اسکیم جس کو قسط واری اسکیم کہا جاتا ہے دکانداروں نے رائج کی ہے۔

بعض دفعہ ایک تاجر (دکاندار' Trader) بازاری حکمت عملی کے طور پر قسط واری اسکیم متعارف کرتا ہے۔تاکہ خریداروں کو مذکورہ اشیاء وغیرہ خریدنے کا موقع مل سکے۔قسط واری اسکیم کے تحت خریدار کو بوقت خریدی کسی چیز کی مکمل قیمت ادا کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی ہے ۔خریداری کے وقت اس کو قیمت کی جزوی رقم ادا کرنی ہوتی ہے۔اور باقی ماندہ رقم کو قسطوں میں ادا کرنا ہوتا ہے۔یہ قسطیں ماہانہ' سہ ماہی' ششماہی یا پھر سالانہ بھی ہوسکتی ہیں۔یہاں یہ بات واضح ہے کہ خریدار کو قیمت سے زیادہ ادا کرنا پڑتا ہے چوں کہ قیمت کی بعدازاں ادائیگی (تاخیر سے ادائیگی) کے سبب تاجر شئے کی لاگت پر سود عائد کرتا ہے۔

بازار کے اس نظریہ سے متعلق بعض اصطلاحیں مجموعی طور پر استعمال کی جاتی ہیں ان میں سے چند ایک سے آپ واقف بھی ہوں گے مثال کے طور پر کسی شئے کی خریدی کے لیے موقتی قیمت وہ رقم ہوتی ہے جو خریدار بوقت خریداری اس کی مکمل قیمت کے طور پر ادا کرتا ہے۔ (Cash Down payment) شئے کی وہ جزوی قیمت ہوتی ہے جس کی ادائیگی کے بعد خریدار اس کو اپنا لیتا ہے۔

آیئے اب ذیل کے ایسے ہی ایک سوال کو ریاضیاتی ماڈلنگ کے وسیلہ سے حل کریں گے۔

کوشش کیجیے

صہیب ایک سائیکل خریدنا چاہتا ہے مارکٹ جانے پر اس کو پتہ چلتا ہے کہ اس کی پسند کی سائیکل کی قیمت 2400 ` ہے اور اسکے پاس صرف 1400 ` ہے اس موقع پر دکاندار اس کی مدد کی پیش کش کرتا ہے وہ کہتا ہے کہ صہیب موقع پر ہی 1400 ` ادا کردے اور 550 ` کی ماہانہ اقساط کے طور پر بقیہ ادائیگی کرے۔صہیب کو دکاندار کی پیشکش قبول کرنا ہوگا یا پھر 12% سود مفرد کی شرح سے بینک سے قرض لینا ہوگا۔بتایئے کہ دونوں صورتوں میں سے صہیب کے لیے فائدہ مند کونسی صورت ہوگی۔اس کی مدد کیجیے۔

SCERT TELANGANA

جوابات
Answers

مشق - 1.1

1. (i) 90 (ii) 196 (iii) 127

مشق - 1.2

1۔ (i) $2^2\times5\times7$ (ii) $2^2\times3\times13$ (iii) $3^2\times5^2\times17$
(iv) $5\times7\times11\times13$ (v) $17\times19\times23$

2۔ (i) 420,3 (ii) 11139,1 (iii) 1800,1
(iv) 216,36 (v) 22338,9 (vi) 6

مشق - 1.3

1۔ (i) 0.375 مختتم (ii) 0.5725 مختتم (iii) 4.2 مختتم
(iv) $0.\overline{18}$ تکراری (v) 0.064 مختتم

2۔ (i) مختتم (ii) غیرمختتم تکراری (iii) غیرمختتم متوالی تکراری
(iv) مختتم (v) غیرمختتم (vi) مختتم
(vii) غیرمختتم (viii) مختتم (ix) مختتم
(x) غیرمختتم تکراری

3. (i) 0.52 (ii) 0.9375 (iii) 0.115 (iv) 32.08 (v) 1.3

4. (i) ناطق، q کے مفرد اجزاء 2 یا 5 یا دونوں
(ii) غیرناطق
(iii) ناطق، q کے مفرد اجزاء جو 2 اور 5 کے علاوہ ہیں۔

مشق - 1.5

1۔ (i) $\frac{1}{2}$ (ii) -4 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) 0 صفر (V) $\frac{1}{2}$ (vi) 9 (vii) -2 (viii) 3 (ix) 12

SCERT TELANGANA

2۔ (i) 1 یا log10 (ii) 3 (iii) 1 (iv) $\log\left(\frac{9}{8}\right)$

(v) log45

3۔ (i) x+y (ii) x+y-1 (iii) x+y+2 (iv) 3x+3y+1

4۔ (i) 4log 10 (ii) 7log2-log 5

(iii) 2 log x + 3log y + 4 log z (iv) 2 log p + 3log q - 4 log r

(v) $\frac{3}{2}\log x - \log y$

6۔ 7 7۔ 3 8۔ $\frac{\log 3/2}{\log 6}$

مشق - 2.1

1۔ (i) سٹ (ii) سٹ نہیں (iii) سٹ نہیں

(iv) سٹ (v) سٹ

2۔ (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\notin$

(v) $\in$ (vi) $\in$

3۔ (i) $x \notin A$ (ii) $d \in B$ (iii) $1 \in N$ (iv) $8 \notin P$

4۔ (i) کاذب (ii) کاذب (iii) صادق

5۔ (i) B = {1, 2, 3, 4, 5} (ii) C = {17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80}

(iii) D = {3,5} (iv) E = {B, E, T, R}

6۔ (i) A={x=3y، $y<5$، $y\in N$ }

(ii) $B=\left\{x=2^y, y<6, y\in N\right\}$

(iii) $C=\left\{x=5^y, y<5, y\in N\right\}$

(iv) $D=\left\{x=y^2, y\le 10, y\in N\right\}$

7۔ (i) A = {51, 52, 53, ..., 98, 99} (ii) B = {+2, 2}

(iii) D = {2, 0, 4, A, 2} (iv) E = {1, 3, 9, 19}

8۔ (i) (c) (ii) (a) (iii) (d) (iv) (b)

SCERT TELANGANA

مشق - 2.2

1۔ ہاں $A \cap B$ اور $B \cap A$ مساوی ہیں

2۔ $A \cap B = \phi$ $\quad$ $A \cap A = A$

3۔ A-B={2,4,8,10} $\quad$ B-A={3,9,12,15}

4۔ $A \cup B = B$ $\quad$ 5۔ $A \cap B$ = {جفت طبعی اعداد}

{2,4,6,..... .....}

$A \cap C$ = {طاق طبعی اعداد}

$A \cap D$ = {2,3,5,7,11,.......,97}

$B \cap C = \phi$

$B \cap D$ = {جفت طبعی اعداد}

$C \cap D$ = {3,5,7,11,.............}

6۔ A - B = {3, 6, 9, 15, 18, 21}

A - C = {3, 9, 15, 18, 21}

A - D = {3, 6, 9, 12, 18, 21}

B - A = {4, 8, 16, 20}

C - A = {2, 4, 8, 10, 14, 16}

D - A = {5, 10, 20}

B - C = {20}

B - D = {4, 8, 12, 16}

C - B = {2, 6, 10, 14)

D - B = {5, 10, 15}

7۔ (i) کاذب

(ii) صادق

(iii) صادق

(iv) صادق

SCERT TELANGANA

ϕ

مشق - 2.3

1۔ (i) ہاں، مساوی سٹ

2۔ (i) مساوی سٹ (ii) غیر مساوی سٹ (iii) مساوی سٹ

(iv) غیر مساوی سٹ (v) غیر مساوی سٹ

(vi) غیر مساوی سٹ

3۔ (i) A=B (ii) A≠B (iii) A≠B (iv) A≠B

4۔ (i) {1,2,3,.......10}≠{2,3,4,.........9}

(ii) x=2x+1 کا مطلب x طاق ہے۔

(iii) x، 15 کا ضعف ہے اس طرح 5 وجود نہیں رکھتا ہے۔

(iv) x، صفر عدد ہے مگر 9 مفرد نہیں ہے۔

5۔ (i) {p}, {q}, {p, q}, ϕ

(ii) [y}, {z}, {x, y}, {y, z}, {z, x}, {x, y, z},ϕ

(iii) c}, {c, d}, {a, c}, {a, d}, {b, d}, {a, b, c},

{b, c, d}, {a, b, d}, {a, c, d}, {a, b, c, d)

(iv) ϕ , {1}, {4}, {9}, {16}, {1, 4}, {1, 9}, {1, 16}, {4, 9}, {4, 16}, {9, 16},

{1, 4, 9}, {1, 9, 16}, {4, 9, 16}, {1, 4, 16}, {1, 4, 9, 14)

(v) ϕ , {10}, {100}, {1000}, {10, 100}, {100, 1000}, {10, 1000},{10, 100, 1000}

مشق 2.4

1۔ (i) غیر خالی (ii) خالی (iii) خالی (iv) خالی (v) غیر خالی

2۔ (i) متناہی (ii) متناہی (iii) متناہی

3۔ (i) متناہی (ii) لامتناہی (iii) لامتناہی (iv) لامتناہی

SCERT TELANGANA

مشق 3.1

1۔ (a) (i) -6 (ii) 7 (iii) -6

(b) طلباء کے لیے چھوڑ دیا گیا

2۔ (i) کاذب ($\sqrt[1]{2}$، x کا ضریب ہے، درجہ نہیں)

(ii) کاذب (x^2 کا عددی ضریب 4- ہے)

(iii) صادق (کسی بھی مستقل رکن کے لیے درجہ صفر ہوگا)

(iv) کاذب (یہ ایک کثیر رکنی نہیں ہے)

(v) کاذب (کیوں کہ کثیر رکنی کا تعلق اس کے ارکان کی تعداد سے نہیں ہوتا ہے)

3۔ p(1) = 0, p (-1) =-2, p(0) = -1, p(2) = 7, p(-2) = -9

4۔ ہاں؛ کثیر رکنی x^4-16 کا صفر 2 اور 2- ہے۔

5۔ ہاں؛ کثیر رکنی x^2-x-6 کا صفر 3 اور 2- ہے۔

مشق 3.2

1۔ (i) صفر نہیں ہے (ii) 1 (iii) 3

(iv) 2 (v) 4 (vi) 3

2۔ (i) 0 (ii) -2,-3 (iii) -2,-3 (iv) $-2,2,\pm\sqrt{-4}$

3۔ (i) 4, -3 (ii) 3, 3 (iii) صفر نہیں ہے۔

(iv) -4, 1 (v) -1, 1

4۔ $P\left(\frac{1}{4}\right)=0$ اور P(-1) =0

مشق - 3.3

1۔ (i) 4, -2 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

(iv) 0, -2 (v) $\sqrt{15}\ -\sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2۔ (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ (iii) $x^2+\sqrt{5x}$

(iv) x^2-2x+1 (v) $4x^2-1$ (vi) x^2-5x+4

3۔ (i) $x^2 - x - 2$ (ii) x^2-3 (iii) $4x^2+3x-1$ (iv) $4x^2-8x+3$

4۔ ہاں؛ تمام صفر ہیں

SCERT TELANGANA

مشق - 3.4

1۔ (i) خارج قسمت = $x-3$ اور باقی = $7x-9$

(ii) خارج قسمت = x^2+x-3 اور باقی = 8

(iii) خارج قسمت = $-x^2-2$ اور باقی = $-5x+10$

2۔ (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں

3۔ $-1, +1$

4۔ $g(x) = x^2 - x + 1$

5۔ (i) $p(x) = 2x^2-2x + 14,\ g(x) = 2,\ q(x) = x^2 - x + 7,\ r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ g(x) = x^2-1,\ q(x) = x + 1,\ r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2- x +2,\ g(x) = x^2-1,\ q(x) = x + 2,\ r(x) = 4$

مشق - 4.1

1۔ (a) ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں (b) دو خطوط منطبق ہونا

(c) متوازی خطوط

2۔ (a) مطمئن کرتی ہے (b) مطمئن نہیں کرتی ہے

(c) مطمئن کرتی ہے (d) مطمئن کرتی ہے

(e) مطمئن کرتی ہے (f) مطمئن کرتی ہے

(g) مطمئن کرتی ہے (h) مطمئن کرتی ہے

(i) مطمئن نہیں کرتی ہے (j) مطمئن نہیں کرتی ہے

3۔ پائنٹ کی تعداد = 1 شرٹ کی تعداد = 0

4۔ لڑکیوں کی تعداد = 7 لڑکوں کی تعداد = 3

5۔ پنسل کی قیمت = ₹3 پن کی قیمت = ₹5

6۔ لمبائی = 20 میٹر چوڑائی = 16 میٹر

7۔ (i) $6x + 5y - 10 = 0$

(ii) $4x + 6y - 10 = 0$

(iii) $6x + 9y - 24 = 0$

SCERT TELANGANA

8۔ طول = 40اکائیاں عرض = 30اکائیاں

9۔ طلباء کی تعداد =16 بینچ کی تعداد = 5

مشق - 4.2

1۔ پہلے شخص کی آمدنی = `18000 دوسرے شخص کی آمدنی = `14000

2۔ 42 اور 24

3۔ زاویے : 99^{o} اور 81^{o}

4۔ (i) مقرر کردہ کرایہ = `40 شرح کرایہ فی کلومیٹر = `18 (ii) 490

5۔ $\frac{7}{9}$

6۔ 60 km/h ; 40 km/h

7۔ 59^{o} اور 31^{o}

8۔ 659 اور 723

9۔ 40ml اور 60ml

10۔ `7200 اور `4800

مشق - 4.3

1۔ (i) (4, 5) (ii) $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (iii) (4, 9)

(iv) (1, 2) (v) (3, 2) (vi) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(vii) (3, 2) (viii) (1, 1)

2۔ (i) بوٹ کی رفتار = 8 کلومیٹر فی گھنٹہ بہاؤ کی رفتار = 3 کلومیٹر فی گھنٹہ

(ii) ریل کی رفتار = 60 کلومیٹر فی گھنٹہ کار کی رفتار = 80 کلومیٹر فی گھنٹہ

(iii) کام کی تکمیل کے درکار ایام مرد آدمی کے لیے = 18

عورتوں کے لیے کام کی تکمیل کے لیے درکار ایام = 36

مشق - 5.1

1۔ (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں (iv) ہاں

(v) ہاں (vi) نہیں (vii) نہیں (viii) ہاں

SCERT TELANGANA

2۔ (i) $2x^2 + x - 528 = 8$ (جہاں x=عرض)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ (جہاں x=چھوٹا صحیح عدد ہے)

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ (جہاں x = صہیب کی عمر)

(iv) $x^2 - 8x + 1280 = 0$ (x = ٹرین کی رفتار)

مشق - 5.2

1۔ (i) $-2; 5$ (ii) $-2; \frac{3}{2}$ (iii) $-\sqrt{2}; \frac{-5}{\sqrt{2}}$

(iv) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}; \frac{1}{10}$ (vi) $-6; 2$

(vii) $1, \frac{2}{3}$ (viii) $-1; 3$ (ix) $7, \frac{8}{3}$

2۔ 13,14

3۔ 17 , 18

4۔ 5 سمر ، 12 سمر

5۔ اشیاء کی تعداد = 6 ؛ ہر شئے کی قیمت خرید = `15

6۔ 4 میٹر، 10 میٹر

7۔ قاعدہ = 12 سمر ، بلندی = 8 سمر

8۔ 15 کلومیٹر ، 20 کلومیٹر

9۔ 20 یا 40

10۔ 9 کلومیٹر فی گھنٹہ (9*kmph*)

مشق - 5.3

1۔ (i) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\frac{-3}{5}$ *and* 2 (iv) -1 , -5

2۔ (i) $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ (ii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(iii) $2, \frac{-3}{5}$ (iv) $-1, -5$

3۔ (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1 , 2

4۔ 7 سال

5۔ ریاضی = 12 نشانات ، انگریزی = 18 نشانات یا ریاضی = 13 نشانات ، انگریزی = 17 نشانات

6۔ 120 میٹر ، 90 میٹر

SCERT TELANGANA

7۔ 18,12 ; -18 , -12

8۔ 40 کلومیٹر فی گھنٹہ (40kmph)

9۔ 15 گھنٹے ، 25 گھنٹے

10۔ پیاسنجر ریل گاڑی کی رفتار = 33 کلومیٹر فی گھنٹہ (33kmph)

ایکسپریس ریل گاڑی کی رفتار = 44 کلومیٹر فی گھنٹہ (44kmph)

11۔ 18 میٹر، 12 میٹر

12۔ 3 سکنڈ

13۔ 13 ضلع، نہیں

مشق - 5.4

1۔ (i) حقیقی ریشے نہیں رکھتا ہے۔

(ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ حقیقی اور مساوی ریشے

(iii) $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ حقیقی اور مختلف ریشے

2۔ (i) $k=\pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k=6$

3۔ ہاں ؛ 40 میٹر ؛ 20 میٹر

4۔ ممکن نہیں

5۔ ہاں ؛ 20 میٹر؛ 20 میٹر

مشق - 6.1

1۔ (i) حسابی تصاعد میں ہے (ii) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

(iii) حسابی تصاعد میں ہے (iv) حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔

2۔ (i) 10, 20, 30, 40 (ii) −2,−2,−2,−2

(iii) 4,1,-2,-5 (iv) $-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$

(v) -1.25, -1.5, -1.75, -2

3۔ (i) $a_1 = 3 ; d = -2$ (ii) $a_1 = -5 ; d = 4$

(iii) $a_1=\frac{1}{3}, d=\frac{4}{3}$ (iv) $a_1 = 0.6 ; d=1.1$

4۔ (i) حسابی تصاعد میں نہیں ہے۔

SCERT TELANGANA

(ii) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = $4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = -9.2 , -11.2 , -13.2

(iv) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = 6 , 10 , 14

(v) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = $3+4\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}, 3+6\sqrt{2}$

(vi) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

(vii) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = -16 , -20 , -24

(viii) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$

(ix) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

(x) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = 5a , 6a , 7a

(xi) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

(xii) حسابی تصاعد کے اگلے تین ارکان = $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) حسابی تصاعد میں نہیں ہے

مشق - 6.2

1۔ (i) $a_8 = 28$ (ii) $d=2$ (iii) $a=46$ (iv) $n=10$ (v) $a_n=3.5$

2۔ (i) -77 (ii) 22

3۔ (i) $a_2=14$ (ii) $a_1=18$; $a_1=8$

(iii) $a_2=\frac{13}{2}$; $a_3=8$ (iv) $a_5=4$، $a_4=2$، $a_3=0$، $a_2=-2$

(v) $a_5=4$; $a_4=2$; $a_3=0$; $a_2=-2$

(vi) $a_5=-7$; $a_4=8$; $a_3=23$; $a_1=53$

4۔ 16واں رکن

5۔ (i) 34 (ii) 27

6۔ (i) نہیں

7۔ 178

8۔ 5

9۔ 1

SCERT TELANGANA

10۔ 100　11۔ 128　12۔ 60　13۔ 13

14۔ ....4,10,16 کے حسابی تصاعد　15۔ 158

16۔ 3- , 8- , 13-　17۔ 11واں سال

مشق - 6.3

1۔ (i) 245　(ii) -180　(iii) 5505　(iv) $\frac{33}{20}=1\frac{13}{20}$

2۔ (i) $\frac{2093}{2}=1046\frac{1}{2}$　(ii) 286　(iii) -8930

3۔ (i) n=16　s_n=440　(ii) $d=\frac{7}{3},\quad S_{13}=273$

(iii) a = 4, S_{12} = 246　(iv) d = 1, a_{10} = 22

(v) a_5 = 34; n = 5　(vi) n = 7;　a = -8

(vii) a = 4

4۔ n = 38 ; S_{38} = 6973

5۔ 5610

6۔ n^2

7۔ (i) 525　(ii) -465

8۔ a_{10}=-15 ; a_3=-1 ; a_2=1 ; s_2=4 ; s_1=3 ; a_n=5-2n

9۔ 4920　10۔ 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

11۔ 234　12۔ 143 سر　13۔ 5'16　14۔ 370 میٹر

مشق - 6.4

1۔ (i) ہاں　(ii) نہیں　(iii) ہاں

2۔ (i) 4, 12, 36, ...　(ii) $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{25}, \ldots$

(iii) 81, -27 , 9 , ...　(iv) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots$

3۔ (i) ہاں ; 32 , 64 , 128

(ii) ہاں ; $\frac{-1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{-1}{96}$

SCERT TELANGANA

(iii) نہیں (iv) ہاں (v) نہیں

(vi) ہاں; -81 , 243 , -729 (vii) ہاں ...... $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$,

(viii) ہاں; $-16,\ 32\sqrt{2},\ -128$ (ix) ہاں ; 0.0004, 0.00004, 0.000004

4۔ Z

مشق - 6.5

1۔ (i) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; r= $\frac{1}{2}$

(ii) $a_n = 2(-3)^{n-1}$; $r = -3$

(iii) $a_n = (-1)(3)^{n-1}$; $r = 3$

(iv) $a_n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$; $r = \frac{2}{4}$

2۔ $a_{10} = 5^{10}$; $a_n = 5^n$

3۔ (i) $\frac{1}{3^4}$ (ii) $\frac{-4}{3^4}$

4۔ (i) 5 (ii) 12 (iii) 7

5۔ 3×2^{10} 6۔ $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1,$ .... 7۔ 5

مشق - 7. 1

1۔ (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iv) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2۔ 39 3۔ ہم خط نقاط نہیں ہیں۔ 4. $AB = BC = \sqrt{37}; AC = 2$

.5 AB=BC=CA=2a (یہ متوازی الاضلاع کے راس ہیں)

.6 $AB = CD = \sqrt{313}, BC = AD = \sqrt{104}, AC \neq BD$ (یہ متوازی الاضلاع کے راس ہیں)

7۔ $AB = BC = CD = DA = \sqrt{90}, AC \neq BD$ (یہ معین کے راس ہیں) مربع اکائیاں 72=رقبہ

8۔ (i) مربع (ii) مستطیل (iii) متوازی الاضلاع

9۔ (-7 , 0) 10۔ 7 یا -5 11۔ 3 یا -9

12۔ $4\sqrt{5}$ اکائیاں 13۔ AB=5 , BC=10, AC=15, AB + BC =15 ہم خط ہیں مثلث نہیں بناتے ہیں۔

14۔ x+13y=17 15۔ $AB = BC = CD = DA = 3\sqrt{2}, AC = BD = 6$ مربع کے راس ہیں۔

16۔ x-y=2

SCERT TELANGANA

مشق - 7.2

1۔ (1 , 3) 2۔ $\left(2,\frac{-5}{3}\right)$ اور $\left(0,\frac{-7}{3}\right)$

3۔ 2 : 7 4۔ $x = 6\ ;\ y = 3$

5۔ (3, -10) 6۔ $\left(\frac{-2}{7},\frac{-20}{7}\right)$

7۔ $\left(-1,\frac{9}{2}\right), (-2, 3), \left(-3,\frac{3}{2}\right)$

8۔ $\left(1,\frac{13}{2}\right)(0,5),\left(4\frac{7}{2}\right)$ 9۔ $\left(\frac{5a-b}{5},\frac{5a+b}{5}\right)$

10۔ (i) $\left(\frac{2}{3},2\right)$ (ii) $\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3}\right)$ (iii) $\left(\frac{-2}{3},\frac{5}{3}\right)$

11۔ $\left(\frac{25}{3},\frac{14}{3}\right)$ 12۔ B(0,10) اور $A\left(\frac{15}{2},0\right)$

مشق - 7.3

1۔ (i) $\frac{21}{2}$ مربع اکائیاں (ii) 32 مربع اکائیاں (iii) 3 مربع اکائیاں

2۔ (i) $k=4$ (ii) $k=3$ (iii) $k=\frac{7}{3}$

3۔ 1:4 ; 1 مربع اکائیاں

4۔ 28 مربع اکائیاں

5۔ (i) 5 مربع اکائیاں (ii) 6 مربع اکائیاں

مشق - 7.4

1۔ (i) 6 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\frac{4b}{a}$ (iv) $\frac{-b}{a}$

(v) −5 (vi) 0 (vii) $\frac{1}{7}$ (viii) -1

مشق - 8.2

1۔ (ii) 2.8 سم DE=

2۔ 8 سم

3۔ x=5 سم اور $y = 2\frac{13}{16}$ یا 2.8125 سم

4۔ 16 میٹر 8. 16 میٹر

SCERT TELANGANA

مشق - 8.3

1) 1:4   2) $\sqrt{2}-1$ 4) 96 مربع سمر   6) 3.5 سمر

مشق - 8.4

8) $6\sqrt{7}$ میٹر   9) 13 میٹر   12) 1:2

مشق - 9.1

1۔ (i) ایک   (ii) قاطع خط

(iii) ایک   (iv) نقطہ تماس   (v) لامتناہی   (vi) دو

2۔ PQ=12 سمر   4) 12 سمر

مشق - 9.2

1۔ (i) d   (ii) a   (iii) b   (iv) a   (v) c

2۔ 8 سمر   4) AB=15 سمر AC=9 سمر

5۔ ہر ایک 8 سمر   6۔ $2\sqrt{5}$ سمر   9) دو

مشق - 9.3

1) (i) 28.5 مربع سمر   (ii) 285.5 مربع سمر

2) 88.368 مربع سمر   3) 1254.96 مربع سمر

4) 57 مربع سمر   5) 10.5 مربع سمر

6) 6.125 مربع سمر   7) 102.67 مربع سمر   8) 57 مربع سمر

مشق - 10.1

1) 5500 مربع سمر   2) 184800 , 18.48 مربع میٹر

3) 264 مکعب سمر   4) 1:2   5) 21

7) 21175 مکعب سمر   8) 301.44 مکعب میٹر   9) 37 سنٹی میٹر

188.4 مربع میٹر

SCERT TELANGANA

مشق - 10.2

1) 103.62 مربع سم 2) 1156.57 مربع سم 3) $219.8mm^2$

4) 160 مربع سم 5) `827.00 6) 2:1:3

7) $a^2\left(6+\frac{\pi}{4}\right)$ مربع اکائی 8) 374 مربع سم

مشق - 10.3

1) 693 کلوگرام 2) مخروط کی بلندی = 21 سم ; کھلونے کی طرفی سطح کا رقبہ = 795.08 مربع سم

3) 89.83 مکعب سم 4) 616 مکعب سم

5) 309.57 مکعب سم

6) 150 7) 523.9 مکعب سم

مشق - 10.4

1) 2.74 سم 2) 12 سم 3) 2.5 میٹر

4) 5 میٹر 5) 10 6) 400

7) 100 8) 672

مشق - 11.1

1) $\tan A=\frac{15}{8}$; $\cos A=\frac{8}{17}$; $\sin A=\frac{15}{17}$

2) $\frac{527}{168}$ 3) $\cos\theta=\frac{7}{25}$; $\tan\theta=\frac{24}{7}$

4) $\sin A=\frac{5}{13}$; $\tan A=\frac{5}{12}$

5) $\cos A\ \frac{3}{5}$; $\sin A=\frac{4}{5}$

7) (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{\sqrt{113}+8}{7}$

8) (i) 1 (ii) 0

مشق - 11.2

1) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ (iii) 1

SCERT TELANGANA

(v) +1   (iv) 2

2) (i) c   (ii) d   (iii) c

3) 1   4) ہاں

5) PR = 12 سمر ; QR = $6\sqrt{3}$ سمر

6) $\angle YXZ = 30^0$; $\angle YZX = 60^0$

7) کاذب

مشق - 11.3

1) (i) 1   (ii) 0   (iii) 0

(iv) 1   (v) 1

3) $A^o=36^0$ 6) $\cos15^o+\sin25^o$

مشق - 11.4

1) (i) 2   (ii) 2   (iii) 1

6) 1   8) 1   9) $\frac{1}{p}$

مشق - 12.1

1) 15 میٹر   2) $6\sqrt{3}$ میٹر   3) 4 میٹر

4) 30^o 5) 34.64m   6) $4\sqrt{3}$ میٹر

7) 8.3136 میٹر، 4.1568 میٹر   8) $300\sqrt{3}$ میٹر   9) 15 میٹر   10) 7.5 مربع سمر

مشق - 12.2

1) ٹاور کی بلندی = $5\sqrt{3}$ میٹر ; راستے کی چوڑائی = 5 میٹر

2) 32.908 میٹر   3) 1.464 میٹر   4) 19.124 میٹر

5) 7.608 میٹر   6) 10 میٹر   7) 30 فٹ ; 90 فٹ

8) 6 سمر   9) 200 مربع فی سکنڈ   10) 3

مشق - 13.1

1) (i) 1   (ii) 0 ناممکن واقعہ   (iii) 1، ممکنہ واقعہ   (iv) 1   (v) 0 , 1

2) (i) ہاں   (ii) ہاں   (iii) ہاں   (iv) ہاں

SCERT TELANGANA

3) 0.95   4) (i) 0 (ii) 1   (5) $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{13}$

6) 0.008   7) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (8) $\frac{1}{26}$

مشق - 13.2

1) (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

2) (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$

3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

4) $\frac{5}{13}$

5) (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

6) (i) $\frac{3}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{1}{26}$

(iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

7) (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0

8) $\frac{11}{12}$ 9) (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$

10) (i) $\frac{9}{10}$ (ii) (a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}$

11) $\frac{11}{84}$ 12) (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

13) (i) $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$ (ii) نہیں

14) $\frac{3}{4}$ 15) (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

SCERT TELANGANA

مشق - 14.1

1) درخت کی اوسط تعداد = 8.1

2) `313 3) f=20 4) 75.9

5) 22.31 6) `211 7) 0.099ppm

8) 49دن 9) 69.43%

مشق - 14.2

1) بہتاتیہ = 36.8سال ، اوسط = 35.37سال

2) بہتاتیہ = 65.625 گھنٹے

3) بہتاتیہ = `1847.83 ، اوسط = `2662.5

4) بہتاتیہ = 30.6 ، اوسط = 29.2

5) بہتاتیہ = 4608.7رن

6) بہتاتیہ = 44.7 کار

مشق - 14.3

1) بہتاتیہ = 135.76اکائیاں ، اوسط = 137.05اکائیاں

وسطانیہ = 137 (تینوں کی قیمتیں تقریباً مساوی ہیں)

2) $x = 8$, $y = 7$

3) 35.76سال = وسطانی عمر

4) 146.75ملی میٹر = وسطانی لمبائی

5) 3406.98 گھنٹے = وسطانی وقت زندگی

SCERT TELANGANA

6) 7.88=بہتاتیہ ، 8.32=اوسط ، 8.05=وسطانیہ

7) 56.67 کلوگرام = وسطانی وزن

مشق - 14.4

1۔

Cummulative Frequencey	یومیہ آمدنی (` روپے میں)
12	300 سے کم
26	350 سے کم
34	400 سے کم
40	450 سے کم
50	500 سے کم

نقاط کی مدد سے ogive بنائیے۔ (300, 12), (350, 26), (400, 34), (450, 40) اور (500, 50)

2۔ نقاط کو جوڑتے ہوئے Ogive بنائیے۔ (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14),(48, 28), (50, 32) اور (52, 35). جہاں $\frac{n}{2}$=17.5 ہے۔ Ogive میں مرکز کا مشاہدہ کیجیے جس کا قطر 17.5 ہے اور x محور پر اسکا وسطانیہ ہوگا۔

3۔

C.F.	Production yield (kg/ha)
100	50 سے زیادہ یا مساوی
98	55 سے زیادہ یا مساوی
90	60 سے زیادہ یا مساوی
78	65 سے زیادہ یا مساوی
54	70 سے زیادہ یا مساوی
16	75 سے زیادہ یا مساوی

اب نقاط کو جوڑتے ہوئے Ogive بنائیے: (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78),(70, 54) اور (75, 16)

SCERT TELANGANA

اساتذہ سے کچھ ضروری باتیں

معزز اساتذہ!

حکومت آندھرا پردیش نے APSCF - 2011 کی بنیاد پر تمام ہی مضامین پر نظر ثانی کا فیصلہ کیا ہے۔ اس خاکہ کا منشاء یہی ہے کہ بچے لازمی طور پر پڑھیں اور مدرسہ کی سطح پر جو حساب سکھائی جائے وہ طلباء کی زندگی اور ان کے تجربات سے ہم آہنگ ہو۔ این سی ای آر ٹی اور حکومت آندھرا پردیش کی جانب سے NCF - 2005 کے تحت جس میں مضمون ریاضی سے متعلق پالیسی دستاویز پیش کیا گیا ہے' زندگی کے تجربات کو ریاضیاتی انداز میں سمجھے' اسی طرز پر اہلیت کو فروغ دینے اور امکانات تلاش کرنے کی ضرورت ظاہر کی گئی ہے۔ اور ایسا کرنا ثانوی سطح پر ہی ممکن ہے۔ نویں جماعت کا حسابی بنیادی خاکہ اسی طرز پر مستحکم کیا گیا ہے۔ اور اب ہم اس مضمون کی ثانوی سطح کی تکمیل پر پہونچ چکے ہیں۔ گزشتہ جماعتوں میں ہم نے طلباء میں تلخیصی فکر کو وسعت دینے اور ریاضیاتی انداز اپنانے کی حوصلہ افزائی کی تھی ۔ ثبوت وشواہد تلاش کرنے اور حسابی زبان استعمال کرنے کے رجحانات پیدا کئے گئے تھے ۔ یہ سمجھنے کی ضرورت ہے کہ ہم ایسا طرز زبان اختیار کریں کہ جس سے حسابی دلائل و بیانات زیادہ سے زیادہ علاقی بن سکیں۔ اور ان کا مدعا راست طور پر ذہن نشین ہو سکے۔ اس پس منظر میں یہ بات اہمیت رکھتی ہے کہ اس جماعت میں بچوں کو حسابی انداز استعمال کرنے کا اہل بنایا جائے۔ اور ان میں ایسا کرنے کا فطری رجحان فروغ پا سکے۔ جماعت دہم میں اسی طرز و فکر کو پائے تکمیل تک پہونچانے کی سعی کریں گے۔

یاد رہے کہ دسویں جماعت میں درس و تدریس کے لیے ضروری ہے کہ ششم تا دہم ہم سارے نصاب کو ملحوظ رکھا جائے۔ نصاب پر طائرانہ نظر سے واضح ہو جاتا ہے کہ تلخیص و نظریاتی فکر اور حسابی زبان کا استعمال بتدریج وسعت اختیار کرتا جاتا ہے۔ طلباء میں فروغ پانے والی یہی فکر خیالات کو اک خاص طرز پڑھانے میں مدد دیتی ہے اور وہ انہیں ٹھوس رخ دینے قابل ہو جاتے ہیں۔ اس مضمون کو مستقبل کے امکانات کا وسیلہ بنانے اور ثانوی سطح پر اس پر دسترس حاصل کرنے میں بچوں کو اک بڑی دشواری یہ ہے کہ وہ اس مضمون کے نظریاتی انداز اور علاقی زبان بہتر طور پر تفہیم نہیں کر سکتے۔ ان حالات میں یہ ضروری ہے کہ انہیں ایک گروپ اور ٹیم کی حیثیت میں اسے سیکھنے اور اس مضمون کے طرز و فکر کو لاگو کرنے کے ساز گار حالات فراہم کئے جائیں۔ اس سلسلہ میں ہم عمر اور ہم خیال افراد کا اشتراک وتعاون' مشکلات کو دور کرنے میں ممد و معاون ہوگا۔ اس مقصد کے پیش نظر طلباء کے مابین تبادلہ خیال' گفتگو اور اجتماعی کوشش اہم رول ادا کرتا ہے۔ اسی انداز سے نتائج اخذ کرتے ہوئے وہ حسابی مسائل حل کر سکتے ہیں۔ دسویں جماعت میں اسی انداز کی تدریس و ٹریننگ' مستقبل میں مضمون کو سیکھنے کے راستے آسان کر دے گی۔

نصاب کچھ اس طرح مدمون کیا گیا ہے کہ اس سے تحقیقی رجحانات اجاگر ہوں گے۔ اور حساب کے نظریات کا فہم فروغ پائیگا۔ اور طلباء میں نتائج اخذ کرنے کا میلان پیدا ہوگا۔ نصاب کے خاکہ جاتی انداز سے بچوں میں کمرہ جماعت میں موضوع پر گفتگو کرنے اور اپنے خیالات کا تبادلہ کرنے کا حوصلہ پیدا ہوگا۔

دسویں جماعت کی ریاضی کے اس نصاب کو چھ حصوں اعداد کے نظام' محسوبات' الجبراء' علم ہندسہ' علم مثلث' اعداد و شمار اور تحلیلی جیومٹری میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان موضوعات سے متعلق تدریس بچوں میں سوالات کو حل کرنے' منطقی سوچ' ریاضیاتی مواصلت' اعداد و شمار کی مختلف انداز سے اظہار کی مہارت پیدا ہوگی' اور حساب کو ایک خصوصی مضمون کے طور پر اپنانے کے ذوق کے علاوہ اسے روزمرہ زندگی میں بروئے کار لانے سے دلچسپی پیدا ہوگی۔

امید کیجاتی ہے کہ یہ کتاب ترجیحات کو متعین کرنے اور مستقبل کے امکانات تلاش کرنے کا وسیلہ ہوگی۔ ''یہ کیجیے'' اور ''کوشش کیجیے'' کے تحت سر دست مطلوبہ آزمائشی کوششوں کے لیے بچوں میں چھوٹے گروپس کے مابین تبادلہ خیال کے حالات پیدا ہوں گے۔ واضح رہے کہ کمرہ جماعت میں ساز گار ماحول پیدا کرنے اور بچوں میں کتاب سے دلچسپی پیدا کرنے کے لیے استاد کی کاوشیں ضروری ہیں۔

SCERT TELANGANA

ہرایک عنوان کے تحت نظریات کی وضاحت کے بعد''یہ کیجیے''اور''کوشش کیجیے''اہم حصہ کےطور پر شامل کئے گئے ہیں۔یادرہے کہ''یہ کیجیے'' کے تحت جوسوالات دیئے گئے ہیں وہ درسی بنیاد پر وضع کئے گئے ہیں جبکہ''کوشش کیجیے'' کےتحت جوسوالات دیئے گئے ہیں وہ تدریسی نکات کی مہارت اورتصدیق کی جانچ کےمقصد سےشامل کئے گئے ہیں۔''سوچیے اورتبادلہ خیال کیجیے'' بچوں میں نظریات کی تفہیم اوراپنے ادراک کوقلمبند کرنے کے منشاء سے دیئے گئے ہیں۔

دسویں جماعت کی ریاضی کا یہ نصاب 14 بابوں میں تقسیم کیا گیا ہے جبکہ ایک مشمولہ بھی شامل کیا گیا ہے تا کہ ایک طالب علم متن کا باریک بینی سے مطالعہ کرتے ہوئے نہ صرف اپنے ذہن کووسعت دے بلکہ ریاضی سیکھنے کے عمل سے لطف اندوز بھی ہو۔علاوہ ازیں رنگ برنگے خاکے'اشکال اور بہ آسانی قابل مطالعہ تحریروہ عوامل ہیں جوطالب علم کواپنی جانب راغب کریں گے۔اوروہ کتاب کے متن سے دلچسپی پیدا کرتے ہوئے کتاب کواپنی خاص دستاویز متصور کرےگا۔

باب - 1: حقیقی اعداد:

اس باب میں حقیقی اعداد کا گہرائی سے مطالعہ کیا گیا ہے جس کے تحت حساب کے بنیادی مسئلہ کامختصر جائزہ لیا گیا ہے۔اورناطق اعداد'ان کا اعشاری پھیلاؤ کے علاوہ غیرمختتم تکراری ناطق اعداد بھی دیئے گئے ہیں۔مزید برآں غیرناطق اعداد بھی شامل کئے گئے ہیں۔اس باب میں پہلی مرتبہ لوگارتھم شامل کیا گیا ہے جس کے تحت اس کے بنیادی قوانین اوراطلاقات کی تفصیلات درج کی گئی ہیں۔

باب - 2 سیٹس:

ثانوی سطح پر یہ کاملاً ایک نیاباب ہے۔سابقہ نصاب میں بھی یہ شامل کیا گیا تھا لیکن دسویں جماعت میں یہ پہلی مرتبہ اس نوعیت سے رکھا گیا ہے اس میں وسیع تر مثالیں پیش کی گئی ہیں۔ان میں سیٹس کی تعریف وتوضیح ان کے اقسام'وین کی شکلیں'سیٹس کے اعمال'اوران کے فرق بتلایئے گئے ہیں۔یہ واضح کیا گیا ہے کہ سیٹس کی تفہیم کس طرح کیجائے؟اورکس طرح کسی بھی شئے سے سیٹ تیار کئے جائیں۔

باب - 3 کثیررکنیاں:

ہم نے اس باب میں کثیررکنیوں سے بحث کی ہے کہ وہ کیا ہیں؟ کثیر رکنیوں کا درجہ اوران کی قیمت بھی اسی میں شامل ہوگئی۔خطی مساواتوں اور دودرجی مساواتوں کوترسیمی طورپرظاہرکیا گیا ہے کثیر رکنیوں کےصفراءاورعددی ضریبوں پر بحث کی گئی ہےاوران کے مابین رشتہ بتایا گیا ہے۔مکعبی کثیررکنی اورکثیررکنیوں کے تقسیمی الگورتھم کوپہلی مرتبہ متعارف کیا گیا ہے۔

باب - 4 دومتغیرمقداروں میں خطی مساواتوں کے جوڑ:

نامعلوم مقداروں کومحسوب کرنے کی مثال سے باب شروع ہوتا ہے اور دومساواتوں کے استعمال کا جائزہ لیا گیا ہے۔اس باب میں کوئی دومتغیر مقداروں میں خطی مساواتوں کا حل پیش کیا گیا ہے۔اورترسیمی والجبری طریقے استعمال کئے گئے ہیں۔عددی ضریبوں اورمساوات کے نظام کے نیچر کے مابین ہمرشتگی بتائی گئی ہے۔مساوات کودومتغیرمقداروں کی خطی مساوات میں تبدیل کرنے کی بابت وضاحت شامل ہے۔

سوالات اس طرز پرترتیب دیئے گئے ہیں کہ مضمون ہی کے تحت مختلف بابوں اور دیگرمضامین کے مابین تعلق کواہمیت دی گئی ہے۔روزمرہ کے تجربات میں نامعلوم مقدارکومعلوم کرنے کی اہلیت'طالب علم ہی پیدا کرنے کی کوشش کی گئی ہے

اس کتاب میں باب 8'9اور10 علم ہندسہ سے متعلق ہیں۔تینوں بابوں میں ازخودتوضیحات ظاہرکرنےفہم کرنے اوراپنے ذاتی تجربات سے تاویل پیش کرنے کی بابت ترغیب دی گئی ہے۔بہترمواصلاتی صلاحیت سوالات حل کرنے اورمختلف مستوی اشکال کے مابین تعلق اخذ کرنے طالب علم کے

SCERT TELANGANA

لیے سہل انداز اپنایا گیا ہے۔ باب 9 علم مثلث کی نسبتوں سے متعلق ہے اس میں tangent اور Secant کی خصوصیات بتائی گئی ہیں۔ دائرے میں Secant سے تشکیل پانے والے رقبہ کی نسبت بحث کی گئی ہے۔ مساحت کے تحت ٹھوس اجسام ان کے حجم اور سطحی رقبہ پر سوالات شامل کئے گئے ہیں۔

باب - 5 دودرجی مساواتیں:

دودرجی مساواتوں کا مفہوم' اوراجزائے ضربی وکامل مربع کے طریقے سے ان کو حل سمجھائے گئے ہیں۔ مکافی کی مدد سے ان کے ریشوں کی نوعیت بتائی گئی ہے۔

باب - 6 تصاعد:

ثانوی سطح پر پہلی مرتبہ اس باب کا آغاز کیا گیا ہے حسابی تصاعد وجیومٹریہ تصاعد توضیحات بتائی گئی ہیں۔ متعلقہ اصطلاحات تفصیلی طور پر شامل کئے گئے ہیں۔ علاوہ ازیں n ویں رکن اور n ارکان تک مجموعہ کے سوالات بھی شامل ہیں۔

باب - 7 تحلیلی جیومٹری:

کارتیزی مستوی پر دونقاط کے درمیان فاصلہ' مثلث کا نقطہ مرکز' کسی خطی قطعہ کا نقطہ تثلیث کا فہم دیا گیا ہے۔ علاوہ ازیں کسی مستوی میں مثلث کا رقبہ اور Heron کے ضابطہ سے رقبہ محسوب کرنا سمجھایا گیا ہے۔ کسی خط مستقیم کے ڈھلان کو بھی اس باب میں متعارف کیا گیا ہے۔

باب - 11 اور 12 پہلی مرتبہ شروع کئے گئے ہیں۔ مثلث میں وتر' ارتفاع اور قاعدہ کے درمیان ہم رشتگی اور مثلثات سے متعلق اطلاقات بتائے گئے ہیں۔ اس طرح علم مثلث شامل کیا گیا ہے۔ اعلیٰ تعلیم میں اس باب کی افادیت کے پیش نظر تحت کی پیائش بھی اس سے منسلک ہیں۔ مثلث کے استعمالات کا اک مختصر خاکہ علم مثلث کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے۔

باب - 13 قیاسیات کے باب کو نہم سے آگے بڑھایا گیا ہے۔ اس باب میں روزمرہ زندگی سے چند مثالیں لیتے ہوئے قیاسیات کی مختلف اصطلاحیں شامل کی گئی ہیں۔

باب - 14 شماریات:

شماریات کی اہمیت اجاگر کی گئی ہے۔ گروہی معطیات' اوسط حسابیہ' وسطانیہ اور بہتاتیہ کو محسوب کرنے مثالیں دی گئی ہیں۔ مختلف طریقے گروہی معطیات میں اپنائے گئے ہیں۔ مشمولہ میں ریاضیاتی ماڈلنگ متعارف کی گئی ہے۔ اس باب میں ریاضیاتی نمونوں کی بابت بحث کی گئی ہے۔

اساتذہ سے عرض ہے کہ کسی تعلیمی کورس کی کامیابی کا انحصار نصاب پر ہی نہیں بلکہ اساتذہ اور طریقہ تدریس پر بھی ہوتا ہے۔ یہ امید کیجاتی ہے کہ اساتذہ ریاضی کی تعلیم کو موثر بنانے اور اس کے معیار میں بہتری لانے کی بھرپور کوشش کریں گے اس سلسلہ میں ان سے ممکنہ تعاون کی توقع کیجاتی ہے۔ تاوقتیکہ اساتذہ ایسی کتاب کے نصاب کے منشاء کو پورا کرنے کی مخلصانہ سعی نہیں کرتے تعلیم کو معیار کو صرف کتاب کی تیاری سے یقینی نہیں بنایا جاسکتا۔ کتاب میں طالب علم کو درس وتدریس کا حصہ بنانے اور مختلف نصابی سرگرمیوں میں اسے شریک رکھنے کو یقینی بنانے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس امر پر بھی توجہ دی گئی ہے کہ نصاب میں شامل مختلف عنوانات کے تحت تدریسی موضوعات کا فہم پیدا کیا جائے۔

طلباء کو چاہیے کہ وہ ''ہم نے کیا سیکھا'' کے تحت تمام نظریات کو اچھی طرح سمجھیں۔ مختلف مشقوں میں دیئے گئے سوالات کو حل کرنے کے علاوہ اساتذہ کو چاہیے کہ وہ خود اپنے طور پر متعلقہ نظریات کی بنیاد پر سوالات تیار کریں۔ اس طرح ہم توقع کرسکتے ہیں کہ معزز اساتذہ مضمون کو صحیح فہم کے ذریعہ کمرہ جماعت کے ماحول میں اک بہتر تبدیلی لائیں گے۔

''بہتر تدریس کے لیے نیک تمنائیں''

SCERT TELANGANA

نصاب

I۔ اعداد کا نظام (23 پیریڈس)

(i) حقیقی اعداد (15 پیریڈس)

- ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد سے متعلق معلومات
- اقلیدس کا تقسیمی نظریہ
- حساب کا بنیادی مسئلہ - بیانات
- نتائج کے ثبوت- $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ وغیرہ کی غیر ناطقی خصوصیت اور ناطق اعداد کا اعشاری پھیلاؤ مختتم / غیر مختتم تکراری اعشاریہ
- حقیقی اعداد کی خصوصیات (سابقہ معلومات کا اعادہ، مثالوں کی تقسیم کے بعد اور مثالوں کے ذریعہ ترغیب دینا)
- لوگارتھم کا تعارف
- کسی عدد کی قوت نما کی شکل سے لوگارتھم کی شکل میں تحویل
- لوگارتھم کی خصوصیات $\log_a^1 = 0$؛ $\log_a^a = 1$
- لوگارتھم کے قوانین

$$\log xy = \log x + \log y; \log\frac{x}{y} = \log x - \log y; \log x^n = n\log x; a^{\log_a n} = N$$

- لوگارتھم کا معیاری اساس اور روزمرہ زندگی میں لوگارتھم کے استعمالات (امتحان سے مستثنیٰ)

(ii) سیٹس (8 پیریڈس)

- سیٹس اور ان کا اظہار
- خالی سیٹ، متناہی سیٹ اور لا متناہی سیٹس، آفاقی سیٹس
- مساوی سیٹس، تحت سیٹس، حقیقی اعداد کے سیٹ کے تحت سیٹس (خصوصی وقفے اور علامتی اظہار)
- وین کی اشکال اور سیٹس میں ارکان کی تعداد
- سیٹس کے بنیادی اعمال۔ سیٹس کے قوانین سیٹس کا اجماع اور سیٹس کا تقاطع
- غیر مشترک سیٹس اور سیٹس کے فرق

II۔ الجبراء (46 پیریڈس)

(i) کثیر رکنیاں (8 پیریڈس)

- کثیر رکنی کے صفر
- خطی، دو درجی اور مکعبی کثیر رکنیوں کے صفروں کا جیومیٹریائی مفہوم، ترسیم کے استعمال سے
- کسی کثیر رکنی کے صفروں اور عددی ضریبوں کے درمیانی رشتہ
- صحیح عددی ضریبوں کے کثیر رکنیوں کے لیے تقسیمی الگورتم پر سادہ سوالات

(ii) دو متغیرات پر خطی مساوات کا جوڑ (15 پیریڈس)

- مثالوں کے ذریعہ دو متغیر مقداروں میں خطی مساواتوں کی تشکیل
- خطی مساواتوں کے جوڑ کا ترسیمی اظہار۔ مساواتوں کے نظام کی نوعیت
- حل کی تعداد کے لیے الجبری شرائط
- الجبری طریقے سے دو متغیرات پر خطی مساوات کے جوڑ کا حل اندراج کا طریقہ
- روزمرہ زندگی سے متعلق سادہ سوالات جو خطی مساواتوں میں قابل تبدیل ہیں۔

(iii) دو درجی مساوات (12 پیریڈس)

- دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

SCERT TELANGANA

- دودرجی مساوات کے حل (حقیقی ریشے) ۔اجزائے ضربی اور کامل مربعوں کے ذریعہ یعنی دودرجی ضابطہ کے استعمال سے
- ممیّز اور ریشوں کی نوعیت کے مابین تعلق
- روزمرہ زندگی سے متعلق مسائل

(iv) تصاعد (11 پیریڈس)

- حسابی تصاعد کی تعریف (A.P)
- حسابی تصاعد کے n ویں رکن اور پہلے n ارکان کا مجموعہ
- جیومٹریہ تصاعد (G.P)
- جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن

III۔ جیومٹری (33 پیریڈس)

(i) مشابہہ مثلثات (18 پیریڈس)

- مشابہہ اور مماثل اشکال کے مابین فرق
- مشابہہ مثلثات کی خصوصیات
- (ثابت کیجیے) کسی مثلث میں ایک خطی قطعہ کسی ایک ضلع کے متوازی اس طرح کھینچا جائے کہ یہ دو اضلاع کو متفرق نقاط پر قطع کرتا ہو تو یہ خط ان اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔
- (ترغیب دیں) اگر کوئی خطی قطعہ کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرتا ہو تو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔
- (ترغیب دیں) اگر کسی دو مثلثات میں متناظر زاویئے مساوی ہوں تو ان کے متعلقہ ضلعے متناسب ہوں گے اور یہ مثلثات مشابہہ ہوں گے (زاویہ ٗزاویہ ٗزاویہ)
- (ترغیب دیں) اگر کسی دو مثلثات میں متناظر اضلاع متناسب ہوں تو ان کے متناظر زاویئے مساوی ہوں گے اور یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے۔ (ضلع ضلع ضلع)
- (ترغیب دیں) اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ ایک دو مثلث کے کسی ایک زاویئے کے مساوی ہوں اور ان زاویوں کو گھیرنے والے اضلاع متناسب ہوں تو یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے (ایس سے ایس)
- (ثابت کیجیے) کوئی دو مشابہہ مثلثات کے رقبوں کی نسبت مساوی ہوتی ہے ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے۔
- (ترغیب دیں) اگر کسی مثلث میں اس کے زاویہ قائمہ کی راس سے وتر پر ایک عمود کھینچا جائے تو اس کے عمود کے دونوں جانب بننے والے مثلثات بڑے مثلث کے مشابہہ ہوں گے اور ایک دوسرے کے بھی مشابہہ ہوں گے۔
- (ثابت کیجیے) کسی مثلث قائمۃ الزاویہ میں وتر پر کا مربع ٗ باقی کے دو اضلاع پر مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا۔
- (ثابت کیجیے) کسی مثلث میں ٗ اگر کسی ایک ضلع پر کا مربع ٗ باقی دو اضلاع پر بننے والے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہو تو یہ مثلث ٗ قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگا۔
- (بناوٹ) بنیادی ٗ تناسبی مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک خطی قطعہ کی تقسیم کا عمل
- (بناوٹ) کوئی مثلث دی ہوئی اسکیل (پیمانہ کی شرح) کے مطابق دیئے ہوئے دوسرے مثلث کے مشابہہ ہوتا ہے۔

(ii) ایک دائرے کے Tangent اور Secants (15 پیریڈس)

- ایک دائرے کے Tangent اور Secants (15 پیریڈس)
- ایک ایسے دائرے کے Tangents جس میں کسی ایک نقطہ سے وتر کچھ اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ جو کسی اور نقطہ پر قریب سے قریب تر ہو جاتے ہیں۔
- (ثابت کیجیے) دائرہ کے کسی نقطہ پر واقع ہونے والا Tangent اس نقطہ سے کھینچے جانے والے نصف قطر کے عمودوار ہوتا ہے۔
- (ثابت کیجیے) کسی دائرہ کے ایک بیرونی نقطہ سے کھینچے جانے والے Tangent کی لمبائی مساوی ہوتی ہے۔
- (بناوٹ) کسی دائرہ پر ایک نقطہ سے ایک Tangent کھینچنا
- (بناوٹ) کسی بیرونی نقطہ سے دائرہ پر Tangent کے جوڑ
- Secant سے کسی دائرہ میں خطی قطعہ
- کسی دائرہ میں قطعہ اکبر/قطعہ اصغر کے رقبے

SCERT TELANGANA

(iv) تحلیلی جیومٹری

- کارتیزی جیومٹری کے نظریات کا اعادہ، خطی مساواتوں کی ترسیم کے ذریعہ
- دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان کا فاصلہ

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$$

- سکشن فارمولہ (کسی خطی قطعہ کی m:n کی نسبت میں اندرونی تقسیم)
- کارتیزی مستوی پر اک مثلث کا رقبہ
- دو نقاط کو ملانے والے خط کی ڈھال

(v) علم مثلث (23 پیریڈس)

(i) علم مثلث (15 پیریڈس)

- کسی مثلث قائمہ الزاویہ کے زاویہ حادّہ کی مثلثی نسبتیں (Trigonometrical ratios) یعنی Sine، Cosine، Tangent، Secant اور co-secant
- زاویوں 30^o، 40^o اور 60^o (ثبوت کے ساتھ) کی مثلثی نسبتوں کی قدریں
- تکمیلی زاویوں کے لیے نسبتوں اور مثلثی نسبتوں کے مابین ہمرشتگی
- Trigonometry کی متماثلات

$$\text{(i) } \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \text{(ii) } 1 + \tan^2 A = \sec^2 A, \text{ (iii) } \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$$

(ii) علم مثلث کے اطلاقات (8 پیریڈس)

- زاویہ فراز و نشیب
- بلندی اور فاصلہ پر روزمرہ زندگی سے متعلق سادہ سوالات
- دو مثلثات قائمہ الزاویہ (زاویہ نہیں) سے متعلق سوالات اور 30^o، 45^o اور 60^o تک محدود فراز/نشیب کے زاویئے

(vi) مساحت (10 پیریڈس)

(i) سطحی رقبے اور حجم

- سطح کے رقبوں پر سوالات اور حجم پر سوالات مکعب، مکعب نما، قائم استوانہ مخروط، کرّے اور نصف کروں میں سے کوئی دو کو یکجا کر کے ان کے حجم پر سوالات
- ایک ٹھوس دھاتی جسم کو دوسری شکل میں تبدیل کرنے کی صورت میں ان کے حجم پر سوالات اور دوسرے ایسے ملے جلے سوالات جو ایک یا دو مختلف ٹھوس اجسام سے متعلق ہوں۔

(vii) قیاسیات (25 پیریڈس)

- قیاسیات کا نظریہ اور اس کی تعریف کا اعادہ
- علاقی اظہار کے ذریعہ واحد وقوع پر (روزمرہ زندگی سے متعلق) سادہ سوالات
- ایک ساتھ وقوع کا نظریہ

مشمولہ

ریاضیاتی ماڈلنگ (8 پیریڈس)

- ریاضیاتی ماڈلنگ کا نظریہ
- روزمرہ زندگی میں ریاضیاتی ماڈلنگ کے وسیع تر مرحلوں پر تبادلہ (سود مفرد، شرح، قسطی ادائیگی وغیرہ۔۔۔)

SCERT TELANGANA

تعلیمی معیارات (ہائی اسکول)

طلباء کیا جاننا چاہیے اوران پرعمل کرنے کے قابل ہوں ان کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں' ان کی بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے۔

مسئلہ کا حل

طریقۂ عمل اورتصورات کواستعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کوحل کرنا۔

(a) مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہوسکتے ہیں' جیسے معمہ' عبارتی سوالات' تصویری مسائل طریقوں پرمبنی سوالات' معطیات' جدول اورترسیمات وغیرہ۔

(b) مسئلہ کوحل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا۔
- معلومات/ڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کونسا خیال یا تصورشامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقۂ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کودہرانا۔
- طریقۂ عمل کا انتخاب۔
- مسئلہ کوحل کرنا۔
- مسئلہ پرمبنی عبارتی سوالات اوران کے جوابات کی جانچ۔

(c) پیچیدگی

- ایک سوال کی پیچیدگی اس پرمنحصرہوتی ہے۔
- تعلق پیدا کرنا (ربط کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)۔
- اقدامات کی تعداد۔
- مراحل کی تعداد۔
- عبارتی سوالات کوسلجھانا۔
- طریقۂ عمل کی نوعیت۔

(d) استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات سے)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اورمفروضات کو بتانا اورسمجھنا۔
- طریقۂ عمل کی جانچ اورتفہیم' منطقی بحث کی جانچ۔

SCERT TELANGANA

اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا' پڑھنا اور ان کا اظہار کرنا۔(عباری اور علامتی شکل میں)

مثلاً $180^0 =$ زاویوں کا مجموعہ $3 + 4 = 7, 3 < 5, n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل
- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلعے اور چار زاویئے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا اس کے بعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو ہمیشہ حاصل کو مدنظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

ربط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے' کل کے حصوں کو نسبت سے تقسیم سے'نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل' پیمائشات اور فاصلے۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا جیسے معطیات کا اظہار اور حساب یا حساب اور فضاء۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے جوڑنا/مربوط کرنا۔

نمائندگی

- جدول کے معطیات' عددی خط' تصویری ترسیم' بارگراف' 2D اشکال 3D اشکال' تصویروں اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول' عددی خط' تصوریری گراف' بارگراف اور تصویروں کو بتانا۔
- ریاضیاتی علامتیں اور اشکال۔

SCERT TELANGANA